

ANALISIS DE ESTRUCTURAS RETICULARES

Por
JAMES M. GERE
Y
WILLIAM WAVER, JR.

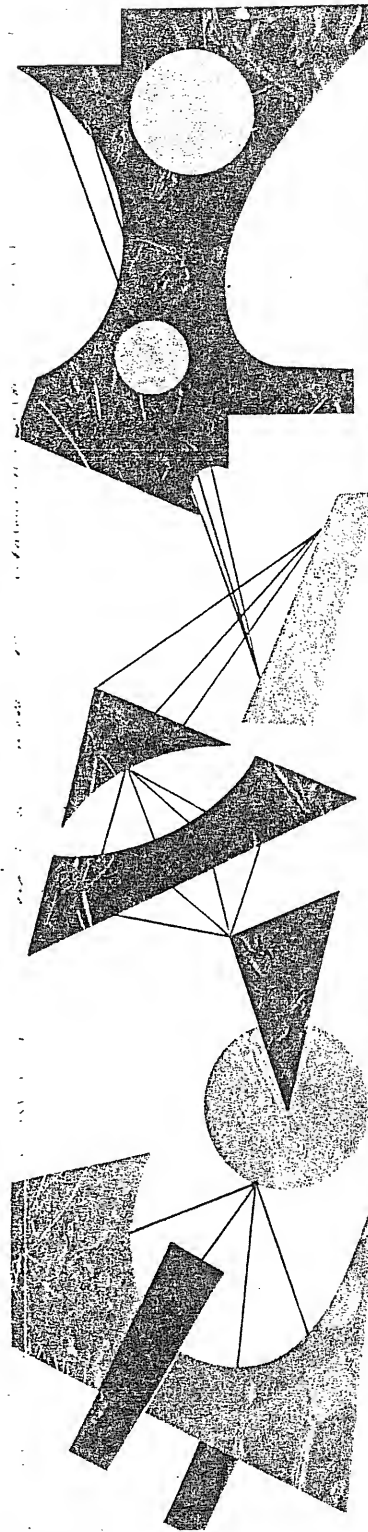
El advenimiento de la computadora digital ha hecho necesario reorganizar la teoría de las estructuras en forma de matriz. Ahora el énfasis está sobre los métodos de análisis de flexibilidad y rigidez, que están considerados como los más fundamentales y completos de todas las teorías existentes. Estos dos métodos complementarios son especialmente adecuados para la formulación de matrices y el cálculo automático.

La presente obra, escrita como libro de texto para estudiantes universitarios, trata del análisis de estructuras reticulares por el método de matrices. El material se ha utilizado en cursos que los autores han desarrollado en un periodo que abarca varios años. La materia ha sido impartida a estudiantes tanto no graduados como graduados, los que han demostrado gran entusiasmo.

El primer capítulo y los apéndices cubren ciertos aspectos fundamentales sobre el análisis estructural, siendo este material un requisito para la parte principal del libro. Quienes hayan estudiado previamente la teoría de las estructuras encontrarán que este material es principalmente de repaso; sin embargo, quienes estudian por primera vez la teoría de las estructuras, encontrarán que es necesario familiarizarse a conciencia con estos temas básicos.

Los métodos de flexibilidad y rigidez se estudian y comparan en el Cap. 2, y se dan numerosos ejemplos ilustrativos de ambos métodos. En los Caps. 3 y 4 se amplían los conocimientos sobre cada uno de los métodos y se entra en más detalle. En el Cap. 5 se presentan problemas de cálculo para el análisis de las estructuras reticulares mediante el método de la rigidez. Para conservar el énfasis de los temas fundamentales en los primeros capítulos, se posponen muchos temas especiales para el Cap. 6. Por lo tanto, en dicho capítulo se consideran temas como los de miembros no prismáticos, efectos de temperatura y conexiones elásticas. Todos estos temas pueden estudiarse como modificaciones a los procedimientos básicos descritos en los capítulos anteriores.

Al final de algunos de los capítulos se dan problemas de ejercicio, que por lo general van colocados en orden de dificultad. Al final del libro se encontrarán referencias para estudios posteriores, respuestas a todos los problemas y apéndice, con valiosas tablas de información.



Ing. Carlos Ayala Moya
10/ABR/2007.

364

análisis de ESTRUCTURAS RETICULARES

3a. IMPRESION

JAMES M. GERE
Y
WILLIAM WEAVER, JR.

C. E. C. S. A.

Análisis de Estructuras Reticulares

Por

JAMES M. GERE

Profesor de Estructura en Ingeniería
en la Universidad de Stanford

y

WILLIAM WEAVER, JR.

Profesor Auxiliar de Estructura en Ingeniería
en la Universidad de Stanford

COMPANIA EDITORIAL CONTINENTAL, S. A.
MEXICO - ESPAÑA

SUCURSALES, DEPOSITOS Y REPRESENTACIONES EN:

ARGENTINA — Bolivia — Brasil — Colombia — Costa Rica — CHILE — Dominicana
Ecuador — Estados Unidos — Guatemala — Honduras — Nicaragua — Panamá
Paraguay — Perú — Portugal — Puerto Rico — El Salvador — Uruguay — Venezuela

CONTENIDO

CAP.	PÁG.
1. CONCEPTOS ELEMENTALES DEL ANALISIS ESTRUCTURAL	13
1.1. Introducción	13
1.2. Tipos de estructuras reticulares	13
1.3. Deformaciones y desplazamientos	15
1.4. Acciones y desplazamientos	20
1.5. Equilibrio	26
1.6. Compatibilidad	28
1.7. Indeterminación estática y cinemática	28
1.8. Estructuras móviles	35
1.9. Principio de superposición	37
1.10. Ecuaciones de acción y desplazamiento	40
1.11. Matrices de flexibilidad y de rigidez	46
1.12. Relaciones recíprocas	51
Problemas	54
2. INTRODUCCION A LOS METODOS DE LA FLEXIBILIDAD Y DE LA RIGIDEZ	59
2.1. Introducción	59
2.2. El método de la flexibilidad	60
2.3. Ejemplos	69
2.4. Efectos de temperatura, deformación previa y desplazamiento de los apoyos	82
2.5. Desplazamiento de nudos, acciones en los extremos de los miembros y reacciones	88
2.6. Inversa de la matriz de flexibilidad	95
2.7. Resumen del método de flexibilidad	97
2.8. Método de la rigidez	99
2.9. Ejemplos	113
2.10. Efectos de temperatura, deformaciones previas y desplazamiento de apoyos	134
2.11. Inversa de la matriz de rigidez	138
2.12. Resumen del método de la rigidez	140

CAP.	PÁG.
2.13. Comparación de métodos	143
2.14. Sistemas de cargas múltiples	144
Problemas	147
3. METODO DE LA FLEXIBILIDAD	163
3.1. Introducción	163
3.2. Cargas de nudo equivalentes	164
3.3. Desplazamiento de nudos en armaduras	167
3.4. Desplazamiento de nudo en vigas	176
3.5. Desplazamiento de nudos en marcos planos	185
3.6. Desplazamiento de nudos en parrillas	189
3.7. Desplazamiento de nudo en marcos en el espacio ...	193
3.8. Ecuaciones del método de la flexibilidad	195
3.9. Ejemplos	201
3.10. Efectos de temperatura, deformaciones previas y des- plazamiento de apoyos	214
3.11. Miembros con secciones transversales simétricas y asi- métricas	215
Problemas	217
4. METODO DE LA RIGIDEZ	225
4.1. Introducción	225
4.2. Principales características del método de la rigidez ..	225
4.3. Rigidez de miembro prismático	228
4.4. Matriz de rigidez de nudo total	236
4.5. Cargas	240
4.6. Cálculo de resultados	244
4.7. Sistemas de numeración arbitrarios	246
4.8. Análisis de vigas continuas	251
4.9. Ejemplo	263
4.10. Rigideces de miembros de armaduras planas	270
4.11. Análisis de armaduras planas	274
4.12. Ejemplo	286
4.13. Rotación de ejes en dos dimensiones	290
4.14. Aplicación a miembros de armaduras planas	293
4.15. Rotación de ejes en tres dimensiones	298
4.16. Rigideces de miembros de marcos planos	300

CAP.	PÁG.
4.17. Análisis de marcos planos	303
4.18. Ejemplo	310
4.19. Rigideces de miembros de parrilla	315
4.20. Análisis de parrillas	319
4.21. Rigideces de miembros de armaduras en el espacio ..	322
4.22. Selección de ejes de miembros de armaduras en el es- pacio	325
4.23. Análisis de armaduras en el espacio	329
4.24. Rigideces de miembros de marcos en el espacio	333
4.25. Análisis de marcos en el espacio	341
Problemas	345
5. PROGRAMAS DE CALCULO PARA ESTRUCTURAS RE- TICULARES	353
5.1. Introducción	353
5.2. Programación de cálculo y diagramas de flujo	354
5.3. Principales características de los programas	361
5.4. Programa para una viga continua	363
5.5. Programa para una armadura plana	380
5.6. Programa para un marco plano	388
5.7. Programa para una parrilla	404
5.8. Programa para una armadura en el espacio	411
5.9. Programa para un marco en el espacio	422
6. TOPICOS ADICIONALES PARA EL METODO DE LA RI- GIDEZ	451
6.1. Introducción	451
6.2. Temperatura y deformación previa	451
6.3. Cargas entre nudos	452
6.4. Acciones y desplazamientos entre nudos	456
6.5. Desplazamientos de los apoyos	466
6.6. Apoyos inclinados	467
6.7. Apoyos elásticos	470
6.8. Miembros no prismáticos	472
6.9. Discontinuidades en los miembros	476
6.10. Conexiones elásticas	480
6.11. Deformaciones por cortante	481
6.12. Interacción axial-flexión	483

CAP.	Pág.
REFERENCIAS GENERALES SOBRE METODOS MATRICIALES EN ANALISIS ESTRUCTURAL	486
Apéndice A. DESPLAZAMIENTOS DE ESTRUCTURAS ...	489
A.1. Esfuerzos y deformaciones en barras ...	489
A.2. Método de la carga unitaria	499
A.3. Desplazamientos de vigas	509
Apéndice B. ACCIONES DE EXTREMO PARA MIEMBROS RESTRINGIDOS	511
Apéndice C. PROPIEDADES DE SECCIONES	519
RESPUESTAS A PROBLEMAS	521
INDICE	531

CAPITULO 1

CONCEPTOS ELEMENTALES DEL ANALISIS ESTRUCTURAL

1.1. Introducción. Los métodos de la flexibilidad y la rigidez para el análisis estructural son el tema principal de este libro. Son los métodos fundamentales disponibles para el analista estructural y son aplicables a estructuras de todos tipos. Sin embargo, sólo se discutirán en este libro (como se describe en el siguiente artículo) las estructuras reticulares.

Antes de empezar la discusión de los métodos de la flexibilidad y la rigidez, consideraremos varios temas preliminares. Estos temas incluyen una descripción de los tipos de estructura en estudio y discusiones de varios conceptos, tales como acciones, desplazamientos, indeterminación estática, indeterminación cinemática, flexibilidades y rigideces.

1.2. Tipos de estructuras reticulares. Todas las estructuras que se analizan en capítulos posteriores se llaman *estructuras reticulares* y pueden dividirse en seis categorías: vigas, armaduras planas, armaduras en el espacio, marcos planos, parrillas y marcos en el espacio. Estos tipos de estructuras se ilustran en la Fig. 1-1 y posteriormente se describen en detalle. Estas categorías fueron escogidas debido a que cada una representa una clase de estructura con características especiales. Aún más, como los principios básicos de los métodos de la flexibilidad y la rigidez son los mismos para todos los tipos de estructuras, los análisis de estas seis categorías son lo suficientemente diferentes en detalles que garantizan las discusiones separadas de ellas.

Cada estructura reticular está formada de miembros que son largos en comparación con las dimensiones de su sección transversal. Los *nudos* de una estructura reticular son puntos de intersección de los miembros, así como puntos de apoyo de los miembros de extremos libres. Ejemplos de nudos son los puntos A, B, C y D de las Figs. 1-1a y 1-1d. Los apoyos pueden estar *empotrados* o fijos, como el soporte A en la viga de la Fig. 1-1a, o *articulados*, como se muestra en el soporte A en el marco plano de la Fig. 1-1d, o pueden ser *apoyos*

deslizantes, ilustrados por los apoyos B y C de la Fig. 1-1a. En casos especiales las conexiones entre miembros o entre miembros y apoyos pueden ser elásticas (o semirrígidas). Sin embargo, la discusión de esta posibilidad se hará posteriormente (véanse los Arts. 6.7 y 6.10). Las cargas en una estructura reticular pueden ser fuerzas concentradas, cargas distribuidas o pares.

Consideremos ahora la característica principal de cada tipo de estructura mostrada en la Fig. 1-1. Una viga (Fig. 1-1a) está formada por un miembro recto que tiene uno o más puntos de apoyo, tales como los puntos A, B y C. Las fuerzas que se aplican a una viga se supone que actúan en un plano que contiene un eje de simetría de la sección transversal de la viga (un eje de simetría es también un eje principal de la sección transversal). Aún más, todos los pares exteriores que actúan sobre la viga tienen su vector de momento normales a este plano, y la viga se deforma en el mismo plano (el plano de flexión) y no sufre torsión. (El caso de una viga que no satisface este criterio se discute en el Art. 3-11). En cualquier sección de la viga pueden existir esfuerzos internos y, en el caso general, pueden incluir una fuerza axial, una fuerza cortante y un par de flexión.

Una armadura plana (Fig. 1-1b) se idealiza como un sistema de miembros en un plano e interconectados en juntas articuladas. Todas las fuerzas aplicadas se consideran actuando en el plano de la estructura, y todos los pares externos tienen sus vectores de momentos normales al plano, justo como en el caso de la viga. Las cargas pueden consistir de fuerzas concentradas aplicadas en los nudos, así como cargas que actúan en los propios miembros. Para propósitos de análisis, las últimas cargas pueden reemplazarse por cargas estáticamente equivalentes que actúan en las articulaciones. Luego, el análisis de una armadura sujeta únicamente a cargas en los nudos dará como resultado fuerzas axiales de tensión o de compresión en los miembros. Además de estas fuerzas axiales, existirán momentos flexionantes y fuerzas cortantes en aquellos miembros que tienen cargas que actúan directamente sobre ellos. La determinación de tales esfuerzos resultantes constituye el análisis completo de las fuerzas que actúan en los miembros de una armadura.

Una armadura en el espacio (véase la Fig. 1-1c) es similar a una armadura plana, excepto que los miembros pueden tener cualquier dirección en el espacio. Las fuerzas que actúan en una armadura en el espacio pueden tener direcciones arbitrarias, pero cualquier par que actúa en un miembro debe tener su vector de momento perpendicular al eje del miembro. La razón de este requerimiento es que

un miembro de una armadura es incapaz de soportar un momento torsionante.

Un marco en el plano (Fig. 1-1d) está compuesto de miembros en un solo plano y que tienen su eje de simetría en el mismo (como es el caso de una viga). Los nudos entre los miembros (tales como los nudos B y C) son conexiones rígidas. Las fuerzas que actúan en un marco y los desplazamientos del marco están en el mismo plano de la estructura; todos los pares que actúan en el marco tienen sus vectores de momento normales al plano. Los esfuerzos internos resultantes que actúan en cualquier sección de un miembro de un marco plano pueden consistir, en general, de un par de flexión, una fuerza cortante y una fuerza axial.

Una parrilla es una estructura plana compuesta de miembros continuos que se intersectan o se cruzan (véase la Fig. 1-1e). En el último caso, las conexiones entre miembros se consideran a menudo como articuladas, en tanto que en el primer caso las conexiones se consideran rígidas. En tanto que en un marco plano las fuerzas aplicadas caen todas en el plano de la estructura, en el caso de una parrilla todas las fuerzas son normales al plano de la estructura y todos los pares tienen sus vectores en el plano de la parrilla. Esta orientación de la carga puede dar como resultado torsión así como flexión en algunos de los miembros. Se considera que cada miembro tiene dos ejes de simetría en su sección transversal, de modo que la flexión y la torsión toman lugar independientemente una de la otra (véase el Art. 3.11 para una discusión de los miembros asimétricos).

El último tipo de estructura es un marco en el espacio (Fig. 1-1f). Los marcos en el espacio son el tipo más general de estructura reticular, tanto que no hay restricciones en la posición de los nudos, direcciones de los miembros o direcciones de las cargas. Los miembros individuales de un marco en el espacio pueden soportar fuerzas axiales internas, pares torsionantes, pares flexionantes en las dos direcciones principales de la sección transversal, y fuerzas cortantes en las dos direcciones principales. Se considera que los miembros tienen dos ejes de simetría en la sección transversal, como se explicó anteriormente para la parrilla.

Se supone a lo largo de la mayoría de las discusiones subsecuentes que las estructuras consideradas tienen miembros prismáticos, esto es, cada miembro tiene un eje recto y una sección transversal constante en toda su longitud. Los miembros no prismáticos se tratan posteriormente mediante una modificación del acercamiento básico (véase el Art. 6.8).

1.3. Deformaciones y desplazamientos. Cuando una estructura está bajo la acción de fuerzas, los miembros de ella sufren deformaciones

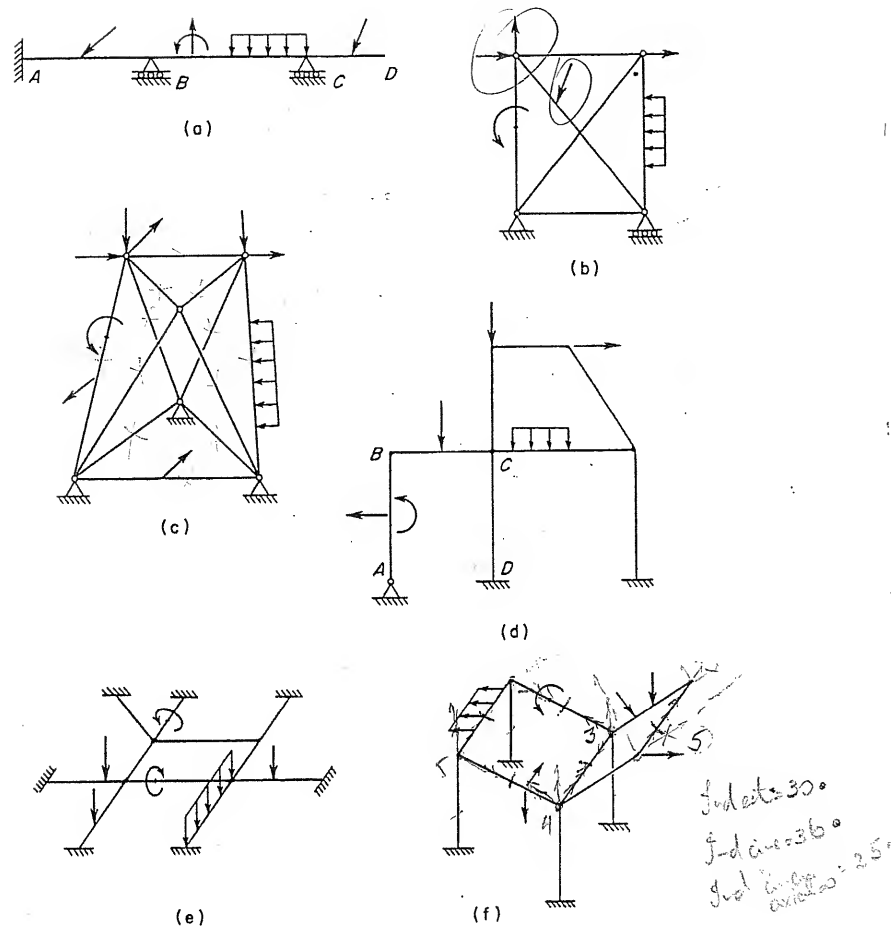


FIG. 1-1. Tipos de estructuras reticulares: (a) viga, (b) armadura plana, (c) armadura en el espacio, (d) marco plano, (e) parrilla y (f) marco en el espacio

(o pequeños cambios en su forma) y, como consecuencia, puntos dentro de la estructura se desplazarán hacia nuevas posiciones. En general, todos los puntos de la estructura, excepto puntos de apoyo inmóviles, sufrirán dichos desplazamientos. El cálculo de estos desplazamientos es una parte esencial del análisis estructural, como se verá posteriormente en las discusiones de los métodos de la flexibilidad y de la rigidez. Sin embargo, antes de considerar los desplazamientos, es necesario primero comprender las deformaciones que producen los desplazamientos.

Para comenzar la discusión, consideremos un segmento de longitud arbitraria cortado de un miembro de una estructura reticular,

como se muestra en la Fig. 1-2a. Por simplicidad se considera que la barra tiene una sección transversal circular. En cualquier sección transversal, tal como el extremo de la derecha del segmento, habrán resultantes de esfuerzo que en el caso general están formadas por tres fuerzas y tres pares. Las fuerzas son la fuerza axial N_x y las fuerzas cortantes V_y y V_z ; los pares son el par torsionante T , y los pares flexionantes M_y y M_z . Nótese que los vectores de momentos se muestran en la figura con flechas con cabeza doble, para distinguirlos de los vectores de fuerza. Las deformaciones de la barra pueden analizarse tomando separadamente cada resultante de esfuerzo y determinando su efecto sobre un elemento de la barra. El elemento se obtiene aislando una porción de la barra entre dos secciones transversales separándolas una pequeña distancia dx (véase la Fig. 1-2a).

El efecto de la fuerza axial N_x sobre el elemento se muestra en la Fig. 1-2b. Suponiendo que la fuerza actúa en el centroide del área de la sección transversal, se encuentra que el elemento se deforma uniformemente, y las deformaciones significativas del elemento son deformaciones normales a la dirección x . En el caso de una fuerza cortante (Fig. 1-2c) una sección transversal de la barra se desplaza lateralmente con respecto a la otra. También pueden existir distorsiones de las secciones transversales, pero éstas tienen un efecto despreciable en la determinación de los desplazamientos y se pueden ignorar. Un par flexionante (Fig. 1-2d) causa una rotación relativa de las dos secciones transversales provocando que ya no queden paralelas una a la otra. Las deformaciones resultantes en el elemento son la dirección longitudinal de la barra, y consisten de una contracción en el lado de compresión y una extensión en el lado de la tensión. Finalmente, el par torsionante T causa una rotación relativa de las dos secciones transversales alrededor del eje x (véase la Fig. 1-2e) y, por ejemplo, el punto A se desplaza a A'. En el caso de una barra circular, la torsión produce sólo deformaciones de cortante y las secciones transversales permanecen planas. Para otras formas de las secciones transversales sí ocurrirán distorsiones en ellas.

Las deformaciones mostradas en las Figs. 1-2b, 1-2c, 1-2d y 1-2e se llaman deformaciones axial, de cortante, de flexión y de torsión, respectivamente. Su evaluación depende de la forma de la sección transversal de la barra y de las propiedades mecánicas del material. Este libro trata únicamente de materiales que son elásticos, esto es, materiales que siguen la ley de Hooke. Como referencia para estos materiales, en el Apéndice A, Art. A.1, se dan las diferentes fórmulas para las deformaciones, así como para los esfuerzos y deformaciones unitarias en el elemento.

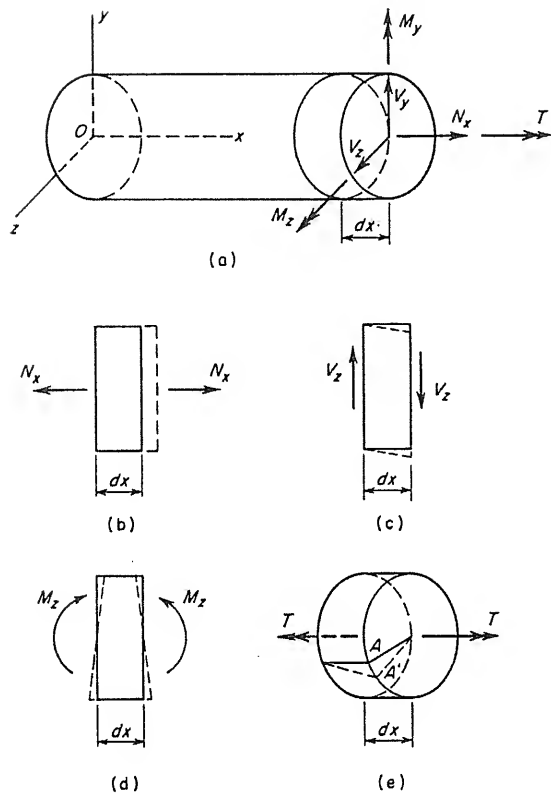


FIG. 1-2. Tipos de deformaciones: (b) axial, (c) de cortante, (d) de flexión y (e) de torsión

Los *desplazamientos* en una estructura están causados por los efectos acumulados de las deformaciones de todos los elementos. Hay varios modos de calcular estos desplazamientos en las estructuras reticulares, dependiendo del tipo de formación en consideración así como del tipo de estructura. Por ejemplo, las deflexiones de las vigas en que se consideren únicamente deformaciones por flexión pueden encontrarse por integración directa de la ecuación diferencial para flexión de una viga. Otro método, que puede utilizarse en todos los tipos de estructuras reticulares incluyendo vigas, armaduras, parrillas y marcos, es el método de la carga unitaria. En ambos de estos métodos, así como otros de uso común, se supone que los desplazamientos de la estructura son pequeños. Para propósitos de repaso y referencia conveniente en el libro a seguir, se da una breve discusión del cálculo de desplazamientos por el método

de la carga unitaria en el Art. A.2 del Apéndice A. Además, en el Art. A.3 se da una tabla de desplazamientos para vigas para diferentes y comunes condiciones de carga. El lector debe estar familiarizado con este material para poder resolver los ejemplos y problemas que aparecerán después.

En cualquier estructura particular bajo investigación, no todos los tipos de deformaciones serán significantes en el cálculo de los desplazamientos. Por ejemplo, en vigas generalmente las únicas deformaciones importantes son las debidas a la flexión, y es usual ignorar las deformaciones axiales. Por supuesto, hay situaciones excepcionales en las que se requiere que las vigas soporten grandes cargas axiales, y bajo dichas circunstancias la deformación axial debe incluirse en el análisis. También es posible que las fuerzas axiales produzcan una acción de viga-columna la que tiene un efecto no lineal en los desplazamientos (véase el Art. 6.12).

Para armaduras de los tipos mostrados en las Figs. 1-1b y 1-1c, el análisis se efectúa en dos partes. Si los nudos de la armadura se idealizan como articulaciones y si todas las cargas actúan únicamente en los nudos, entonces el análisis involucra únicamente deformaciones axiales de los miembros. La segunda parte del análisis es para los efectos de las cargas que actúan sobre los miembros entre los nudos, y esta parte es esencialmente el análisis de vigas libremente apoyadas. Si los nudos de una estructura tipo armadura son realmente rígidos, entonces los miembros sufren flexión aunque todas las cargas actúen en los nudos. En tal caso, las deformaciones por flexión pueden llegar a ser importantes, y en este caso la estructura puede analizarse como un marco plano o uno en el espacio.

En marcos planos (véase la Fig. 1-1d) las deformaciones significativas son por flexión y axiales. Si los miembros son esbeltos y no están triangulados en forma de armadura, las deformaciones de flexión son mucho más importantes que las axiales. Sin embargo, las contribuciones axiales deben incluirse en el análisis de un marco plano si existe alguna duda acerca de su importancia relativa.

En estructuras de parrilla (Fig. 1-1e) las deformaciones por flexión siempre son importantes, pero las propiedades de las secciones transversales de los miembros y el método de fabricar los nudos determinan si se deben o no tomar en consideración las deformaciones por torsión. Si los miembros son secciones abiertas de poco espesor, tales como vigas I, es probable que sean muy flexibles a la torsión y, por lo tanto, que en los miembros no se desarrollen momentos torsionantes. También, si los miembros de una parrilla no están conectados rigidamente en puntos de intersección, no existirá interacción entre los momentos flexionantes y torsionantes. En cualquiera

de estos casos, sólo se necesita tomar en consideración las deformaciones producidas por flexión. Por otra parte, si los miembros de una parrilla son rígidos a la torsión y están rígidamente conectados en los puntos de intersección, el análisis debe incluir deformaciones por torsión y por flexión. Normalmente, no existen fuerzas axiales en una parrilla debido a que las fuerzas son normales al plano de ella. Esta situación es análoga a la de la viga que tiene sus cargas perpendiculares al eje, en cuyo caso no soporta fuerzas axiales. Por lo tanto, las deformaciones axiales no se incluyen en un análisis de una parrilla.

Los marcos en el espacio (Fig. 1-1f) representan el tipo más general de estructura reticular, tanto respecto a la geometría como respecto a las cargas. Por lo tanto, se sigue que las deformaciones axial, por flexión y por torsión pueden entrar todas en el análisis de un marco en el espacio, dependiendo de la estructura y de las cargas.

Las deformaciones producidas por el cortante a menudo son muy pequeñas en las estructuras reticulares y, por lo tanto, rara vez se consideran en el análisis. Sin embargo, sus efectos pueden incluirse si fuera necesario en el análisis de una viga, marco plano, parrilla o marco en el espacio (véanse los Arts. 3.4 y 6.11).

Existen otros efectos, tales como cambios en la temperatura y deformaciones previas, que pueden ser de importancia al analizar una estructura. Estos temas se discuten en capítulos posteriores junto con los métodos de análisis de la flexibilidad y de la rigidez.

1.4. Acciones y desplazamientos. Los términos “acción” y “desplazamiento” se utilizan para describir ciertos conceptos fundamentales en el análisis de estructuras. Una *acción* (llamada algunas veces una fuerza generalizada) es llamada más comúnmente fuerza o par. Sin embargo, una acción también puede ser una combinación de fuerzas y pares, una carga distribuida o una combinación de estas acciones. En tales casos combinados, sin embargo, es necesario que todas las fuerzas, pares y cargas distribuidas estén relacionadas una a otra de alguna manera definida, de modo que la combinación entera pueda denotarse por un solo símbolo. Por ejemplo, si la carga en la viga simplemente apoyada AB mostrada en la Fig. 1-3 consiste de dos fuerzas iguales P , es posible considerar la combinación de las dos cargas como una acción sola y denotarla por un solo símbolo, tal como F . También es posible pensar en la combinación de las dos cargas más las dos reacciones R_A y R_B en los apoyos como una sola acción, puesto que las cuatro fuerzas tienen una relación única la una con la otra. En una situación más generalizada, es posible, para un sistema de cargas muy complicado que actúe sobre una estructura, que se le trate como una sola acción si todas las compo-

nentes de la carga están relacionadas la una a la otra en una manera definida.

Además de las acciones externas a la estructura, es necesario tratar también con acciones internas. Estas acciones son las resultantes de las distribuciones de esfuerzos internos, e incluyen momentos flexionantes, fuerzas cortantes, fuerzas axiales y pares torsionantes. Dependiendo del tipo de análisis en particular, tales acciones pueden aparecer como una fuerza, un par, dos fuerzas o dos pares. Por ejem-

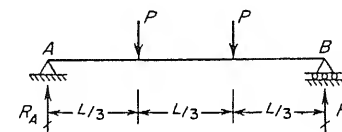


FIG. 1-3

plo, al efectuar análisis del equilibrio estático de las estructuras estas acciones aparecen normalmente como fuerzas y pares solos, como se ilustra en la Fig. 1-4a. La viga en voladizo mostrada en la figura está sujeta en el extremo B a cargas en la forma de acciones P_1 y M_1 . En el extremo fijo A la fuerza reactiva y el par reactivo se denominan R_A y M_A , respectivamente. Para poder distinguir estas reacciones de las cargas sobre la estructura, las reacciones están dibujadas con una línea que corta la flecha. Esta convención para identificar reacciones será seguida en todo el libro (véase también la Fig. 1-3 para una ilustración del uso de la convención).^{*} Al calcular la fuerza axial N , el momento flexionante M , y la fuerza cortante V en cualquier sección de la viga en la Fig. 1-4a, tal como el punto medio, es necesario considerar el equilibrio estático de una porción de la viga. Una posibilidad es construir un diagrama de cuerpo libre de la mitad del lado derecho de la viga, como se muestra en la Fig. 1-4b. Si así se hace es evidente que cada una de las acciones internas aparece en el diagrama como una fuerza o un par.

Existen situaciones, sin embargo, en las que las acciones internas aparecen como dos fuerzas o pares. Este caso ocurre con mucha frecuencia en el análisis estructural cuando se “suelta” algún punto de la estructura, como se muestra en la Fig. 1-5 para una viga continua. Si se suelta el momento flexionante (o se elimina) en el nudo B de la viga, el resultado es el mismo que si colocásemos una articulación en ese nudo (véase la Fig. 1-5b). Por lo tanto, para tomar en consideración el momento flexionante M_B en la viga, éste se debe considerar

^{*} Esta convención se utiliza en el conocido libro escrito por C. H. Norris y J. B. Wilbur, *Elementary Structural Analysis*, 2a. Ed., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1960, Pág. 631.

como estar formado por dos pares iguales, de sentido opuesto, M_B , que actúan en las porciones del lado derecho así como del lado izquierdo con la articulación, como se muestra en la Fig. 1-5c. En esta ilustración el momento M_B se considera positivo de acuerdo con las direcciones que tiene en la figura, esto es, que el par que actúa en la porción izquierda de la viga es de sentido opuesto al de las manecillas del reloj y el par que actúa en el lado derecho de la viga tiene el sentido de las manecillas del reloj. Por lo tanto, para fines de analizar la viga de la Fig. 1-5c, el momento flexionante en el punto B puede tratarse como una sola acción formada por dos pares. Se encuentran situaciones similares con las fuerzas axiales, cortantes y con pares flexionantes, según se ilustra posteriormente en la discusión del método de análisis de la flexibilidad.

Un segundo concepto básico es el de *desplazamiento*, que generalmente es una traslación o rotación en algún punto de una estructura. Una traslación se refiere a la distancia recorrida por un punto de una estructura, y una rotación significa el ángulo de rotación de la tangente a la curva elástica en un punto. Por ejemplo, en la viga voladiza de la Fig. 1-4c, la traslación Δ del extremo de la viga y la rotación θ del extremo se consideran las dos como desplazamientos. Aún más, como en el caso de una acción, un desplazamiento también puede considerarse en sentido general como una combinación

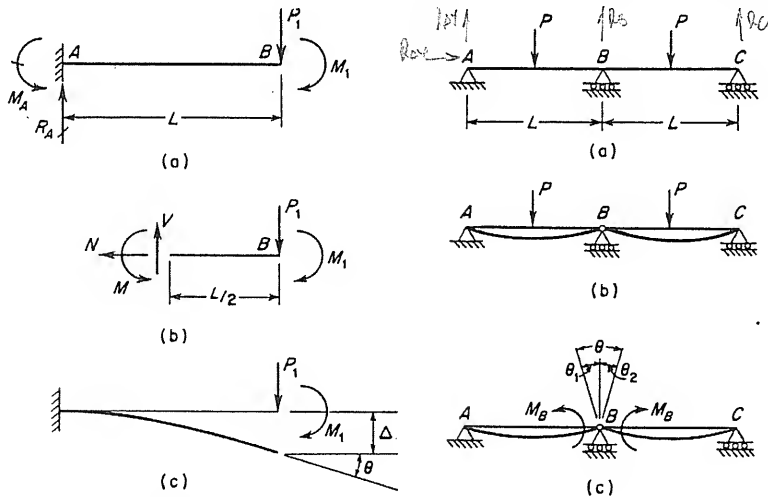


FIG. 1-4

FIG. 1-5

de traslaciones y rotaciones. Como un ejemplo, consideremos las rotaciones de la articulación en el punto B en la viga de dos claros de la Fig. 1-5c. La rotación del extremo derecho del miembro AB se deno-

mina θ_1 , en tanto que la rotación del extremo izquierdo del miembro BC se denomina θ_2 . Cada una de estas rotaciones está considerada como un desplazamiento. Aún más, la suma de las dos rotaciones, denominada Θ , es también un desplazamiento. El ángulo Θ puede considerarse como la rotación relativa en el punto B entre los extremos de los miembros AB y BC.

Otro ejemplo de desplazamientos es el mostrado en la Fig. 1-6, en donde un marco plano está sujeto a varias cargas. Las traslaciones horizontales Δ_A , Δ_B y Δ_C de los nudos A, B y C, respectivamente, son desplazamientos, como también lo son las rotaciones Θ_A , Θ_B y Θ_C de estos nudos. Los desplazamientos de nudos de estos tipos juegan un papel importante en el análisis de estructuras reticulares.

Frecuentemente es necesario en el análisis estructural tratar con acciones y desplazamientos que se *corresponden* unas a los otros. Se dice que las acciones y los desplazamientos se corresponden cuando son de un tipo análogo y están localizados en el mismo punto de una estructura. Por lo tanto, el desplazamiento correspondiente a una fuerza concentrada es una traslación de la estructura en el punto en donde la fuerza actúa, aunque el desplazamiento no necesariamente es causado por la fuerza. Aún más, el desplazamiento correspondiente debe tomarse a lo largo de la línea de acción de la fuerza y debe tener la misma dirección que ella. En el caso de un par, el despla-

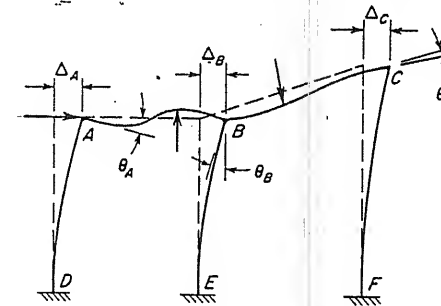


FIG. 1-6

amiento correspondiente es una rotación en el punto donde el par está aplicado y se toma positivo cuando tiene el mismo sentido que el par. Como un ejemplo, consideremos de nuevo la viga en voladizo mostrada en la Fig. 1-4a. La acción P_1 es una fuerza concentrada que actúa hacia abajo en el extremo de la viga, y la traslación hacia abajo Δ en el extremo de la viga (véase la Fig. 1-4c) es el desplazamiento que corresponde a esta acción. Similarmente, el par M_1 y la rotación θ son una acción y desplazamiento correspondientes. Debe notarse, sin embargo, que el desplazamiento Δ correspondiente a la

carga P_1 no está causado únicamente por la fuerza P_1 , ni el desplazamiento θ correspondiente a M_1 está causado únicamente por M_1 . Por el contrario, en este ejemplo, tanto Δ como θ son desplazamientos debidos a la acción simultánea de P_1 y M_1 sobre la viga. En general, si se da una acción particular, el concepto de un desplazamiento correspondiente se refiere únicamente a la definición de desplazamiento, sin tomar en consideración la causa real de éste. Igualmente, si se da un desplazamiento, el concepto de una acción correspondiente describirá una clase particular de acción sobre la estructura, pero no es necesario que el desplazamiento sea causado por dicha acción.

Como otro ejemplo de acciones y desplazamientos correspondientes, refiramos las acciones mostradas en la Fig. 1-5c. La viga de la figura tiene una articulación en el apoyo medio y está bajo la acción de dos pares M_B , que se consideran como una sola acción. El desplazamiento correspondiente a la acción M_B consiste en general, de la suma de las rotaciones en el sentido opuesto a las manecillas del reloj θ_1 en la viga del lado izquierdo y de la rotación con sentido de las manecillas del reloj θ_2 de la viga del lado derecho. Por lo tanto, el ángulo θ (igual a la suma de θ_1 y θ_2) es el desplazamiento correspondiente a la acción M_B . Este desplazamiento es la rotación relativa entre las dos vigas en la articulación y tiene el mismo sentido positivo que M_B . Este desplazamiento puede encontrarse con la ayuda de la tabla para desplazamientos de viga, dada en el Apéndice A (véase la Tabla A-3, Caso 5), y es igual a

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{M_B L}{3EI} + \frac{M_B L}{3EI} = \frac{2M_B L}{3EI}$$

en donde L es la longitud de cada claro y EI es la rigidez a la flexión de la viga.

Existen otras situaciones, sin embargo, en donde es necesario tratar con un desplazamiento que corresponda a una acción particular pero causado por cualquier otra acción. Como un ejemplo, consideremos la viga de la Fig. 1-5b, que es la misma viga que la de la Fig. 1-5c, excepto que está sujeta a dos fuerzas P en vez de los pares M_B . En esta viga el desplazamiento correspondiente a M_B es la rotación relativa en el nudo B entre las dos vigas, positivo en el mismo sentido que M_B , pero debido únicamente a las cargas P . Utilizando de nuevo la tabla de desplazamientos (Tabla A-3, Caso 2), y suponiendo también que las fuerzas P actúan en los centros del claro de los miembros, se encuentra que el desplazamiento θ correspondiente a M_B y causado por las cargas P es

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{PL^2}{16EI} = \frac{PL^2}{8EI}$$

El concepto de correspondencia entre acciones y desplazamientos se hará más familiar al lector a medida que se encuentren ejemplos adicionales en el resto del libro. También debe notarse que el concepto puede extenderse hasta incluir acciones distribuidas, así como combinaciones de acciones de todos los tipos. Sin embargo, estas ideas más generales no tienen utilidad particular en nuestro trabajo a seguir.

Para simplificar la notación para acciones y desplazamientos, es deseable en muchos casos utilizar el símbolo A para las acciones, incluyendo tanto fuerzas concentradas como pares, y el símbolo D para los desplazamientos, incluyendo translaciones y rotaciones. Se pueden utilizar subíndices para distinguir entre las diferentes acciones y desplazamientos que puedan ser de interés en un análisis en particular. El uso de este tipo de notación se muestra en la Fig. 1-7, en la que se tiene una viga en voladizo sujeta a las acciones A_1 , A_2 y A_3 . El desplazamiento correspondiente a A_1 y debido a todas las cargas que actúan simultáneamente se denomina D_1 en la Fig. 1-7a; igualmente, los desplazamientos correspondientes a A_2 y A_3 se denominan D_2 y D_3 .

Consideremos ahora la viga en voladizo sujeta a la acción A_1 únicamente (véase la Fig. 1-7b). El desplazamiento correspondiente a A_1 en esta viga se denomina D_{11} . El significado de los dos subíndices es el que sigue. El primero indica que el desplazamiento corresponde a la acción A_1 , y el segundo indica que la causa del desplazamiento es la acción A_1 . De modo similar, el desplazamiento correspondiente a A_2 en esta viga se denomina D_{21} , en donde el primer subíndice significa que el desplazamiento corresponde a A_2 y el segundo significa que es causado por A_1 . En la Fig. 1-7b también se muestra el desplazamiento D_{31} correspondiente al par A_3 .

Los desplazamientos causados por la acción A_2 únicamente se muestran en la Fig. 1-7c, y aquellos causados por A_3 están mostrados en la Fig. 1-7d. En cada caso los subíndices para los símbolos de desplazamiento siguen la regla general de que el primer subíndice identifica el desplazamiento y el segundo da la causa de él. En general, la causa puede ser una fuerza, un par o todo un sistema de cargas. A menos que se especifique lo contrario, esta convención de subíndices se utilizará siempre en discusiones posteriores.

Para las vigas de la Fig. 1-7 no es difícil determinar los diferentes desplazamientos (véase el Apéndice A para métodos del cálculo de desplazamientos de vigas). Suponiendo que la viga tiene una rigidez a la flexión EI y una longitud L , se encuentra que los desplazamientos para la viga de la Fig. 1-7b son

$$D_{11} = \frac{A_1 L^3}{24EI} \quad D_{21} = \frac{5A_1 L^3}{48EI} \quad D_{31} = \frac{A_1 L^2}{8EI}$$

De modo similar se pueden encontrar los seis desplazamientos restantes de las Figs. 1-7c y d (D_{12} , D_{22} , ..., D_{33}). Luego los despla-

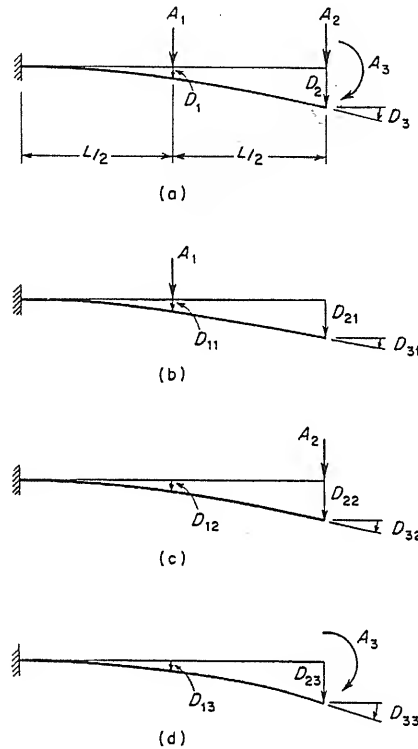


FIG. 1-7

mientos de la viga sometida a la acción simultánea de todas las cargas (véase la Fig. 1-7a) se determinan por sumas;

$$D_1 = D_{11} + D_{12} + D_{13}$$

$$D_2 = D_{21} + D_{22} + D_{23}$$

$$D_3 = D_{31} + D_{32} + D_{33}$$

Estas sumas son expresiones del principio de superposición, el que se discute con más detalle en el Art. 1-9.

1.5. Equilibrio. Uno de los objetivos de cualquier análisis estructural es determinar varias acciones pertenecientes a la estructura,

tales como las reacciones en los apoyos y los esfuerzos internos resultantes (momento flexionante, fuerza cortante, etc.). Una solución correcta para cualquiera de estas cantidades debe satisfacer todas las condiciones de equilibrio estático, no sólo para toda la estructura, sino también para cualquier parte de ella tomada como un cuerpo libre.

Consideremos ahora cualquier cuerpo libre sujeto a diferentes acciones. La resultante de todas las acciones puede ser una fuerza, un par o ambos. Si el cuerpo libre está en equilibrio estático, la resultante desaparece; esto es, el vector fuerza resultante y el vector momento resultante son ambos cero. Un vector en un espacio tridimensional siempre puede descomponerse en tres componentes, en tres direcciones ortogonales, tales como las direcciones x , y y z . Si el vector fuerza resultante es igual a cero, también sus componentes deben ser igual a cero y, por lo tanto, se pueden obtener las siguientes ecuaciones de equilibrio estático:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (1-1a)$$

En estas ecuaciones las expresiones $\sum F_x$, $\sum F_y$ y $\sum F_z$ son las sumas algebraicas de las componentes en x , y y z , respectivamente, de todos los vectores de fuerza que actúan en el cuerpo libre. Igualmente, si el vector momento resultante es igual a cero, las ecuaciones de momento del equilibrio estático son

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (1-1b)$$

en donde $\sum M_x$, $\sum M_y$ y $\sum M_z$ son las sumas algebraicas de los momentos respecto a los ejes x , y y z , respectivamente, de todos los pares y fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre. Las seis relaciones de la Ec. (1-1) representan las ecuaciones de equilibrio estático para acciones en tres dimensiones. Pueden aplicarse a cualquier cuerpo libre, tal como toda una estructura, una porción de ella, un miembro solo, o un nudo de una estructura.

Cuando todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo libre están en un plano y todos los pares tienen sus vectores normales a ese plano, sólo son útiles tres de las seis ecuaciones de equilibrio. Suponiendo que las fuerzas están en el plano $x-y$, es obvio que las ecuaciones $\sum F_z = 0$, $\sum M_x = 0$ y $\sum M_y = 0$ se satisfacen automáticamente. Las ecuaciones restantes son

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (1-2)$$

y estas ecuaciones son las condiciones de equilibrio estático para acciones en el plano $x-y$.

En el método de análisis de la rigidez, las ecuaciones básicas que se tienen que resolver son aquellas que expresan las condiciones de

equilibrio en los nudos de la estructura, tal como se describe posteriormente en el Cap. 2.

1.6. Compatibilidad. Además de las condiciones de equilibrio estático, es necesario, en cualquier análisis de estructuras, que se satisfagan todas las condiciones de compatibilidad. Estas condiciones se refieren a la continuidad de los desplazamientos a lo largo de toda la estructura, y en algunas ocasiones se les llama condiciones de geometría. Como un ejemplo, las ecuaciones de compatibilidad deben estar satisfechas en todos los puntos de apoyo, en donde es necesario que los desplazamientos de la estructura sean consistentes con las condiciones de apoyo. Por ejemplo, en un apoyo fijo no puede haber rotación del eje del miembro.

Las ecuaciones de compatibilidad también deben satisfacerse en todos los puntos de todo el interior de la estructura. Usualmente, son las condiciones de compatibilidad en los nudos de la estructura las que son de interés para nosotros. Por ejemplo, en una conexión rígida entre dos miembros los desplazamientos (traslaciones y rotaciones) deben ser los mismos en los dos miembros.

En el método de análisis de la flexibilidad las ecuaciones básicas que deben resolverse son ecuaciones que expresan la compatibilidad de los desplazamientos, según se describe en el Cap. 2.

1.7. Indeterminación estática y cinemática. Hay dos tipos de indeterminación que deben ser considerados en el análisis estructural, dependiendo de si el interés recae en las acciones o en los desplazamientos. Cuando las acciones son las incógnitas en el análisis, como sucede en el método de la flexibilidad, se debe tomar en consideración la indeterminación estática. En este caso, la indeterminación se refiere a un exceso de acciones desconocidas comparadas con el número de ecuaciones de equilibrio estáticas disponibles. Las ecuaciones de equilibrio, al aplicarse a toda la estructura y a sus diferentes partes, pueden ser utilizadas para el cálculo de reacciones y esfuerzos internos resultantes. Si estas ecuaciones son suficientes para encontrar todas las acciones, tanto exteriores como interiores, la estructura es estáticamente determinada. Si hay más acciones desconocidas que ecuaciones, la estructura es estáticamente indeterminada. La viga libremente apoyada mostrada en la Fig. 1-3 y la viga en voladizo de la Fig. 1-4 son ejemplos de estructuras estáticamente determinadas, ya que en ambos casos todas las reacciones y esfuerzos resultantes pueden encontrarse a partir de las ecuaciones de equilibrio. Por otra parte, la viga continua de la Fig. 1-5a es estáticamente indeterminada.

El exceso de acciones desconocidas que no pueden encontrarse por medio del equilibrio estático se conocen como redundantes estáticas, y el número de tales redundantes representa el grado de indeterminación estática de la estructura. Así, la viga de dos claros de la Fig. 1-5a es estáticamente indeterminada de primer grado, ya que sólo existe una acción redundante. Por ejemplo, se puede ver que es imposible calcular todas las reacciones de la viga mediante el puro equilibrio estático. Sin embargo, después de obtener el valor de una reacción (por un medio o por otro), las reacciones restantes y todos los esfuerzos internos resultantes pueden encontrarse por medio de la estática.

Otros ejemplos de estructuras estáticamente indeterminadas se muestran en la Fig. 1-8. La viga en voladizo apoyada en un extremo mostrada en la Fig. 1-8a es estáticamente indeterminada de primer grado, ya que hay cuatro reacciones (H_A , M_A , R_A y R_B) en tanto que sólo se tienen disponibles tres ecuaciones de equilibrio para el cálculo de reacciones (véanse las Ecs. 1-2).

La viga doblemente empotrada de la Fig. 1-8b es estáticamente indeterminada de tercer grado, debido a que deben determinarse seis reacciones en el caso general. En el caso especial en que todas las fuerzas concentradas de la viga doblemente empotrada actúen en una dirección perpendicular al eje de la viga, no existirán fuerzas axiales en los extremos de ella. En dicho caso la viga puede analizarse como si fuese estáticamente indeterminada de segundo grado.

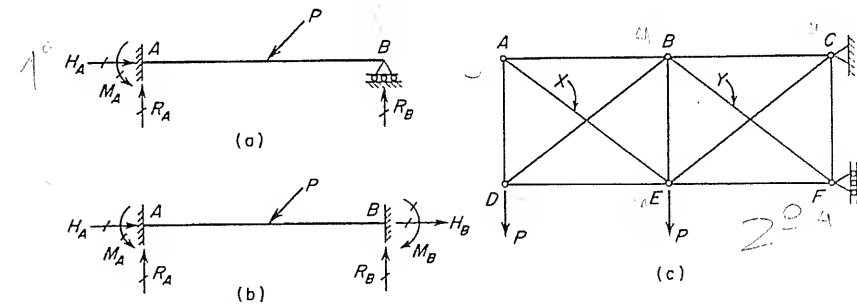


FIG. 1-8. Ejemplos de estructuras estáticamente indeterminadas

La armadura plana de la Fig. 1-8c es estáticamente indeterminada de segundo grado. Puede llegarse a esta conclusión cortando dos barras, tales como la X y Y, soltando de este modo las fuerzas de esas barras. La armadura con las barras cortadas se vuelve estáticamente determinada, ya que todas las reacciones y fuerzas de barra pueden encontrarse mediante una aplicación directa de ecuaciones de equilibrio. Cada barra que se corta representa una acción, a saber,

la fuerza en la barra, que se quita de la armadura. El número de acciones que deben soltarse para reducir la estructura estáticamente indeterminada a una estructura determinada debe ser igual al grado de indeterminación. Este método de obtener el grado de indeterminación estática es bastante general y puede utilizarse con muchos tipos de estructuras.

Como otro ejemplo de este método para determinar el grado de indeterminación de una estructura, consideremos el marco plano mostrado en la Fig. 1-6. El objetivo es efectuar cortes en el marco hasta que la estructura quede estáticamente determinada. Si se cortan las barras AB y BC, la estructura que queda está formada por tres porciones en voladizo (los apoyos de los voladizos están en D, E y F), cada uno de los cuales es estáticamente determinado. Cada barra que se corta representa la eliminación de tres acciones (fuerza axial, fuerza cortante, y momento flexionante) de la estructura original. Debido a que se eliminaron seis acciones en total, el grado de indeterminación del marco es seis.

Se puede hacer también una distinción entre las indeterminaciones interiores y exteriores. La indeterminación externa se refiere al cálculo de las reacciones de la estructura. Normalmente, se tienen seis ecuaciones de equilibrio disponibles para la determinación de las reacciones en una estructura en el espacio, y tres para una estructura plana. Por lo tanto, una estructura en el espacio con más de seis acciones reactivas, y una estructura plana con más de tres reacciones, usualmente serán indeterminadas exteriormente. En la Fig. 1-8 se pueden ver ejemplos de indeterminación exterior. La viga empotrada y apoyada en el otro extremo es indeterminada exteriormente y de primer grado, la viga doblemente empotrada es indeterminada exteriormente y de tercer grado, y la armadura plana es estáticamente determinada en el exterior.

La indeterminación interna se refiere al cálculo de esfuerzos resultantes dentro de la estructura suponiendo que todas las reacciones han sido encontradas previamente. Por ejemplo, la armadura de la Fig. 1-8c es estáticamente indeterminada de segundo grado, aunque es determinada exteriormente, tal como dijimos antes.

El grado total de indeterminación de una estructura es la suma de los grados de indeterminación exteriores e interiores. Por lo tanto, la armadura de la Fig. 1-8c es indeterminada de segundo grado al considerarse en su totalidad. La viga de la Fig. 1-8a es indeterminada exteriormente de primer grado y determinada en su interior, ya que todos los esfuerzos resultantes en la viga pueden encontrarse rápidamente después de conocer las reacciones. El marco plano de la Fig. 1-6 tiene nueve acciones reactivas y, por lo tanto, es estáticamente

indeterminado de sexto grado. Interiormente el marco es determinado ya que todos los esfuerzos resultantes pueden encontrarse si se conocen las reacciones; por lo tanto, el marco tiene una indeterminación total de seis, según se observó previamente para esta estructura.

Ocasionalmente hay condiciones especiales de construcción que afectan el grado de indeterminación de una estructura. El arco de tres articulaciones mostrado en la Fig. 1-9 tiene una articulación central en el nudo B que permite calcular todas las cuatro reacciones por estática. Para la armadura mostrada, las fuerzas de barra en todos los miembros pueden encontrarse después de conocer las reacciones y, por lo tanto, la estructura es completamente determinada.

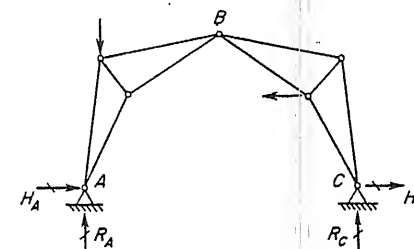


FIG. 1-9.— Armadura en arco de tres articulaciones

En el final de este artículo se dan varios ejemplos adicionales de estructuras estáticamente indeterminadas. Estos ejemplos ilustran cómo puede obtenerse el grado de indeterminación para diferentes estructuras mediante un razonamiento intuitivo. Se encontrarán otros ejemplos en el Cap. 2 conectados con el método de análisis de la flexibilidad. Sin embargo, para grandes estructuras es deseable tener métodos más formalizados para establecer la indeterminación estática; tales métodos se discuten en otras obras y no serán repetidos en este libro.*

En el método de análisis de la rigidez los desplazamientos de los nudos de la estructura son las cantidades desconocidas. Por lo tanto, el segundo tipo de indeterminación, conocido como *indeterminación cinemática*, es el importante. Para comprender este tipo de indeterminación, debe recalcarse que los nudos en las estructuras reticulares se definen como los puntos en que dos o más miembros se intersectan, en puntos de apoyo, y en los extremos libres. Cuando la estructura está sujeta a cargas, cada nudo sufrirá desplazamientos en la forma de translaciones y rotaciones, dependiendo

* Para una discusión completa de indeterminación estática, véase *ibid.*, Págs. 64-69, 74-78, 138-147, 153-157 y 271-273.

de la configuración de la estructura. En algunos casos los desplazamientos del nudo serán conocidos debido a las condiciones que se imponen a la estructura. En un apoyo fijo, por ejemplo, no existen desplazamientos de ningún tipo. Sin embargo, existirán otros desplazamientos de nudo que no se conocen, y que pueden obtenerse haciendo un análisis completo de la estructura. Estos desplazamientos de nudo desconocidos son las cantidades cinemáticamente indeterminadas, y en algunas ocasiones se conocen como redundantes cinemáticas. Su número representa el grado de indeterminación cinemática de la estructura, o el número de *grados de libertad* para el desplazamiento de nudo.

Para ilustrar los conceptos de indeterminación cinemática, es útil considerar de nuevo los ejemplos de la Fig. 1-8. Comenzando con la viga de la Fig. 1-8a, se ve que el extremo A está fijo y no puede sufrir desplazamientos. Por otra parte, el nudo B tiene dos grados de libertad para el desplazamiento de nudo, ya que se puede trasladar en la dirección horizontal y puede girar. Por lo tanto, la viga es indeterminada cinemáticamente de segundo grado, y existen dos desplazamientos de nudo desconocidos que deben calcularse para un análisis completo de la viga. En muchos análisis prácticos es permisible despreciar las deformaciones axiales de la viga; en casos tales, el nudo B sólo tendría un grado de libertad (rotación), y la estructura puede analizarse como si fuera cinemáticamente indeterminada de primer grado.

El segundo ejemplo de la Fig. 1-8 es una viga doblemente empotrada. Esta viga no tiene desplazamientos de nudo conocidos y, por lo tanto, es cinemáticamente determinada. En comparación, la misma viga es estáticamente indeterminada de tercer grado.

El tercer ejemplo de la Fig. 1-8 es la armadura plana que previamente se mostró era estáticamente indeterminada de segundo grado. El nudo A de la armadura puede sufrir dos componentes independientes de desplazamiento (tales como traslaciones en dos direcciones perpendiculares) y, por lo tanto, tiene dos grados de libertad. El giro de un nudo de una armadura no tiene significado físico, debido a que bajo la hipótesis de nudos articulados, la rotación o giro de un nudo no produce efectos en los miembros de la armadura. Por lo tanto, el grado de indeterminación cinemática de una armadura siempre se encuentra como si la armadura estuviese sujeta a cargas en los nudos únicamente; ésta es la misma filosofía que la del caso de la indeterminación estática, donde sólo se consideran incógnitas las fuerzas axiales en los miembros. Los nudos B, D y E de la armadura mostrada en la Fig. 1-8 también tienen dos grados de libertad cada uno, respectivamente. Por lo

tanto, la armadura tiene un total de nueve grados de libertad para traslación de nudos y es cinemáticamente indeterminada de nueve grados.

El marco rígido mostrado en la Fig. 1-6 ofrece otro ejemplo de estructura cinemáticamente indeterminada. Como los apoyos en D, E y F de este marco son fijos, no pueden existir desplazamientos en estos nudos. Sin embargo, los nudos A, B y C poseen cada uno tres grados de libertad, ya que cada nudo puede sufrir traslaciones horizontales y verticales y una rotación. Por lo tanto, el número total de grados de indeterminación cinemática para este marco es nueve. Si los efectos de las deformaciones axiales se omiten en el análisis, el grado de indeterminación cinemática se reduce. No habría posibilidad de un desplazamiento vertical de ninguno de los nudos debido a que las columnas no cambian de longitud. Aún más, las traslaciones horizontales de los nudos A y B serían iguales, y la traslación horizontal de C tendría una relación conocida a la del nudo B. Dicho de otro modo, si se desprecian las deformaciones axiales los únicos desplazamientos independientes de nudos son las rotaciones de los nudos A, B y C y un desplazamiento horizontal (tal como el del nudo B). Por lo tanto, la estructura puede considerarse como cinemáticamente indeterminada de cuarto grado.

A continuación se dan varios ejemplos que incluyen tanto la indeterminación estática como la cinemática.

EJEMPLO 1. La estructura mostrada en la Fig. 1-10 tiene articulaciones en A, B, y C. Se deben determinar los grados de indeterminación estática y cinemática de la armadura.

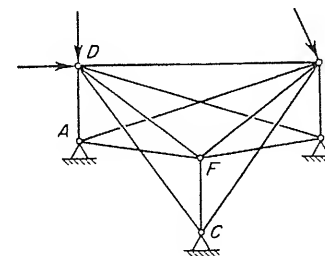


FIG. 1-10. Ej. 1

En la determinación del grado de indeterminación estática, puede notarse que existen tres ecuaciones de equilibrio disponibles para cualquier nudo de la armadura para el propósito de calcular fuerzas de barra o reacciones. Por lo tanto, se tienen disponibles un total de 18 ecuaciones de estática. El número de acciones desconocidas es 21, ya que hay 12 fuerzas de barra y nueve reacciones (tres en cada soporte) que deben ser determinadas. La

armadura es, por lo tanto, estáticamente indeterminada de tercer grado. Más específicamente, la armadura es indeterminada estáticamente de tercer grado, debido a que hay nueve reacciones, pero sólo seis ecuaciones de equilibrio para la armadura considerada como una sola pieza. La armadura es determinada interiormente ya que todas las fuerzas de barra pueden encontrarse por estática una vez que las reacciones han sido determinadas.

Cada uno de los nudos D, E, y F tienen tres grados de libertad para el desplazamiento de nudos, debido a que cada nudo puede trasladarse en tres direcciones ortogonales entre sí. Por lo tanto, la armadura es cinemáticamente indeterminada de noveno grado.

EJEMPLO 2. Determine los grados de indeterminación estática y cinemática para el marco en el espacio mostrado en la Fig. 1-11a.

Hay varios modos en que podemos cortar la estructura para reducirla a una estructura estáticamente determinada. Una posibilidad es cortar cuatro barras EF, FG, GH, y EH, dando como resultado la estructura mostrada en la Fig. 1-11b. Como cada corte representa la eliminación de seis acciones (fuerza axial, dos fuerzas cortantes, momento torsionante, y dos momentos flexionantes) el marco original es estáticamente indeterminado de 24avo grado.

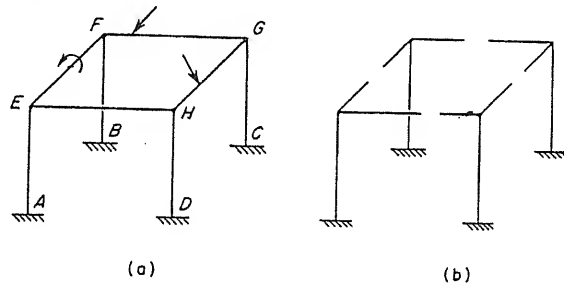


FIG. 1-11. Ej. 2

El número posible de desplazamientos de nudo en E, F, G, y H es seis en cada nudo (tres traslaciones y tres rotaciones); por lo tanto, el marco es cinemáticamente indeterminado de 24avo grado.

Consideremos ahora el efecto de omitir deformaciones axiales en el análisis. El grado de indeterminación estática no se afecta, debido a que el mismo número de acciones permanece en la estructura. Por otra parte, habrán menos números de grados de libertad para el desplazamiento del nudo. Las columnas no cambian en longitud, eliminando, por lo tanto, cuatro traslaciones de nudo (en E, F, G y H). Además, los cuatro miembros horizontales no cambian su longitud, eliminando, por lo tanto, cuatro traslaciones más. Por lo tanto, se concluye finalmente que el grado de indeterminación cinemática es 16 cuando no se consideran las deformaciones axiales.

Consideremos enseguida el efecto de reemplazar los apoyos empotrados o fijos en A, B, C y D por apoyos articulados, pero inmóviles. El efecto de las articulaciones es reducir el número de reacciones, en cada apoyo de seis a tres. Por lo tanto, el grado de indeterminación estática es 12 menos que con apoyos empotrados, o un total de 12°. Al mismo tiempo, se han agregado tres grados adicionales de libertad por rotación a cada apoyo, de modo que el grado de indeterminación cinemática se ha incrementado en 12, comparán-

dose con el marco con apoyos empotrados. Puede verse que al eliminar restricciones en los apoyos de una estructura se disminuye el grado de indeterminación estática, en tanto que aumenta el grado de indeterminación cinemática.

EJEMPLO 3. La parrilla mostrada en la Fig. 1-12a queda en un plano horizontal y está apoyada en A, D, E y H en apoyos simples. Los nudos en B, C, F y G son conexiones rígidas. ¿Cuáles son los grados de indeterminación estática y cinemática?

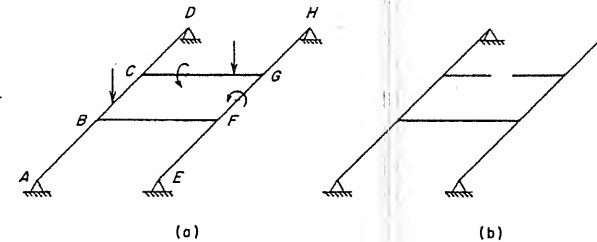


FIG. 1-12. Ej. 3

Debido a que no existen fuerzas axiales en los miembros de una parrilla, sólo se desarrollan reacciones verticales en los apoyos de esta estructura. Por lo tanto, la parrilla es indeterminada en el exterior en primer grado, debido a que sólo se cuenta con tres ecuaciones de equilibrio para la estructura, pero existen cuatro reacciones. Después de eliminar una reacción, la parrilla queda estáticamente determinada al cortar un miembro, tal como el CG (véase la Fig. 1-12b). El corte en el miembro CG elimina tres acciones (fuerza cortante en la dirección vertical, par torsionante, y momento flexionante). Así, la parrilla queda internamente indeterminada de tercer grado, y estáticamente indeterminada en total de cuarto grado.

En general existen tres grados de libertad para los desplazamientos de cada nudo en una parrilla (una traslación y dos rotaciones). Tal es el caso en los nudos C, B, F y G de la parrilla mostrada en la Fig. 1-12a. Sin embargo, en los nudos A, D, E y H sólo son posibles dos desplazamientos de nudo, siempre que se evite la traslación del nudo. Por lo tanto, la parrilla mostrada en la figura es cinemáticamente indeterminada de 20avo grado.

1.8. Estructuras móviles. En la discusión precedente respecto a la indeterminación estática exterior, el número de acciones reactivas de una estructura se comparó con el número de ecuaciones de equilibrio estático para toda la estructura considerada como unidad. Si el número de reacciones excede el número de ecuaciones, la estructura es estáticamente indeterminada exteriormente; si son iguales, la estructura es determinada en su exterior. Sin embargo, se supuso tácitamente en la discusión que el arreglo geométrico de las reacciones es tal que evita que la estructura se mueva al estar bajo diferentes condiciones de carga. Por ejemplo, la viga mostrada en la Fig. 1-13a tiene tres reacciones, que es igual al número de ecuaciones de equilibrio estático para fuerzas en un plano. Es obvio,

sin embargo, que la viga se mueva a la izquierda cuando se aplique la carga P . Una estructura de este tipo se llama *móvil*. Otros ejemplos de estructuras móviles son el marco de la Fig. 1-13b y la armadura de la Fig. 1-13c. En la estructura de la Fig. 1-13b las tres fuerzas reactivas son concurrentes, ya que sus líneas de acción se intersectan en el punto O . Por lo tanto, el marco es móvil, ya que no puede soportar una carga tal como la fuerza P que no actúa en el punto O . En la armadura de la Fig. 1-13c hay dos barras que son colineales en el nudo A , y no existe otra barra que se una en ese nudo. De nuevo, la estructura es móvil ya que es incapaz de soportar la carga P en su configuración inicial.

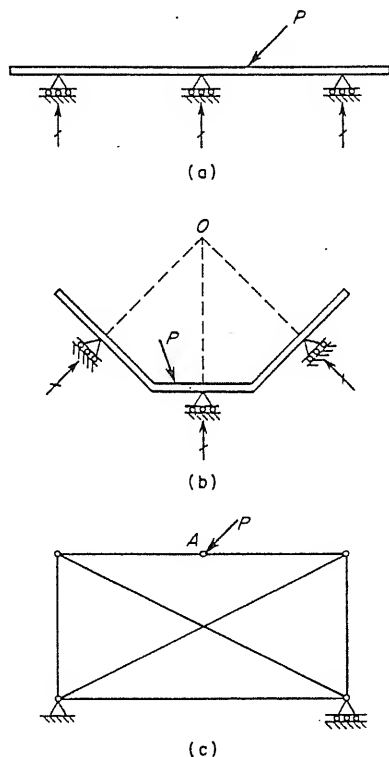


FIG. 1-13. Estructuras móviles

De los ejemplos de estructuras móviles dados en la Fig. 1-13, es obvio que tanto los soportes como los miembros de cualquier estructura deben ser adecuados en número y arreglo geométrico para asegurar que la estructura sea inmóvil. Sólo estructuras que cumplan con estas condiciones serán consideradas para su análisis en capítulos subsecuentes.

1.9. Principio de superposición. El principio de superposición es uno de los conceptos más importantes en el análisis estructural. Puede utilizarse siempre que existan relaciones lineales entre las acciones y los desplazamientos (las condiciones bajo las cuales esta hipótesis es válida, se describen posteriormente en este artículo). Al utilizar el principio de superposición se supone que ciertas acciones y desplazamientos están impuestos en la estructura. Estas acciones y desplazamientos causan que se formen en la estructura otras acciones y desplazamientos. Por lo tanto, las primeras acciones y desplazamientos tienen la naturaleza de las causas, en tanto que las últimas son efectos. En general, el principio dice que los efectos producidos por varias causas pueden obtenerse combinando los efectos debidos a las causas individuales.

Para ilustrar el uso del principio de superposición cuando las acciones son las causas, consideremos la viga de la Fig. 1-14a. Esta viga está sujeta a cargas A_1 y A_2 , que producen varias acciones y desplazamientos en toda la estructura. Por ejemplo, las reacciones R_A , R_B y M_B se desarrollan en los apoyos, y se produce en el centro del claro un desplazamiento D . Los efectos de las acciones A_1 y A_2 actuando separadamente se muestran en las Figs. 1-14b y 1-14c. En cada caso existe un desplazamiento en el centro del claro de la viga y reacción en los extremos. Se utiliza una prima para denominar cantidades asociadas con la acción A_1 , y una doble prima para cantidades asociadas con A_2 .

De acuerdo con el principio de superposición, las acciones y los desplazamientos causados por A_1 y A_2 actuando separadamente (Figs. 1-14b y 1-14c) pueden combinarse para obtener las acciones y desplazamientos causados por A_1 y A_2 actuando simultáneamente (Fig. 1-14a). Por lo tanto, se pueden escribir las siguientes ecuaciones de superposición para la viga de la Fig. 1-14:

$$\begin{aligned} R_A &= R'_A + R''_A & R_B &= R'_B + R''_B \\ M_B &= M'_B + M''_B & D &= D' + D'' \end{aligned} \quad (1-3)$$

Por supuesto, se pueden escribir ecuaciones de superposición similares para otras acciones y desplazamientos en la viga, tales como esfuerzos resultantes en cualquier sección transversal de la viga y desplazamientos (traslaciones y rotaciones) en cualquier punto a lo largo del eje de la viga. Esta manera de utilizar la superposición se ilustró previamente en el Art. 1.4.

Un segundo ejemplo del principio de superposición, en el que los desplazamientos son la causa, se da en la Fig. 1-15. La figura es de nuevo la viga AB libremente apoyada en un extremo y empotrada en el otro (véase la Fig. 1-15a). Cuando el extremo B de la viga se

desplaza hacia abajo una distancia Δ y, al mismo tiempo, gira un ángulo θ (véase la Fig. 1-15b), se desarrollan en la viga varias acciones y desplazamientos. Por ejemplo, las reacciones en cada extremo y el desplazamiento en el centro se muestran en la Fig. 1-15b. Las dos figuras siguientes (Figs. 1-15c y 1-15d) muestran a la viga con los desplazamientos Δ y θ ocurriendo separadamente. Las reacciones en los extremos y el desplazamiento en el centro se denominan de nuevo mediante el uso de primas; una sola prima se utiliza para denominar cantidades causadas por el desplazamiento Δ y dobles primas para cantidades causadas por la rotación θ . Cuando se aplica el principio de superposición a las reacciones y al desplazamiento en el punto medio, las ecuaciones de superposición toman de nuevo la forma de las Ecs. (1-3). Este ejemplo ilustra cómo las acciones y desplazamientos causados por desplazamientos pueden superponerse. El mismo principio se aplica a cualquier otra acción y desplazamiento en la viga.

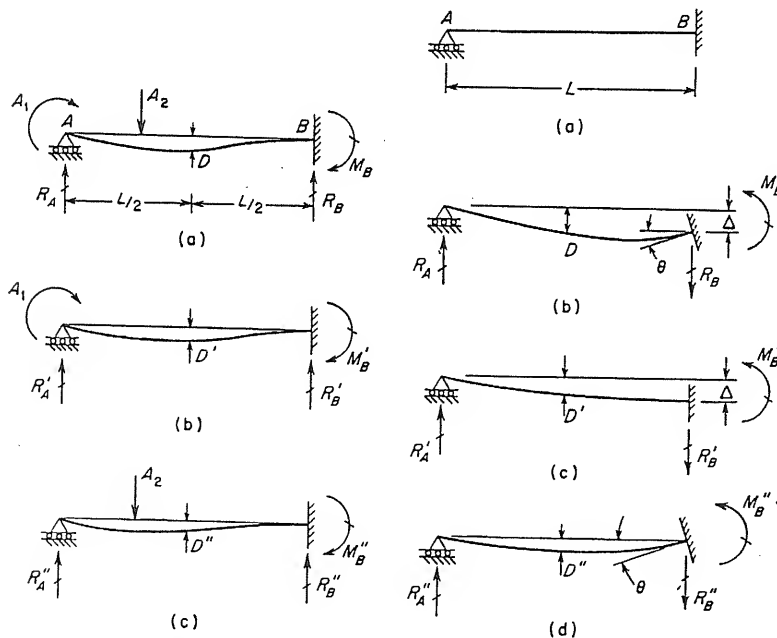


Fig. 1-14. Ilustración del principio de superposición

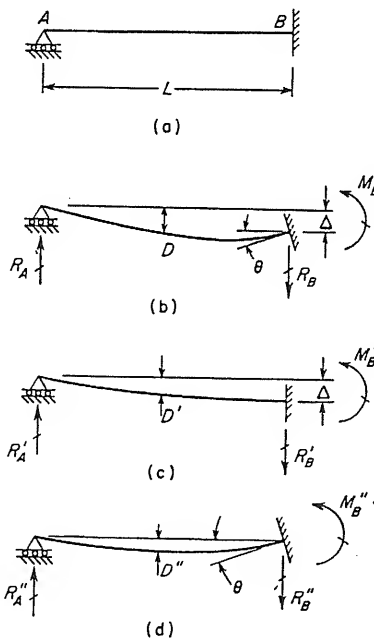


Fig. 1-15. Ilustración del principio de superposición

El principio de superposición también puede utilizarse si las causas son acciones y desplazamientos. Por ejemplo, la viga de la Fig. 1-15b podría estar sujeta a varias cargas, así como a los despla-

zamientos Δ y θ . Luego las acciones y desplazamientos de la viga pueden obtenerse combinando aquellos debidos a cada carga y desplazamiento separadamente.

Como mencionamos anteriormente, el principio de superposición será válido donde quiera que existan relaciones lineales entre las acciones y los desplazamientos de la estructura. Esto ocurre siempre que se satisfacen los siguientes tres requisitos: (1) el material de la estructura sigue la ley de Hooke; (2) los desplazamientos de la estructura son pequeños; (3) no existe interacción entre los efectos axial y flexionante en los miembros. El primero de estos requisitos significa que el material es perfectamente elástico y tiene una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación. El segundo requisito significa que todos los cálculos que involucran las dimensiones totales de la estructura pueden basarse en las dimensiones originales de ella; también es una hipótesis básica para calcular desplazamientos por los métodos descritos en el Apéndice A. El tercer requisito implica que el efecto de fuerzas axiales en la flexión de los miembros es despreciable. Este requisito se refiere al hecho de que las fuerzas axiales en un miembro, aun en combinación con pequeñas deflexiones del miembro, tienen un efecto en los momentos flexionantes. El efecto no es lineal y puede omitirse en el análisis cuando las fuerzas axiales (tensión o compresión) no son muy grandes. (Un método de incorporar dichos efectos en el análisis se describe en el Art. 6-12).

Cuando se satisfacen los tres requisitos listados anteriormente, se dice que la estructura es *linealmente elástica*, y se puede utilizar el principio de superposición. Como este principio es fundamental en los métodos de análisis de la flexibilidad y de la rigidez, siempre se supondrá en las discusiones subsecuentes que las estructuras analizadas cumplen con dichos requisitos.

En la anterior discusión del principio de superposición se supuso que tanto las acciones como los desplazamientos son de importancia en el análisis, como generalmente es el caso. Una excepción, sin embargo, es el análisis de una estructura estáticamente determinada para acciones únicamente. Como un análisis de esta naturaleza requiere el uso de ecuaciones de equilibrio, pero no requiere el cálculo de ningún desplazamiento, puede verse que el requisito de elasticidad lineal es superfluo. Un ejemplo es la determinación de las reacciones para una viga libremente apoyada sujeta a varias cargas. Las reacciones son funciones lineales de las cargas, no importa cuáles son las características del material de la viga. Sin embargo, es necesario que las deflexiones de la viga sean pequeñas, ya que de otro modo la posición de las cargas y reacciones se alteraría.

1.10. Ecuaciones de acción y desplazamiento. Las relaciones que existen entre las acciones y los desplazamientos juegan un papel importante en el análisis estructural y se utilizan extensivamente tanto en el método de la flexibilidad como en el de la rigidez. Un modo conveniente de expresar la relación entre las acciones que actúan en una estructura y los desplazamientos de ella es mediante ecuaciones de acción y desplazamiento. Se obtiene una ilustración sencilla de tales ecuaciones considerando el resorte linealmente elástico mostrado en la Fig. 1-16. La acción A comprime el resorte, produciendo, por lo tanto, un desplazamiento D del extremo del resorte. La relación entre A y D puede expresarse por una *ecuación de desplazamiento* de la manera siguiente:

$$D = FA \quad (1-4)$$

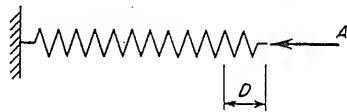


FIG. 1-16. Resorte linealmente elástico

En esta ecuación F es la *flexibilidad* del resorte, y se define como el desplazamiento producido por un valor unitario de la acción A .

La relación entre la acción A y el desplazamiento D del resorte en la Fig. 1-16 también puede expresarse por una *ecuación de acción* que expresa a A en términos de D :

$$A = SD \quad (1-5)$$

En esta ecuación S es la *rigidez* del resorte, la que se define como la acción necesaria para producir un desplazamiento unitario. Puede verse de las Ecs. (1-4) y (1-5) que la flexibilidad y la rigidez del resorte son inversas, como sigue:

$$F = \frac{1}{S} = S^{-1} \quad S = \frac{1}{F} = F^{-1} \quad (1-6)$$

La flexibilidad del resorte tiene unidades de longitud entre fuerza, en tanto que la rigidez tiene unidades de fuerza entre longitud.

Las mismas relaciones generales (Ecs. 1-4 a 1-6) que se aplican al resorte son válidas para cualquier estructura linealmente elástica que esté sujeta a una sola acción. Un ejemplo se da en la Fig. 1-17a, donde se muestra una viga libremente apoyada sujeta a una fuerza concentrada A en el centro del claro. El desplazamiento D mostrado en la figura es la deflexión vertical y hacia abajo de la viga en el punto donde A actúa sobre la viga. Por lo tanto, en este ejemplo

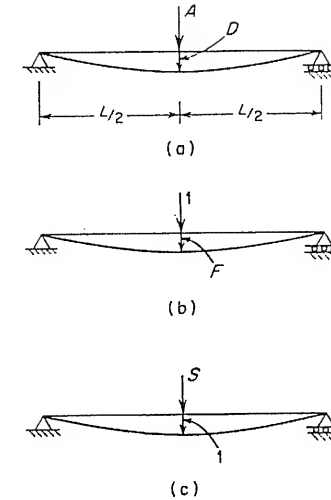


FIG. 1-17. Flexibilidad y rigidez de una viga sujeta a una sola carga

el desplazamiento D no sólo corresponde a A , sino que también es causado por A . Las ecuaciones de acción y desplazamiento dadas previamente (Ecs. 1-5 y 1-4, respectivamente) son válidas para la viga de la Fig. 1-17a, siempre que la flexibilidad F y la rigidez S estén determinadas apropiadamente. En este caso la flexibilidad F es el desplazamiento producido por un valor unitario de la carga, según se muestra en la Fig. 1-17b (véase el caso 2 de la Tabla A-3 en el Apéndice A):

$$F = \frac{L^3}{48EI}$$

en donde L es la longitud de la viga y EI es la rigidez a la flexión. La rigidez S , igual a la inversa de la flexibilidad, es la acción necesaria para producir un valor unitario del desplazamiento (véase la Fig. 1-17c):

$$S = \frac{48EI}{L^3}$$

Nótese de nuevo que S tiene unidades de fuerza entre longitud. También, debe enfatizarse que la relación inversa expresada por la Ec. (1-6) es válida solamente cuando la estructura está sujeta a una sola carga.

Consideremos ahora un ejemplo más general en el que la estructura esté sujeta a tres cargas (Fig. 1-18a). Las cargas sobre la viga se denominan A_1 , A_2 y A_3 , y se toman positivas en las direcciones

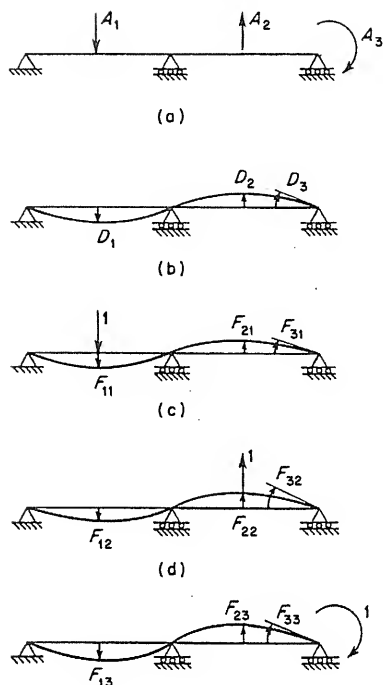


FIG. 1-18. Ilustración de coeficientes de flexibilidad

mostradas en la figura. La forma deformada (elástica) producida por las cargas que actúan sobre la viga se muestra en la Fig. 1-18b. En esta figura los desplazamientos de la viga correspondientes a A_1 , A_2 y A_3 , y causados por las tres cargas actuando simultáneamente, se denominan D_1 , D_2 y D_3 , respectivamente, y se consideran positivos en los mismos sentidos (o direcciones) de sus acciones correspondientes.

Utilizando el principio de superposición, cada uno de los desplazamientos de la Fig. 1-18b puede expresarse como la suma de los desplazamientos debidos a las cargas A_1 , A_2 y A_3 , actuando separadamente. Por ejemplo, el desplazamiento D_1 está dado por la expresión

$$D_1 = D_{11} + D_{12} + D_{13}$$

en donde D_{11} es el desplazamiento correspondiente a A_1 y causado por A_1 ; D_{12} es el desplazamiento correspondiente a A_1 y causado por A_2 ; y D_{13} es el desplazamiento correspondiente a A_1 y causado por A_3 . De modo similar se pueden escribir dos ecuaciones adicionales para D_2 y D_3 . Cada uno de los desplazamientos que aparecen en los miembros de la derecha de estas ecuaciones es una función lineal de una de las cargas; esto es, cada desplazamiento es una directa-

mente proporcional a una de las cargas. Por ejemplo, D_{12} es un desplazamiento causado por A_2 únicamente, y es igual a A_2 multiplicada por cierto coeficiente. Denominando dichos coeficientes mediante el símbolo F , es posible escribir ecuaciones para los desplazamientos D_1 , D_2 y D_3 explícitamente en términos de la carga, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} D_1 &= F_{11}A_1 + F_{12}A_2 + F_{13}A_3 \\ D_2 &= F_{21}A_1 + F_{22}A_2 + F_{23}A_3 \\ D_3 &= F_{31}A_1 + F_{32}A_2 + F_{33}A_3 \end{aligned} \quad (1-7)$$

En la primera de estas ecuaciones la expresión $F_{11}A_1$ representa el desplazamiento D_{11} , la expresión $F_{12}A_2$ representa el desplazamiento D_{12} , y así sucesivamente. Cada miembro derecho de las ecuaciones anteriores es un desplazamiento que está escrito en la forma de un coeficiente multiplicado por la acción que produce el desplazamiento. Los coeficientes se llaman *coeficientes de influencia de la flexibilidad*, o más fácilmente, coeficientes de flexibilidad.

Cada coeficiente de flexibilidad F representa un desplazamiento causado por un valor unitario de una carga. Así, el coeficiente F_{11} representa el desplazamiento correspondiente a la acción A_1 y causado por un valor unitario de A_1 ; el coeficiente F_{12} es el desplazamiento correspondiente a A_1 y causado por un valor unitario de A_2 ; y así sucesivamente. El significado físico de los coeficientes de flexibilidad se muestra en las Figs. 1-18c, 1-18d, y 1-18e. Los desplazamientos de la viga causados por un valor unitario de la acción A_1 están mostrados en la Fig. 1-18c. Todos los coeficientes de flexibilidad de esta figura tienen un segundo subíndice igual a uno, que denota la causa de los desplazamientos. El primer subíndice en cada caso identifica al desplazamiento denominando la acción a que corresponde. Comentarios similares se aplican también a los desplazamientos dibujados en las Figs. 1-18d y 1-18e. El cálculo de los coeficientes de flexibilidad F puede ser fácil o difícil, dependiendo de la estructura en particular que se está investigando. Al final del Art. 1-11 se da un ejemplo de una estructura muy sencilla. En los Caps. 2 y 3 se muestra el uso generalizado de coeficientes de flexibilidad en el análisis estructural, así como los métodos de su cálculo.

En vez de expresar los desplazamientos en términos de las acciones, como se hizo en las Ecs. (1-7), es posible escribir ecuaciones de acción que expresen las acciones en términos de los desplazamientos. Tales ecuaciones pueden obtenerse, por ejemplo, resolviendo simultáneamente las ecuaciones de desplazamiento. Por lo tanto, si las Ecs. (1-7) se resuelven para las acciones en términos de los desplazamientos, las ecuaciones de acción resultantes tendrán la forma:

$$\begin{aligned} A_1 &= S_{11}D_1 + S_{12}D_2 + S_{13}D_3 \\ A_2 &= S_{21}D_1 + S_{22}D_2 + S_{23}D_3 \\ A_3 &= S_{31}D_1 + S_{32}D_2 + S_{33}D_3 \end{aligned} \quad (1-8)$$

en donde cada S es un *coeficiente de influencia de la rigidez* o, más fácilmente, un *coeficiente de rigidez*. Como se estableció anteriormente, una rigidez representa una acción debida a un desplazamiento unitario. Por lo tanto, el coeficiente de rigidez S_{11} representa la acción correspondiente a A_1 cuando se introduce un desplazamiento unitario en D_1 , en tanto que otros desplazamientos, a saber, D_2 y D_3 , se mantienen igual a cero. Del mismo modo, el coeficiente de rigidez S_{12} es la acción correspondiente a A_1 causada por un desplazamiento unitario en D_2 cuando D_1 y D_3 son iguales a cero. Continuando de este modo, todos los coeficientes de rigidez pueden definirse como acciones producidas por desplazamientos unitarios.

La interpretación física de los coeficientes de rigidez se muestran en la Fig. 1-19. Las dos primeras partes de la figura (Figs.

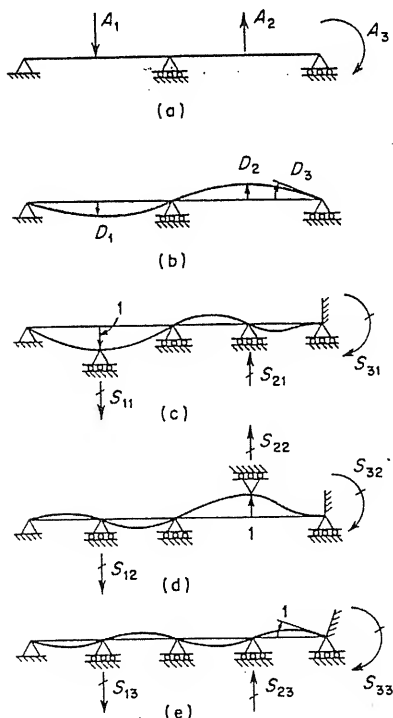


FIG. 1-19. Ilustración de los coeficientes de rigidez

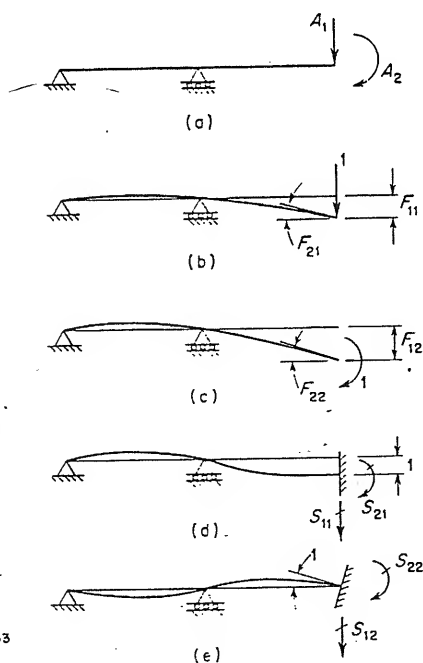


FIG. 1-20. Ej. 1

1-19a y 1-19b) están repetidas de la Fig. 1-18 para mostrar las acciones y desplazamientos en la viga original. En la Fig. 1-19c la viga está mostrada con un desplazamiento unitario correspondiente a A_1 inducido en la estructura, en tanto que los desplazamientos correspondientes a A_2 y A_3 se hacen iguales a cero. Provocar estos desplazamientos en la viga requiere que se proporcionen restricciones artificiales adecuadas. Estas se muestran en la figura por los apoyos libres correspondientes a A_1 y A_2 y la restricción de rotación correspondiente a A_3 . Las acciones de restricción desarrolladas por estos apoyos artificiales son los coeficientes de rigidez. Por ejemplo, puede verse de la figura que S_{11} es la acción correspondiente a A_1 y causada por un desplazamiento unitario correspondiente a A_1 , en tanto que los desplazamientos correspondientes a A_2 y A_3 se mantienen en cero. El coeficiente de rigidez S_{21} es la acción correspondiente a A_2 causada por un desplazamiento unitario correspondiente a A_1 , en tanto que los desplazamientos correspondientes a A_2 y A_3 se hacen iguales a cero, y así sucesivamente para las otras rigideces. Nótese que cada *coeficiente de rigidez* es una *reacción para la estructura fija* y, por lo tanto, se utiliza una *línea inclinada que corte al vector* para distinguirla de un vector carga. Cada coeficiente de rigidez se muestra actuando en su dirección positiva supuesta, que es automáticamente la misma dirección que la de la acción correspondiente. Si la dirección real de una de las rigideces es opuesta a la supuesta, el coeficiente tendrá un valor negativo al calcularse. Los coeficientes de rigidez causados por desplazamientos unitarios correspondientes a A_2 y A_3 se muestran en las Figs. 1-19d y 1-19e.

El cálculo de los coeficientes de rigidez para la viga continua de la Fig. 1-19 sería muy laborioso. Sin embargo, al analizar una estructura mediante el método de la rigidez (como se hace en los Caps. 2 y 4), esta dificultad se evita limitando el cálculo de coeficientes de rigidez a estructuras muy especiales que se obtienen fijando completamente todos los puntos de la estructura real. El propósito primero de la discusión precedente y de los dos ejemplos siguientes es auxiliar al lector a visualizar el significado físico de los coeficientes de rigidez y flexibilidad, sin tomar en consideración el cálculo práctico.

EJEMPLO 1. La viga mostrada en la Fig. 1-20 está sujeta a las cargas A_1 y A_2 en el extremo libre. Debemos representar el significado físico de los coeficientes de flexibilidad y rigidez correspondientes a estas acciones mediante dibujos.

Las cargas unitarias correspondientes a las acciones A_1 y A_2 se muestran en las Figs. 1-20b y 1-20c, respectivamente. Los desplazamientos producidos por estas cargas unitarias, y que corresponden a las acciones A_1 y A_2 , son

coeficientes de flexibilidad restantes se llaman *coeficientes de flexibilidad cruzados*, y cada uno representa un desplazamiento causado por un valor unitario de una acción que no corresponde al desplazamiento. Es obvio que $i = j$ para las flexibilidades directas y que $i \neq j$ para las flexibilidades cruzadas.

Las ecuaciones de acción para la estructura con n acciones A que actúan sobre ella pueden obtenerse resolviendo simultáneamente las Ecs. (1-9) para las acciones en términos de los desplazamientos. Esta operación da las siguientes ecuaciones de acción:

$$\begin{aligned} A_1 &= S_{11}D_1 + S_{12}D_2 + \cdots + S_{1n}D_n \\ A_2 &= S_{21}D_1 + S_{22}D_2 + \cdots + S_{2n}D_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_n &= S_{n1}D_1 + S_{n2}D_2 + \cdots + S_{nn}D_n \end{aligned} \quad (1-11)$$

Estas ecuaciones de acción en forma matricial son

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{bmatrix}$$

o $A = SD \quad (1-12)$

Como se describió anteriormente, las matrices A y D representan las matrices de acción y desplazamiento de orden $n \times 1$. La matriz S es una *matriz de rigidez* cuadrada de orden $n \times n$. Cada coeficiente de rigidez S_{ij} puede definirse como la i ésima acción debida a un valor unitario del j ésimo desplazamiento, suponiendo que los desplazamientos restantes sean iguales a cero. Si $i = j$ el coeficiente es un coeficiente de rigidez directo; si $i \neq j$, es un coeficiente de rigidez cruzado.

Puesto que las Ecs. (1-11) se obtuvieron de las Ecs. (1-9) y las acciones A y los desplazamientos D que aparecen en esas ecuaciones son correspondientes, se sigue que las matrices de flexibilidad y de rigidez están relacionadas de una manera muy especial. Esta relación puede verse resolviendo la Ec. (1-10) para A , dando la expresión

$$A = F^{-1}D \quad (1-13)$$

en donde F^{-1} representa a la inversa de la matriz de flexibilidad F . Los vectores* A y D de esta ecuación son los mismos de la Ec. (1-12) y, por lo tanto, es obvio que

$$S = F^{-1} \quad \text{y} \quad F = S^{-1} \quad (1-14)$$

* El término *vector* se utiliza frecuentemente para una matriz de una columna o un renglón.

Esta relación muestra que la matriz de rigidez es la inversa de la matriz de flexibilidad y viceversa, siempre que se considere el mismo juego de acciones y desplazamientos correspondientes en las ecuaciones de acción y en las ecuaciones de desplazamiento.

Una situación algo diferente que ocurre en el análisis estructural es la siguiente. Un juego de ecuaciones de desplazamiento que relaciona las acciones A_1 y sus desplazamientos correspondientes D_1 se obtiene para una estructura particular, como sigue

$$D_1 = F_1 A_1$$

En esta ecuación F_1 es la matriz de flexibilidad que relaciona los desplazamientos D_1 con las acciones A_1 . Independientemente, puede escribirse para la misma un juego de ecuaciones de acción que relaciona otro juego de acciones A_2 con los desplazamientos correspondientes D_2 ; por lo tanto

$$A_2 = S_2 D_2$$

Por supuesto, no es cierto que las matrices de flexibilidad y de rigidez F_1 y S_2 sean inversa una a otra. Sin embargo, siempre es posible obtener la inversa de F_1 , y a esta inversa puede llamársele correctamente una matriz de rigidez. Es la matriz de rigidez S_1 la que está asociada con la ecuación de acción que relaciona a A_1 con D_1 ; específicamente, la siguiente ecuación:

$$A_1 = F_1^{-1} D_1 = S_1 D_1$$

Similarmente, la inversa de la matriz S_2 es una matriz de flexibilidad que relaciona a D_2 con A_2 , de la manera siguiente:

$$D_2 = S_2^{-1} A_2 = F_2 A_2$$

Esta discusión muestra que una matriz de flexibilidad o de rigidez no es un arreglo que está determinado sólo por la naturaleza de la estructura; también está relacionado directamente con el juego de acciones y desplazamientos que está bajo consideración. Esta idea será encontrada de nuevo en el siguiente capítulo, donde el significado de la inversa de una matriz de flexibilidad y de la inversa de una matriz de rigidez serán discutidos más ampliamente en conexión con los métodos de análisis de la rigidez y de la flexibilidad.

EJEMPLO. La viga en voladizo mostrada en la Fig. 1-22a está sujeta a las acciones A_1 y A_2 en el extremo libre. Los desplazamientos correspondientes se denominan mediante D_1 y D_2 en la figura.

Los coeficientes de flexibilidad se identifican en las Figs. 1-22b y 1-22c y pueden evaluarse sin ninguna dificultad (véase la Tabla A-3, Apéndice A):

$$F_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad F_{12} = F_{21} = \frac{L^2}{2EI}$$

$$F_{22} = \frac{L}{EI}$$

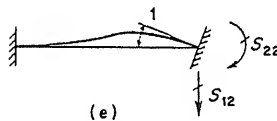
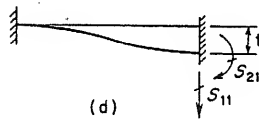
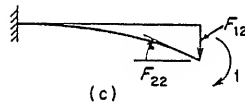
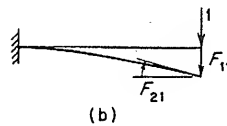
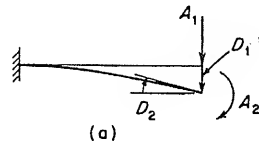


FIG. 1-22. Ejemplo de coeficientes de flexibilidad y de rigidez

Por lo tanto, las ecuaciones de desplazamiento son

$$D_1 = \frac{L^3}{3EI} A_1 + \frac{L^2}{2EI} A_2$$

$$D_2 = \frac{L^2}{2EI} A_1 + \frac{L}{EI} A_2$$

y se ve que la matriz de flexibilidad es

$$F = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de rigidez son las acciones de restricción mostradas en las Figs. 1-22d y 1-22e. En este ejemplo en particular, los coeficientes son reacciones para una viga empotrada, y sus expresiones pueden obtenerse de una tabla de acciones de empotramiento. Esta tabla está dada en el Apéndice B (véase la Tabla B-4), de donde se obtienen las siguientes expresiones:

$$S_{11} = \frac{12EI}{L^3} \quad S_{12} = S_{21} = -\frac{6EI}{L^2} \quad S_{22} = \frac{4EI}{L}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de acción son

$$A_1 = \frac{12EI}{L^3} D_1 - \frac{6EI}{L^2} D_2$$

$$A_2 = -\frac{6EI}{L^2} D_1 + \frac{4EI}{L} D_2$$

y la matriz de rigidez es

$$S = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

En donde las matrices de flexibilidad y de rigidez se multiplican, se obtiene la matriz de identidad I:

$$FS = SF = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Por lo tanto, las matrices **F** y **S** son inversas entre sí, como se expresó previamente en la Ec. (1-14).

1.12. Relaciones recíprocas. La forma general de las ecuaciones de acción y desplazamiento que relaciona un juego de acciones **A** y los desplazamientos correspondientes **D** se dio en el artículo anterior. Es conveniente en la siguiente discusión visualizar las acciones **A** como cargas que actúan sobre la estructura y suponer que todas las cargas se aplican proporcionalmente a la estructura. *Cargar proporcionalmente* significa que inicialmente todas las cargas son cero y que éstas se incrementan gradualmente en tales proporciones que todas alcanzan sus valores finales simultáneamente. Por lo tanto, en cualquier etapa intermedia del proceso de carga, cada carga es la misma fracción de su valor final.

Si las cargas que actúan sobre una estructura se aplican proporcionalmente, cada carga aumentará gradualmente desde cero hasta su valor final y, por lo tanto, efectuará un trabajo igual a su valor promedio (la mitad de su valor final) multiplicado por el despla-

zamiento sobre el que se mueve. Este desplazamiento será el desplazamiento correspondiente a la carga en sí, y causado por todas las cargas actuando simultáneamente. Así, el trabajo W de todas las fuerzas es

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}A_1D_1 + \frac{1}{2}A_2D_2 + \cdots + \frac{1}{2}A_nD_n \\ &= \frac{1}{2}(A_1D_1 + A_2D_2 + \cdots + A_nD_n) \end{aligned} \quad (1-15)$$

en donde A_1, A_2, \dots, A_n son las acciones en la estructura y D_1, D_2, \dots, D_n son los desplazamientos correspondientes. Como las matrices de acción y de desplazamiento \mathbf{A} y \mathbf{D} (véase la Ec. 1-10) son matrices de columna (o vectores de columna), se puede obtener una expresión para trabajo de cualquiera de los productos matriciales mostrados:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\mathbf{A}'\mathbf{D} = \frac{1}{2}\mathbf{D}'\mathbf{A} \quad (1-16)$$

en donde \mathbf{A}' y \mathbf{D}' son los trasposos de \mathbf{A} y \mathbf{D} , respectivamente. En las relaciones dadas en la Ec. (1-16) cada uno de los productos $\mathbf{A}'\mathbf{D}$ y $\mathbf{D}'\mathbf{A}$ representa una matriz de renglón multiplicada por una matriz de columna, que da un resultado que es una matriz \mathbf{W} de un elemento. El valor del elemento en sí es W , y el trabajo está definido por la Ec. (1-15). Por lo tanto, en el resto de la discusión la matriz \mathbf{W} y el trabajo W se consideran intercambiables, y la Ec. (1-16) puede considerarse como una expresión que es equivalente a la Ec. (1-15).

Como el trabajo de las cargas es $\frac{1}{2}\mathbf{A}'\mathbf{D}$ (véase la Ec. 1-16) y como $\mathbf{D} = \mathbf{F}\mathbf{A}$, otra expresión para el trabajo es

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\mathbf{A}'\mathbf{F}\mathbf{A} \quad (a)$$

Tomando el trasposo de ambos lados de la Ec. (1-10), la expresión para el trasposo de \mathbf{D} se vuelve $\mathbf{D}' = \mathbf{A}'\mathbf{F}'$ ya que el trasposo de un producto es el producto de los trasposos pero en orden invertido. Por lo tanto, como el trabajo es $\frac{1}{2}\mathbf{D}'\mathbf{A}$ (véase la Ec. 1-16), se sigue que otra expresión para el trabajo es

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\mathbf{A}'\mathbf{F}'\mathbf{A} \quad (b)$$

Una comparación entre las Ecs. (a) y (b) muestra que la matriz de flexibilidad y su trasposo son iguales:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}' \quad (1-17)$$

Por lo tanto, se concluye que la matriz de flexibilidad \mathbf{F} es una matriz simétrica, y que los coeficientes de flexibilidad cruzados están relacionados por la expresión

$$F_{ij} = F_{ji} \quad (1-18)$$

Esta relación se conoce como el teorema recíproco para flexibilidades, y muestra que el desplazamiento correspondiente a la i ésima acción y causado por un valor unitario de la j ésima acción es igual al desplazamiento correspondiente a la j ésima acción y causado por un valor unitario de la i ésima acción.*

Una ilustración del teorema recíproco puede obtenerse refiriéndose al ejemplo del final del artículo precedente. Puede verse que en ese ejemplo las flexibilidades F_{12} y F_{21} son iguales y que la matriz de flexibilidad \mathbf{F} es simétrica. Se encontrarán muchos ejemplos adicionales de las relaciones recíprocas en conexión con el método de análisis de la flexibilidad.

En lugar de sustituir la ecuación de desplazamiento $\mathbf{D} = \mathbf{F}\mathbf{A}$ por la expresión del trabajo de las cargas sobre la estructura, es posible comenzar sustituyendo la ecuación de acción $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}$ (véase la Ec. 1-12). Cuando esta relación se sustituye por la segunda expresión para trabajo (véase la Ec. 1-16), el resultado es

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\mathbf{D}'\mathbf{S}\mathbf{D} \quad (c)$$

También, cuando la relación $\mathbf{A}' = \mathbf{D}'\mathbf{S}'$, que se obtiene tomando el trasposo de ambos lados de la ecuación de acción, se sustituye por la primera expresión de trabajo, se obtiene lo siguiente:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\mathbf{D}'\mathbf{S}'\mathbf{D} \quad (d)$$

De las Ecs. (d) y (c) puede verse que la matriz de rigidez es también una matriz simétrica, ya que es la misma que su trasposo:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' \quad (1-19)$$

Por supuesto, el hecho de que \mathbf{S} sea simétrica puede haberse concluido directamente de la simetría de la matriz de flexibilidad \mathbf{F} , ya que la inversa de cualquier matriz simétrica es otra matriz simétrica. De la Ec. (1-19) se ve que el teorema recíproco para rigidez es

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (1-20)$$

Este teorema muestra que la i ésima acción debida a un valor unitario del j ésimo desplazamiento es igual a la j ésima acción debida a un valor unitario del i ésimo desplazamiento. Un ejemplo del teorema recíproco para rigideces también puede verse en el ejemplo al final del artículo anterior, donde las rigideces S_{12} y S_{21} son iguales entre sí, y \mathbf{S} es simétrica.

Las matrices de rigideces son una característica esencial del método de análisis de rigidez, y muchos ejemplos de ellas serán encontrados.

* El teorema recíproco para flexibilidades también se llama *teorema de Maxwell*, ya que el primero en presentarlo fue J. C. Maxwell en 1864.

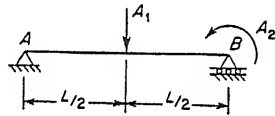
trados en los Caps. 2 y 4. En todos los casos puede verse que existe relación recíproca entre los coeficientes de rigidez cruzados.

PROBLEMAS

① 1.4-1. Una barra prismática está sujeta a fuerzas axiales P iguales y opuestas en cada extremo, las que producen una tensión uniforme en la barra. Defina los desplazamientos que corresponden a estas dos fuerzas P .

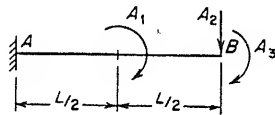
62. → ② 1.4-2. Defina las acciones que corresponden a los desplazamientos Δ_c y θ_c en el marco plano mostrado en la Fig. 1-6.

1.4-3. La viga simplemente apoyada mostrada en la figura tiene una rigidez a la flexión constante EI y una longitud L . Las cargas que actúan sobre la viga son dos acciones A_1 y A_2 , según se ilustra. Obtenga expresiones en términos de A_1 , A_2 , E , I y L para los siguientes temas: (a) el desplazamiento D_{11} correspondiente a la acción A_1 y causado por la acción A_1 actuando sola; (b) el desplazamiento D_{12} correspondiente a la acción A_1 y causado por A_2 actuando sola; y (c) el desplazamiento D_1 correspondiente a A_1 y causado por ambas acciones actuando simultáneamente.



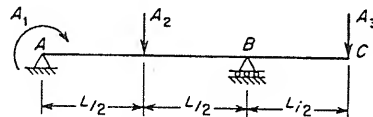
PROB. 1.4-3

① 1.4-4. Para la viga en voladizo mostrada en la figura, determine los desplazamientos D_{11} , D_{21} y D_{31} . Suponga que la viga tiene una rigidez a la flexión constante EI .



PROB. 1.4-4

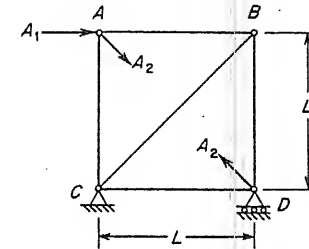
62. → ② 1.4-5. La viga en voladizo mostrada en la figura está sujeta a las cargas A_1 , A_2 y A_3 . Suponiendo una rigidez a la flexión constante EI para la viga, determine los desplazamientos D_{11} , D_{23} y D_{33} .



PROB. 1.4-5

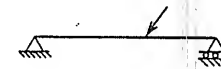
1.4-6. La armadura mostrada en la figura está sujeta a la acción A_1 en la forma de una fuerza horizontal en el nudo A y a una acción A_2 consistente

en dos fuerzas iguales y opuestas en los nudos A y D. Todos los miembros de la armadura son prismáticos y tienen una rigidez axial EA . Determine los desplazamientos D_{11} , D_{12} , D_{21} y D_{22} .



PROB. 1.4-6

1.7-1. (a) ¿Cuál es el grado de indeterminación cinemática para una viga simplemente apoyada? (véase la figura). (b) Si los efectos de las deformaciones axiales se desprecian, ¿cuál es el grado de indeterminación cinemática? (c) y (d) Repita las cuestiones (a) y (b) para una viga en voladizo que esté empotrada en un extremo y libre en el otro.



PROB. 1.7-1

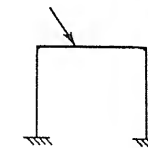
1.7-2. (a) ¿Cuál es el grado de indeterminación estática para la viga continua mostrada en la Fig. 1-1a? (b) ¿Cuál es el grado de indeterminación cinemática? (c) Si los efectos de las deformaciones axiales se desprecian, ¿cuál es el grado de indeterminación cinemática?

1.7-3. (a) Determine el número de grados de indeterminación estática para la armadura plana mostrada en la Fig. 1-1b. (b) Determine el grado de indeterminación cinemática.

1.7-4. ¿Cuál es el grado de indeterminación cinemática para la armadura plana mostrada en la Fig. 1-9?

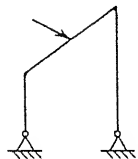
62. → ② 1.7-5. Determine los grados de (a) indeterminación estática y (b) indeterminación cinemática para la armadura en el espacio de la Fig. 1-1c.

① 1.7-6. Repita el Prob. 1.7-2 para el marco plano mostrado en la figura.



PROB. 1.7-6

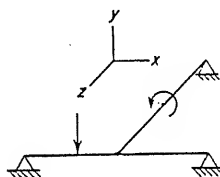
1.7-7. Repita el Prob. 1.7-2 para el marco plano con articulaciones (véase la figura).



PROB. 1.7-7

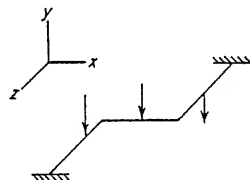
6.4 → ② 1.7-8. Repita el Prob. 1.7-2 para el marco plano mostrado en la Fig. 1-1d.

① 1.7-9. Para la parrilla mostrada en la figura, encuentre (a) el grado de indeterminación estática y (b) el grado de indeterminación cinemática.



PROB. 1.7-9

1.7-10. Resuelva el problema anterior para la parrilla mostrada en la figura.

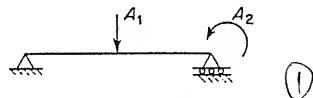


PROB. 1.7-10

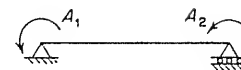
6.4 → ② 1.7-11. Repita el Prob. 1.7-9 para la parrilla mostrada en la Fig. 1-1e.

① 1.7-12. Repita el Prob. 1.7-2 para el marco en el espacio representado en la Fig. 1-1f. a) 30 b) 36 c) 28

1.10-1 a 1.10-10. Ilustre, mediante esquemas el significado físico de los coeficientes de flexibilidad y rigidez correspondientes a las acciones mostradas en las figuras.

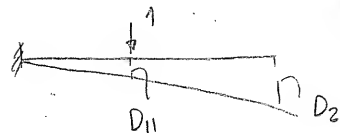


PROB. 1.10-1

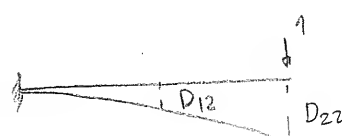
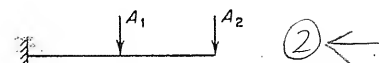


PROB. 1.10-2

FLEX: D_{11} $\alpha = 1$

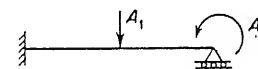


PROB. 1.10-3

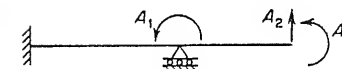
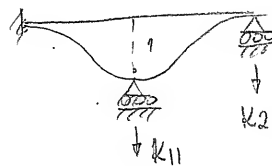


PROB. 1.10-4

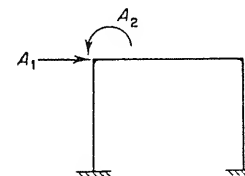
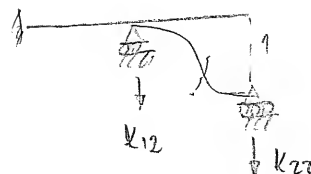
RIG: D_{11} $D = 1$



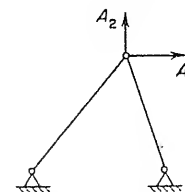
PROB. 1.10-5



PROB. 1.10-6

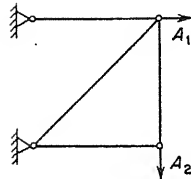


PROB. 1.10-7

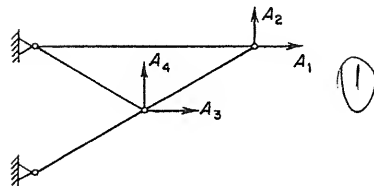


PROB. 1.10-8

② ←



PROB. 1.10-9



PROB. 1.10-10

CAPITULO 2

INTRODUCCION A LOS METODOS DE LA FLEXIBILIDAD Y DE LA RIGIDEZ

2.1. Introducción. En este capítulo se introducen los conceptos básicos de los métodos de la flexibilidad y de la rigidez (también llamados métodos de la acción y del desplazamiento, respectivamente). Estos métodos son aplicables generalmente a todos los tipos de estructura, incluyendo aquellos formados de vigas, columnas, placas, cascarones y otros elementos estructurales. Sin embargo, todas las estructuras que se analizarán en este libro son estructuras reticulares, como se describió anteriormente en el Art. 1.2. Las estructuras reticulares son probablemente las más comúnmente encontradas en la práctica de la ingeniería y, proporcionan ejemplos excelentes con los cuales ilustrar las ideas básicas de los métodos de la flexibilidad y de la rigidez. Ambos métodos son fundamentales en concepto e involucran formulaciones matemáticas similares, como se apuntará en los artículos posteriores.

La formulación de los dos métodos se hace mediante álgebra matricial, ya que hace posible tratar en términos generales desde el principio, aunque los primeros problemas por resolver son muy sencillos y están formulados solamente para ilustrar los conceptos básicos. Sin embargo, la expresión de los métodos en términos matriciales permite una generalización inmediata a estructuras muy complicadas, y ésta es una de las ventajas principales de la notación matricial. También, el uso de matrices, plantea el problema en una forma ideal para programación en una computadora digital. Este hecho representa probablemente la primera motivación para utilizar los métodos de la flexibilidad y de la rigidez en la forma que se utiliza.

Finalmente, debe comprenderse que los métodos de la flexibilidad y de la rigidez pueden organizarse hasta formar un procedimiento altamente sistematizado para el análisis de una estructura. Una vez que se han comprendido los conceptos básicos del procedimiento, los métodos pueden aplicarse a estructuras de cualquier grado de dificultad. Así, el objetivo de los últimos capítulos es desarrollar procedimientos sistemáticos para analizar cada clase de estructuras

reticulares, incluyendo vigas, armaduras, parrillas y marcos. Estos procedimientos pueden programarse para una computadora digital. Después de hacer esto, cualquier estructura dentro de las estructuras bajo consideración puede analizarse por medios automáticos.

2.2. El método de la flexibilidad. El primero de los dos métodos por describirse es el de la flexibilidad, el que puede utilizarse para analizar cualquier estructura estáticamente indeterminada. Para ilustrar las ideas fundamentales del método, consideremos el ejemplo mostrado en la Fig. 2-1a. La viga ABC de la figura tiene dos claros de igual longitud y está sometida a una carga uniforme de intensidad w . La viga es estáticamente indeterminada de primer grado, ya que hay cuatro reacciones posibles (dos reacciones en A, una en B y otra en C) y tres ecuaciones de equilibrio estático para acciones en un plano. La reacción R_B en el apoyo interior se tomará como la redundante estática, aunque existen otras posibilidades. Si se suelta esta redundante, se obtiene una *estructura libre*.* En este caso, la estructura libre es la viga simplemente apoyada mostrada en la Fig. 2-1b.

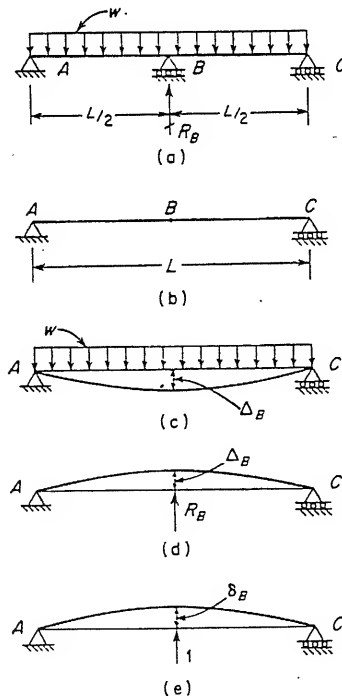


FIG. 2-1. Ilustración del método de la flexibilidad

* Algunos autores la llaman "Estática Fundamental". (N. del T.).

Bajo la acción de la carga uniforme w , la estructura libre se deforma como se ilustra en la Fig. 2-1c. El desplazamiento de la viga en el Punto B se denomina por Δ_B y está dado por la expresión (véase la Tabla A-3 del Apéndice A):

$$\Delta_B = \frac{5wL^4}{384EI}$$

en donde EI es la rigidez a la flexión de la viga. Sin embargo, la viga real se supone que no tiene translación (esto es, no tiene asentamiento) en el punto B. Por lo tanto, la reacción redundante R_B debe ser tal que produzca en la estructura libre un desplazamiento hacia arriba igual a Δ_B (véase la Fig. 2-1d). De acuerdo con el principio de superposición, el desplazamiento final en el punto B en la estructura libre es la resultante de los desplazamientos causados por la carga w y la redundante R_B . El desplazamiento hacia arriba debido a R_B es

$$\Delta_B = \frac{R_B L^3}{48EI}$$

según se obtiene de la Tabla A-3 del Apéndice. Igualando estas dos expresiones obtenidas anteriormente para Δ_B se tiene

$$\frac{5wL^4}{384EI} = \frac{R_B L^3}{48EI} \quad (2-1)$$

La reacción incógnita R_B puede obtenerse resolviendo la Ec. (2-1):

$$R_B = \frac{5}{8}wL$$

Una vez encontrada R_B , las reacciones restantes de la viga de dos claros pueden encontrarse mediante las ecuaciones de equilibrio estático.

En el ejemplo anterior, el procedimiento fue calcular desplazamientos en la estructura libre causados por las cargas y por la acción redundante y después formular una ecuación relacionada con estos desplazamientos. La Ec. (2-1) expresa el hecho de que el desplazamiento vertical debido a la carga es igual al desplazamiento hacia arriba debido a la redundante. En general, una ecuación de este tipo puede llamarse una *ecuación de compatibilidad*, debido a que expresa una condición relacionada con los desplazamientos de la estructura. También puede llamarse una *ecuación de superposición*, ya que está basada sobre la superposición de los desplazamientos causados por más de una acción. Otro nombre podría ser *ecuación de geometría*, debido a que la ecuación expresa una condición relacionada con la geometría de la estructura.

Un acercamiento más general que puede utilizarse en la resolución de la viga de dos claros de la Fig. 2-1a consiste en encontrar

el desplazamiento producido por un valor unitario de R_B y luego multiplicar este desplazamiento por R_B para encontrar el desplazamiento causado por R_B . También es más general y sistemático utilizar una convención de signos consistentes para las acciones y desplazamientos en B . Por ejemplo, puede suponerse que tanto el desplazamiento en B como la reacción en B son positivos cuando son hacia arriba. Luego la aplicación de una fuerza unitaria (correspondiente a R_B) a la estructura libre, como se muestra en la Fig. 2-1e, da como resultado un desplazamiento positivo δ_B . Este desplazamiento está dado por la expresión

$$\delta_B = \frac{L^3}{48EI} \quad (2-2)$$

El desplazamiento causado por R_B actuando sola sobre la estructura libre es $\delta_B R_B$. El desplazamiento causado por la carga uniforme w actuando sola sobre la estructura libre es

$$\Delta_B = -\frac{5wL^4}{384EI} \quad (2-3)$$

Este desplazamiento es negativo debido a que Δ_B se supone ser positiva cuando es hacia arriba. La superposición de los desplazamientos debidos a la carga w y a la reacción R_B debe producir un desplazamiento igual a cero de la viga en el punto B . Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad es

$$\Delta_B + \delta_B R_B = 0 \quad (2-4)$$

de donde

$$R_B = -\frac{\Delta_B}{\delta_B} \quad (2-5)$$

Cuando las expresiones dadas anteriormente para Δ_B y δ_B (véanse las Ecs. 2-2 y 2-3) se sustituyen en la Ec. (2-5), el resultado es

$$R_B = \frac{5}{8}wL$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente. El signo positivo en el resultado denota el hecho de que R_B está hacia arriba.

Una parte importante de la solución precedente consiste en escribir la ecuación de superposición (Ec. 2-4) que expresa el hecho geométrico de que la viga no sufre deflexión en el apoyo B . Incluidos en esta ecuación están los efectos de la carga y de la reacción redundante. El desplazamiento causado por la reacción ha sido expresado convencionalmente como el producto de la reacción y el desplazamiento causado por un valor unitario de la reacción. El último es un

↓
 δ_B

coeficiente de influencia de flexibilidad, ya que es el desplazamiento debido a una acción unitaria. Si todos los términos de la ecuación se expresan con la misma convención de signos, luego el signo del resultado final denotará la dirección verdadera de la acción redundante.

Si una estructura es estáticamente indeterminada de un grado mayor al primero, el acercamiento utilizado en el ejemplo anterior debe organizarse un poco más, y se debe introducir una notación más generalizada. Para ilustrar estas características, se considerará otro ejemplo de viga prismática (véase la Fig. 2-2a). La viga mostrada en la figura es estáticamente indeterminada de segundo grado, por lo tanto, una estructura libre estáticamente determinada puede obtenerse liberando de la viga dos acciones redundantes. Se pueden escoger diferentes acciones para las redundantes y la estructura libre correspondiente. En las Figs. 2-2b, 2-2c, 2-2d y 2-2e se muestran cuatro de estas posibilidades para la estructura libre. En la primera de estas figuras, el momento reactivo en A y la fuerza en B se toman como las redundantes; por lo tanto, la restricción rotacional en A y la restricción rotacional en B se eliminan de la viga original para obtener la estructura libre. En el siguiente caso (Fig. 2-2c) el momento reactivo en A y el momento flexionante interno en B se sueltan. Por lo tanto, la estructura libre no tiene restricción rotacional en A ni restricción contra el momento flexionante en B . La última condición se representa por la presencia de una articulación en la viga en el punto B . La estructura libre mostrada en la Fig. 2-2d se obtiene soltando la reacción y el momento flexionante en el punto B . Finalmente, la estructura libre mostrada en la Fig. 2-2e se obtiene seleccionando las reacciones en los nudos B y C como las redundantes. Esta estructura libre en particular es la seleccionada para el análisis que sigue, aunque cualquiera de las otras podrían ser apropiadas. Todas las estructuras libres mostradas en la Fig. 2-2 son estáticamente determinadas e inmóviles. En general, sólo estructuras de este tipo serán utilizadas en las discusiones del método de la flexibilidad.

Las acciones redundantes que son seleccionadas para el análisis se denominan Q_1 y Q_2 en la Fig. 2-2a. Estas acciones son las fuerzas reactivas en los nudos B y C . En la Fig. 2-2f se muestra la estructura libre sujeta a las varias cargas que actúan sobre la viga original, las que en este ejemplo se suponen ser tres cargas concentradas P_1 , P_2 y P_3 , y un par M . Estas cargas producen desplazamientos en la estructura libre y, en particular, los desplazamientos que corresponden a Q_1 y Q_2 se producen en los nudos B y C . Estos desplazamientos se denominan D_{QL1} y D_{QL2} , en la figura. En esta notación el símbolo

D_{QL} se utiliza para representar un desplazamiento correspondiente a una redundante Q y causado por las cargas sobre la estructura. Los subíndices numéricos que siguen al símbolo denotan la redundante a la que corresponde el desplazamiento. Así, es conveniente visualizar a D_{QL} como un símbolo, en tanto que los números que siguen a ese símbolo son los subíndices.* En la Fig. 2-2f los desplazamientos

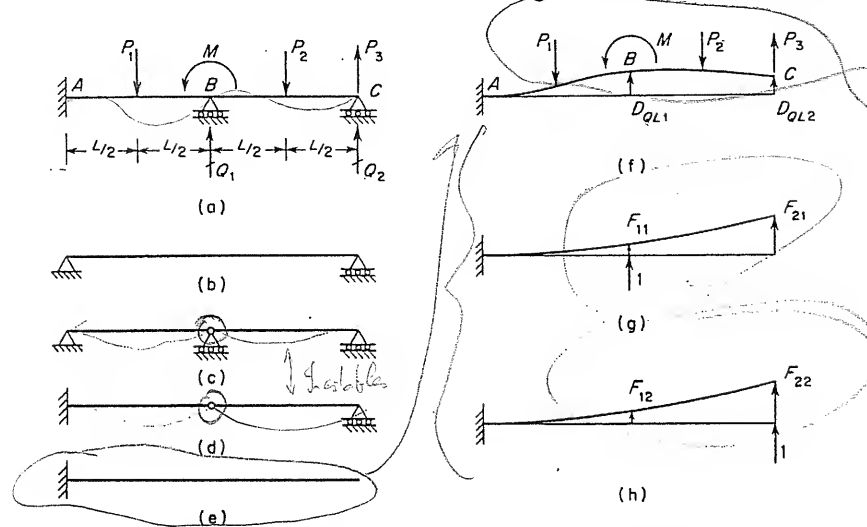


FIG. 2-2. Ilustración del método de la flexibilidad

D_{QL} se muestran en su dirección positiva supuesta, la que es hacia arriba. Las direcciones positivas para los desplazamientos deben ser siempre las mismas que las direcciones positivas de las redundantes a las que corresponden los desplazamientos. Como se supone que las redundantes son positivas cuando van hacia arriba, los desplazamientos también serán positivos hacia arriba.

Para obtener los diferentes coeficientes de influencia de flexibilidad que aparecen en las ecuaciones de compatibilidad, se aplican valores unitarios de las redundantes Q_1 y Q_2 a la estructura libre. Para la condición $Q_1 = 1$ mostrada en la Fig. 2-2g, el coeficiente de flexibilidad F_{11} es el desplazamiento correspondiente a Q_1 debido a un valor unitario de Q_1 , y el coeficiente F_{21} es el desplazamiento correspondiente a Q_2 debido a un valor unitario de Q_1 . Para la condición $Q_2 = 1$ mostrada en la Fig. 2-2h, F_{12} es el desplazamiento correspondiente a Q_1 debido a un valor unitario de Q_2 y F_{22} es el desplazamiento

* En la programación de computadoras, el símbolo D_{QL} se escribe DQL debido a la necesidad de que todos los caracteres, sean alfabéticos o numéricos, estén en la misma línea. Cuando se tienen subíndices, pueden aumentarse al símbolo básico. Por ejemplo, en un programa de computación $DQL(1)$ es el modo usual de escribir D_{QL1} . Se puede utilizar un estilo similar para los otros símbolos que se encuentran en el presente trabajo.

to correspondiente a Q_2 debido a un valor unitario de Q_2 . Los coeficientes de flexibilidad se muestran en sus direcciones positivas.

Las ecuaciones de superposición que expresan las condiciones de compatibilidad en los nudos B y C de la viga real pueden ahora escribirse. Como los desplazamientos traslacionales (deflexiones) en los apoyos B y C son cero, las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} D_{QL1} + F_{11}Q_1 + F_{12}Q_2 &= 0 \\ D_{QL2} + F_{21}Q_1 + F_{22}Q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2-6)$$

La primera de estas ecuaciones representa el desplazamiento total en B, que está formado por tres partes: el desplazamiento debido a las cargas, el desplazamiento debido a Q_1 y el desplazamiento debido a Q_2 . La superposición de los tres desplazamientos da el desplazamiento total, que es igual a cero. Se aplican comentarios similares a la segunda ecuación. Las dos ecuaciones pueden resolverse simultáneamente para Q_1 y Q_2 , después de esto se pueden encontrar por estática las otras acciones en la viga.

Es deseable en esta etapa de la discusión escribir las ecuaciones de superposición de una forma un poco más general. Siempre es posible que los movimientos de los apoyos correspondientes a las redundantes tengan lugar en la viga original, y estos desplazamientos pueden incluirse rápidamente en el análisis. Supongamos que D_{Q1} y D_{Q2} representen los desplazamientos reales en viga correspondiente a Q_1 y Q_2 . Por lo tanto, D_{Q1} representa el desplazamiento del apoyo en B, con la dirección hacia arriba como positiva. Similarmente, D_{Q2} es el desplazamiento del apoyo en C. Las ecuaciones de superposición expresan el hecho de que los desplazamientos finales correspondientes a Q_1 y Q_2 son iguales a las sumas de los desplazamientos causados por las cargas y las redundantes; por lo tanto, las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} D_{Q1} &= D_{QL1} + F_{11}Q_1 + F_{12}Q_2 \\ D_{Q2} &= D_{QL2} + F_{21}Q_1 + F_{22}Q_2 \end{aligned} \quad (2-7)$$

Si no existen desplazamientos de los apoyos, como se supuso en este problema, D_{Q1} y D_{Q2} son ambos cero, y las Ecs. (2-7) se reducen a las Ecs. (2-6). Si existen desplazamientos de los apoyos que no correspondan a una redundante, tal como un desplazamiento en el nudo A, deben manejarse por los métodos descritos en el Art. 2.4.

Las ecuaciones de superposición (2-7) pueden escribirse en forma matricial como

$$D_Q = D_{QL} + FQ \quad (2-8)$$

en donde D_Q es la matriz de los desplazamientos reales correspondientes a las redundantes, D_{QL} es la matriz de los desplazamientos de la estructura libre correspondientes a las acciones redundantes Q y

debidos a las cargas, y F es la matriz de flexibilidad para la estructura libre correspondiente a las acciones redundantes Q . Para las ecuaciones dadas anteriormente, estas matrices son:

$$D_Q = \begin{bmatrix} D_{Q1} \\ D_{Q2} \end{bmatrix} \quad D_{QL} = \begin{bmatrix} D_{QL1} \\ D_{QL2} \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Debe notarse que un símbolo alternativo (y más consistente) para un coeficiente de flexibilidad F sería D_{qq} , que representa un desplazamiento en la estructura libre correspondiente a una redundante Q y causado por un valor unitario de una redundante Q . Por lo tanto, la matriz F también podría identificarse como D_{qq} para tener una notación consistente, pero el uso de F para "flexibilidad" es más conveniente.

El vector Q de redundantes puede obtenerse resolviendo la Ec. (2-8); así:

$$Q = F^{-1}(D_Q - D_{QL}) \quad (2-9)$$

en donde F^{-1} representa a la inversa de la matriz de flexibilidad. De esta ecuación las redundantes pueden calcularse después de obtener las matrices D_Q , D_{QL} y F . La primera de estas matrices será conocida para las condiciones de apoyo que existen en la estructura original, en tanto que las otras dos se calculan a partir de las propiedades de la estructura libre. El problema puede considerarse resuelto cuando se conoce la matriz Q , ya que todas las otras acciones pueden ser determinadas por el equilibrio estático. Cuando las acciones de toda la estructura han sido determinadas, los desplazamientos en cualquier punto también pueden encontrarse. Un método para incorporar en el análisis el cálculo de las acciones y los desplazamientos en varios puntos de estructura está dado en el Art. 2.5. (pág 38)

La matriz D_Q normalmente será una matriz nula O (esto es, una matriz con todos los elementos iguales a cero), excepto cuando una o más de las redundantes es una reacción del apoyo que tiene un desplazamiento del apoyo correspondiente. Si la matriz D_Q es nula, la Ec. (2-9) para las acciones redundantes Q queda

$$Q = F^{-1}(O - D_{QL}) = -F^{-1}D_{QL} \quad (2-10)$$

Esta ecuación puede utilizarse en lugar de la Ec. (2-9) siempre que los desplazamientos D_Q sean cero. El método de manejar un desplazamiento de los apoyos cuando no existe una acción redundante correspondiente a ese desplazamiento está explicado en el Art. 2.4. (pág 32)

Para mostrar el uso de las ecuaciones matriciales dadas anteriormente, consideremos de nuevo la viga de la Fig. 2-2a. Para tener un ejemplo específico, supongamos que la viga tiene una rigidez a

la flexión constante EI en los dos claros y que las acciones sobre la viga son las siguientes:

$$P_1 = 2P \quad M = PL \quad P_2 = P \quad P_3 = P$$

También, supongamos que no existen desplazamientos de los apoyos en ninguno de los apoyos de la estructura.

Las matrices que deben encontrarse primero en el análisis son D_Q , D_{QL} y F , como ya mencionamos anteriormente. Como en la viga original no existen desplazamientos correspondientes a Q_1 y Q_2 , la matriz D_Q es una matriz nula. La matriz D_{QL} representa los desplazamientos de la estructura libre correspondientes a las redundantes y causados por las cargas. Estos desplazamientos se encuentran considerando la Fig. 2-2f, que muestra la estructura libre bajo la acción de las cargas. Los desplazamientos en la viga correspondientes a Q_1 y Q_2 pueden encontrarse por los métodos descritos en el Apéndice A (pág 489) (véase el Ej. 3, Art. A.2), y los resultados son:

$$D_{QL1} = \frac{13PL^3}{24EI} \quad D_{QL2} = \frac{97PL^3}{48EI}$$

Los signos positivos de estas expresiones muestran que los dos desplazamientos son hacia arriba. De los resultados dados anteriormente, se puede obtener el vector D_{QL} ;

$$D_{QL} = \frac{PL^3}{48EI} \begin{bmatrix} 26 \\ 97 \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad F se encuentra refiriéndose a las vigas representadas en las Figs. 2-2g y 2-2h. La viga de la Fig. 2-2g, que está sujeta a una carga unitaria correspondiente a Q_1 , tiene desplazamientos dados por las expresiones

$$F_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad F_{21} = \frac{5L^3}{6EI}$$

$$\text{Log} = (2L) \cdot 5(1) \cdot \frac{L^3}{6EI}$$

Similarmente, los desplazamientos en la viga de la Fig. 2-2h son

$$F_{12} = \frac{5L^3}{6EI} \quad F_{22} = \frac{8L^3}{3EI}$$

$$\frac{2^3 L^3}{3EI} \rightarrow \text{Log} = (2L)$$

De los resultados obtenidos anteriormente, puede formarse la matriz de flexibilidad:

$$F = \frac{L^3}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz de flexibilidad puede encontrarse por cualquiera de varios métodos establecidos,* siendo el resultado

$$F^{-1} = \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Debe notarse que tanto la matriz de flexibilidad como su inversa son matrices simétricas.

Como el paso final en el análisis, las Ecs. (2-10) pueden utilizarse para obtener las acciones redundantes Q , de la manera siguiente:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = -\frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \frac{PL^3}{48EI} \begin{bmatrix} 26 \\ 97 \end{bmatrix} = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 69 \\ -64 \end{bmatrix}$$

De esta expresión puede verse que las reacciones verticales en los apoyos B y C de la viga de la Fig. 2-2a son

$$Q_1 = \frac{69P}{56} \quad Q_2 = -\frac{8P}{7}$$

El signo negativo de Q_2 indica que esta reacción es hacia abajo.

Las acciones redundantes se han obtenido de la manera mostrada en este ejemplo, las acciones restantes en la viga pueden encontrarse a partir de las ecuaciones de equilibrio estático. También, los desplazamientos en cualquier punto de la viga pueden obtenerse ahora sin ninguna dificultad, ya que todas las acciones pueden considerarse como conocidas. Por ejemplo, un método de encontrar desplazamientos es subdividir la viga en dos vigas simplemente apoyadas. Cada viga está actuada por momentos desconocidos en los extremos así como por las cargas, y se pueden calcular los desplazamientos.

Aunque las ecuaciones matriciales del método de la flexibilidad (Ecs. 2-8, 2-9 y 2-10) fueron obtenidas de la discusión de la viga de dos claros de la Fig. 2-2, son en realidad completamente generales. Pueden aplicarse a cualquier estructura reticular estáticamente indeterminada de cualquier grado. Por supuesto, en este caso las matrices que aparecen en las ecuaciones serán de orden diferente a las de la viga de dos claros. En general, si se tienen n grados de indeterminación estática, el orden de la matriz de flexibilidad F será $n \times n$, y el orden de todas las otras matrices será $n \times 1$. En el siguiente artículo se dan varios ejemplos en que se encuentran acciones redundantes mediante el método de la flexibilidad.

* Véase, por ejemplo, J. M. Gere y W. Weaver, Jr., *Matrix Algebra for Engineers*, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1965.

2.3. Ejemplos. Para ilustrar la aplicación del método de flexibilidad a estructuras de diferentes tipos, se dan varios ejemplos en este artículo. En cada ejemplo se supone que el objeto del análisis es calcular los valores de ciertas redundantes que se han seleccionado; por lo tanto, el problema se considera resuelto cuando se ha determinado la matriz Q . Las redundantes se han seleccionado en cada ejemplo, principalmente con fines ilustrativos; sin embargo, son posibles muchas otras selecciones de redundantes.

EJEMPLO 1. La viga AB mostrada en la Fig. 2-3a está empotrada en sus dos extremos y está sujeta a una carga concentrada P y a un par M en el centro del claro. Se supone que la viga tiene una rigidez a la flexión constante EI .

Para empezar el análisis por el método de la flexibilidad, deben seleccionarse dos acciones redundantes. En este ejemplo se seleccionaron la reacción vertical y el momento reactivo en el extremo B de la viga, y en la Fig. 2-3a se denominan Q_1 y Q_2 , respectivamente. La redundante Q_1 se supone positiva en la dirección hacia arriba, y Q_2 se considera positiva en la dirección de las manecillas del reloj. Otras selecciones posibles para las redundantes incluyen los momentos reactivos en los dos extremos y el momento flexionante y la fuerza cortante en cualquier sección de la viga.

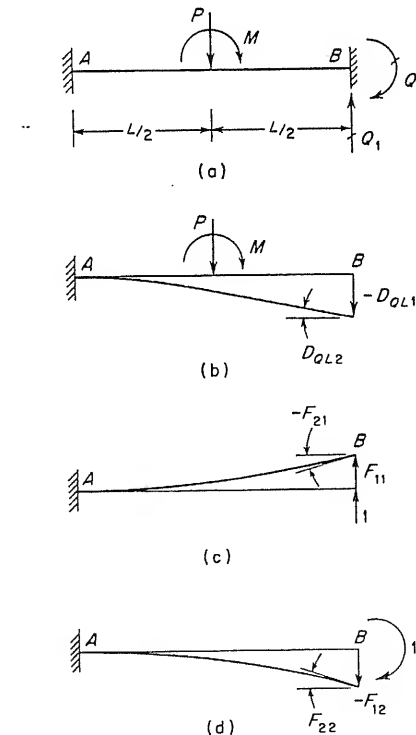


FIG. 2-3. Ej. 1: Viga doblemente empotrada

Para las redundantes mostradas en la Fig. 2-3a la estructura libre consiste en una viga en voladizo (véase la Fig. 2-3b). Los desplazamientos en esta viga correspondientes a Q_1 y Q_2 y causados por las cargas P y M se denominan D_{QL1} y D_{QL2} en la figura. Las direcciones positivas para estos desplazamientos son las mismas que para Q_1 y Q_2 . Puesto que el desplazamiento D_{QL1} está dibujado en la dirección negativa, está afectado con un signo menos. Sin embargo, D_{QL2} está mostrado en la dirección positiva (manecillas del reloj). Los desplazamientos pueden encontrarse con auxilio de la Tabla A-3 del Apéndice, y son los siguientes:

$$D_{QL1} = -\frac{5PL^3}{48EI} - \frac{3ML^2}{8EI}$$

$$D_{QL2} = \frac{PL^2}{8EI} + \frac{ML}{2EI}$$

Por lo tanto, el vector D_{QL} puede escribirse como

$$D_{QL} = \frac{L}{48EI} \begin{bmatrix} (-5PL^2 - 18ML) \\ (6PL + 24M) \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de influencia de la flexibilidad son los desplazamientos de la estructura libre causados por valores unitarios de Q_1 y Q_2 , como se muestra en las Figs. 2-3c y 2-3d. Estos coeficientes son los siguientes:

$$F_{11} = \frac{L^3}{3EI} \quad F_{12} = F_{21} = -\frac{L^2}{2EI} \quad F_{22} = \frac{L}{EI}$$

Puede escribirse ahora la matriz de flexibilidad F , después de lo cual puede determinarse su inversa; estas matrices son:

$$F = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & -3L \\ -3L & 6 \end{bmatrix} \quad F^{-1} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L \\ 3L & 2L^2 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos en la viga doblemente empotrada (Fig. 2-3a) correspondientes a Q_1 y Q_2 son ambos cero, ya que no existe traslación vertical ni rotación en el apoyo B. Por lo tanto, la matriz D_Q es una matriz nula, y las redundantes pueden encontrarse a partir de la Ec. (2-10). Sustituyendo en esa ecuación tenemos las siguientes:

$$Q = -\frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L \\ 3L & 2L^2 \end{bmatrix} \frac{L}{48EI} \begin{bmatrix} (-5PL^2 - 18ML) \\ (6PL + 24M) \end{bmatrix} = \frac{1}{8L} \begin{bmatrix} (4PL + 12M) \\ (PL^2 + 2ML) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la fuerza y el momento reactivos en el extremo B de la viga (véase la Fig. 2-3a) están dados por las siguientes expresiones:

$$Q_1 = \frac{P}{2} + \frac{3M}{2L} \quad Q_2 = \frac{PL}{8} + \frac{M}{4}$$

Estos resultados pueden confirmarse por comparación con las fórmulas dadas en el Apéndice B (véanse los Casos 1 y 2 de la Tabla B-1).

EJEMPLO 2. La viga continua de tres claros mostrada en la Fig. 2-4a tiene una rigidez a la flexión constante EI y está sujeta a una carga uniforme w en el claro AB y cargas concentradas P en los puntos medios de los cla-

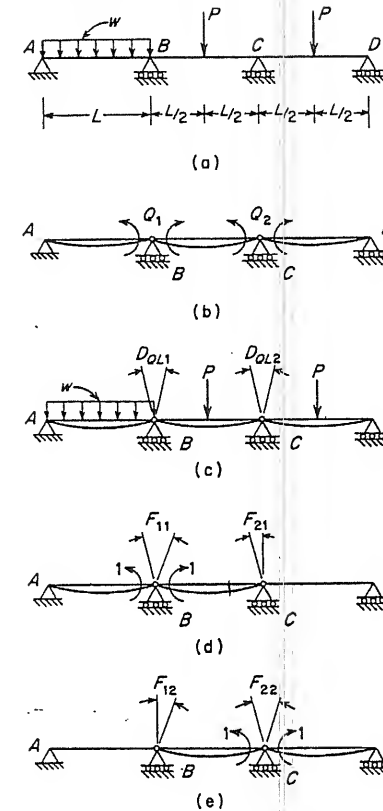


FIG. 2-4. Ej. 2: Viga continua

ros BC y CD. Como la estructura es estáticamente indeterminada de segundo grado, deben seleccionarse dos acciones redundantes. En este ejemplo, los momentos flexionantes en los nudos B y C son los escogidos. Cuando estos momentos se eliminan de la viga colocando articulaciones en B y C, se ve que la estructura libre consiste de tres vigas simplemente apoyadas (Fig. 2-4b). Los momentos redundantes Q_1 y Q_2 se muestran actuando en sus direcciones positivas en la Fig. 2-4b. Cada redundante consiste de dos pares, uno actuando en cada claro adyacente de la estructura. Por ejemplo, el par izquierdo en Q_1 actúa en la viga AB en la dirección opuesta a las manecillas del reloj, en tanto que el par de la derecha en Q_1 actúa en el claro BC en el sentido de las manecillas del reloj. La dirección positiva de cada Q corresponde a la de un momento flexionante que produce compresión en la parte superior de la viga. Por lo tanto, un signo positivo en la solución final para Q_1 o para Q_2 significa que el momento redundante produce compresión en la parte superior de la viga; si es negativo, el momento redundante produce tensión en la parte superior de la viga.

El desplazamiento correspondiente a uno de los momentos redundantes consiste de la suma de dos rotaciones, una en cada claro adyacente. Por ejem-

plo, el desplazamiento correspondiente a Q_1 está formado por la rotación en contra de las manecillas del reloj en el nudo B del extremo derecho del miembro AB más la rotación en sentido de las manecillas en el nudo B del extremo izquierdo del miembro BC. De modo similar, el desplazamiento correspondiente a Q_2 es la suma de las dos rotaciones en el nudo C.

Los desplazamientos D_{QL1} y D_{QL2} correspondientes a Q_1 y Q_2 , respectivamente, y causados por las cargas que actúan en la estructura libre, se muestran en la Fig. 2-4c. Como la rotación en sentido opuesto a las manecillas del reloj en el extremo B del miembro AB debido a la carga uniforme w es

$$\frac{wL^3}{24EI}$$

y puesto que la rotación en el sentido de las manecillas del extremo B del miembro BC debida a la carga P es

$$\frac{PL^2}{16EI}$$

se sigue que el desplazamiento D_{QL1} es

$$D_{QL1} = \frac{wL^3}{24EI} + \frac{PL^2}{16EI}$$

De modo similar, el desplazamiento D_{QL2} es

$$D_{QL2} = \frac{PL^2}{16EI} + \frac{PL^2}{16EI} = \frac{PL^2}{8EI}$$

Por lo tanto, el vector D_{QL} puede escribirse

$$D_{QL} = \frac{L^2}{48EI} \begin{bmatrix} (2wL + 3P) \\ 6P \end{bmatrix}$$

A continuación debemos encontrar la matriz de flexibilidad. Para este propósito, se muestran valores unitarios de Q_1 y Q_2 actuando sobre las vigas en las Figs. 2-4d y 2-4e. El coeficiente de flexibilidad F_{11} (véase la Fig. 2-4d) es la suma de las dos rotaciones en el nudo B; una rotación es en el claro AB y la otra es en el claro BC. De modo similar, el coeficiente F_{21} es la suma de la rotación en el nudo C. En la Fig. 2-4d, sin embargo, la rotación en el claro CD es igual a cero. Por lo tanto, F_{21} es igual a la rotación en el claro BC solo. Comentarios similares se pueden aplicar a los coeficientes de flexibilidad mostrados en la Fig. 2-4e. Las rotaciones producidas en los extremos de una viga simplemente apoyada por un par de valor unitario aplicado en un extremo de la viga son

$$\frac{L}{3EI} \quad \text{y} \quad \frac{L}{6EI}$$

en el extremo próximo y en el extremo lejano del claro, respectivamente, como se da en el Caso 5, Tabla A-3. De estas fórmulas los coeficientes de flexibilidad mostrados en las Figs. 2-4d y 2-4e pueden obtenerse de la manera siguiente:

$$F_{11} = \frac{2L}{3EI} \quad F_{12} = \frac{L}{6EI}$$

$$F_{21} = \frac{L}{6EI} \quad F_{22} = \frac{2L}{3EI}$$

Por lo tanto, la matriz de flexibilidad es

$$F = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

y su inversa es

$$F^{-1} = \frac{2EI}{5L} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos D_{Q1} y D_{Q2} en la viga original (Fig. 2-4a) correspondientes a Q_1 y Q_2 , respectivamente, son ambos cero debido a que la viga es continua en los apoyos B y C. Por lo tanto, la matriz D_Q es nula y la Ec. (2-10) puede utilizarse para determinar las redundantes, como se muestra:

$$Q = -\frac{2EI}{5L} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \frac{L^2}{48EI} \begin{bmatrix} (2wL + 3P) \\ 6P \end{bmatrix} = -\frac{L}{120} \begin{bmatrix} (8wL + 6P) \\ (-2wL + 21P) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los momentos flexionantes redundantes Q_1 y Q_2 están dados por las fórmulas siguientes:

$$Q_1 = -\frac{wL^2}{15} - \frac{PL}{20} \quad Q_2 = \frac{wL^2}{60} - \frac{7PL}{40}$$

Habiendo obtenido estos momentos en los apoyos, los momentos flexionantes restantes en la viga, así como las fuerzas cortantes y las reacciones, pueden encontrarse por estática.

EJEMPLO 3. La armadura plana mostrada en la Fig. 2-5a es estáticamente indeterminada de segundo grado. La reacción horizontal en el apoyo B (positiva hacia la derecha) y la fuerza axial en la barra AD (positiva en tensión) se seleccionaron como las redundantes, dando como resultado la estructura libre mostrada en la Fig. 2-5b. En la estructura libre el apoyo B ha sido eliminado, soltando, por lo tanto, la fuerza reactiva Q_1 , y la barra AD se cortó en algún lugar intermedio para soltar la fuerza axial Q_2 en la barra. Se pueden tomar muchas otras combinaciones de fuerzas de barra y reacciones como redundantes en este ejemplo, y cada una daría una estructura libre diferente. En todos los casos en que la fuerza de una barra se seleccione como una redundante, la barra debe cortarse para obtener la estructura libre. La barra cortada forma entonces parte de la estructura libre, ya que sus deformaciones deben incluirse en el cálculo de los desplazamientos en la estructura libre. Debe observarse que Q_2 está formada por un par de fuerzas que actúan sobre la estructura libre. Este tipo de redundante es análoga a las descritas en el Ej. 2, donde un momento flexionante redundante se consideró como un par de pares actuando en la estructura libre (véase la Fig. 2-4b). De esta discusión se sigue que un desplazamiento correspondiente a Q_2 está formado de una translación relativa de los extremos cortados de la barra AD. Cuando los extremos corta-

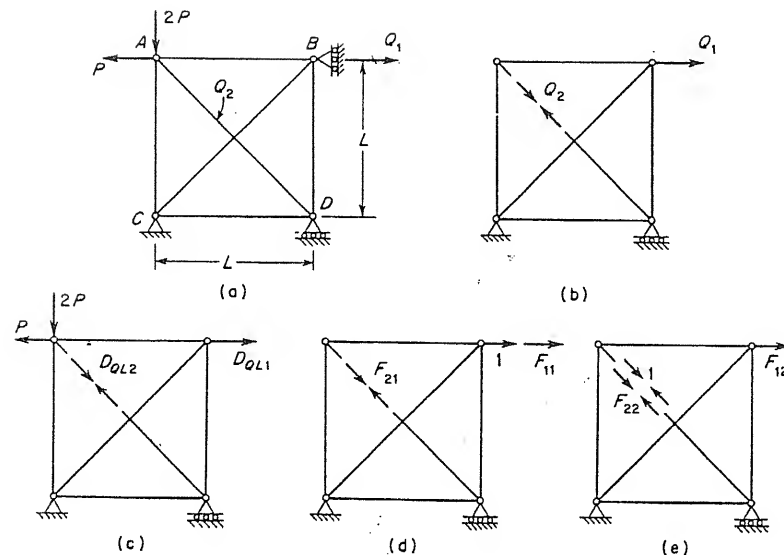


FIG. 2-5. Ej. 3: Armadura plana

dos se desplazan uno hacia el otro, el desplazamiento tiene la misma dirección que Q_2 , y por lo tanto es positivo. Cuando los extremos cortados se separan, el desplazamiento es negativo.

La primera etapa en el análisis consiste en determinar los desplazamientos en la estructura libre correspondiente a Q_1 y Q_2 y debidos a las cargas P y $2P$ que actúan en el nudo A. Estos desplazamientos se denominan D_{Q1} y D_{Q2} y están representados por vectores en la Fig. 2-5c. Este modo de representar los desplazamientos es utilizado en vez de dibujar la elástica de la estructura, lo que puede ser muy difícil para estructuras complicadas. La determinación de estos desplazamientos puede llevarse a cabo por el método de la carga unitaria, como se ilustró en el Ej. 1 del Ar. A.2 del Apéndice. Suponiendo que todos los miembros de la armadura tengan la misma rigidez axial EA , se encuentra que los desplazamientos debidos a las cargas P y $2P$ son

$$D_{Q1} = -\frac{PL}{EA}(1 + 2\sqrt{2}) = -3.828 \frac{PL}{EA}$$

$$D_{Q2} = -2 \frac{PL}{EA}$$

Por lo tanto, el vector D_{QL} es

$$D_{QL} = -\frac{PL}{EA} \begin{bmatrix} 3.828 \\ 2 \end{bmatrix}$$

El signo menos para D_{Q1} significa que es un desplazamiento hacia la izquierda, y el signo menos para D_{Q2} significa que los extremos cortados de las barras se separan entre sí.

El siguiente paso en el análisis involucra la determinación de los desplazamientos en la estructura libre correspondiente a Q_1 y Q_2 y causados por valores unitarios de Q_1 y Q_2 . Tales desplazamientos constituyen la matriz de flexibilidad F y pueden encontrarse por el método de la carga unitaria. Cuando se utiliza este método para la estructura libre mostrada en la Fig. 2-5, es esencial que todos los miembros de la estructura libre, incluyendo AD , se incluyan en los cálculos. El coeficiente de flexibilidad F_{11} es el desplazamiento correspondiente a Q_1 y causado por un valor unitario de Q_1 , y se muestra como un vector desplazamiento en la Fig. 2-5d. Este desplazamiento es

$$F_{11} = \frac{L}{EA}(1 + 2\sqrt{2}) = 3.828 \frac{L}{EA}$$

El coeficiente de flexibilidad F_{21} es el desplazamiento correspondiente a Q_2 y debido a un valor unitario de Q_1 (véase la Fig. 2-5d). Similarmente, los coeficientes F_{12} y F_{22} representan desplazamientos en la estructura libre de la Fig. 2-5e. Cuando se han obtenido todos estos desplazamientos, los resultados son como siguen:

$$F_{12} = F_{21} = \frac{L}{2EA}(4 + \sqrt{2}) = 2.707 \frac{L}{EA}$$

$$F_{22} = \frac{2L}{EA}(1 + \sqrt{2}) = 4.828 \frac{L}{EA}$$

Finalmente, la matriz flexibilidad puede formarse y su inversa puede ser determinada:

$$F = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 3.828 & 2.707 \\ 2.707 & 4.828 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0.4328 & -0.2426 \\ -0.2426 & 0.3431 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que no existen desplazamientos de los apoyos en la armadura, las redundantes Q pueden encontrarse por medio de la Ec. (2-10):

$$Q = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0.4328 & -0.2426 \\ -0.2426 & 0.3431 \end{bmatrix} \frac{PL}{EA} \begin{bmatrix} 3.828 \\ 2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1.172 \\ -0.243 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la fuerza reactiva horizontal en B (Fig. 2-5a) es

$$Q_1 = 1.172P$$

y la fuerza axial en la barra AD es

$$Q_2 = -0.243P$$

El signo menos de Q_2 significa que el miembro está en compresión. De los anteriores resultados, podemos calcular las reacciones restantes y las fuerzas de barra por estática.

Supongamos ahora que cuando las cargas P y $2P$ actúan sobre la armadura, el apoyo B se mueve una pequeña distancia s horizontalmente hacia la izquierda. Por lo tanto, el desplazamiento D_{Q1} (véase la Ec. 2-7) es igual a menos s . El desplazamiento D_{Q2} es cero, ya que representa el desplazamiento

relativo de los extremos cortados de la barra AD en la armadura original. Podemos encontrar ahora a las redundantes Q a partir de la Ec. (2-9), de la manera siguiente:

$$Q = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0.4328 & -0.2426 \\ -0.2426 & 0.3431 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -s \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{PL}{EA} \begin{bmatrix} 3.828 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.433 \frac{sEA}{L} + 1.172P \\ 0.243 \frac{sEA}{L} - 0.243P \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la reacción horizontal en B es

$$Q_1 = -0.433 \frac{sEA}{L} + 1.172P$$

y la fuerza en la barra AD es

$$Q_2 = 0.243 \frac{sEA}{L} - 0.243P$$

En este ejemplo se tiene una acción redundante (Q_1) correspondiente al desplazamiento del apoyo en el nudo B. Por supuesto, si se hubieran seleccionado otras redundantes, tales como las fuerzas en las dos barras diagonales, el desplazamiento en el apoyo B podría no haberse incluido en el vector D_Q . Luego hubiera sido necesario tomar en consideración el desplazamiento del apoyo mediante otros medios, tales como el descrito en el Art. 2.4.

EJEMPLO 4. El marco plano mostrado en la Fig. 2-6a tiene apoyos empotrados en A y C y está sujeto a la acción de una carga vertical P en el punto medio del miembro AB. Se desea analizar el marco tomando en consideración los efectos de las deformaciones debidas a la flexión y a las fuerzas axiales. La inclusión de los efectos axiales es para fines ilustrativos únicamente; normalmente, en un marco de este tipo, sólo se consideran los efectos por flexión, y el análisis se simplificaría ligeramente. Los miembros del marco tienen una rigidez a la flexión constante EI y una rigidez axial constante AE. La estructura es estáticamente determinada de tercer grado, y una estructura libre apropiada (véase la Fig. 2-6b) se obtiene cortando el marco en el nudo B, soltando, por lo tanto, dos fuerzas y un momento flexionante. Estas acciones eliminadas son las redundantes Q_1 , Q_2 y Q_3 , como se muestra en la Fig. 2-6b. Un desplazamiento en la estructura libre correspondiente a Q_1 está formado por la traslación horizontal del extremo B del miembro AB (tomando positivo hacia la derecha) más la traslación horizontal del extremo B del miembro BC (tomando positivo hacia la izquierda). En otras palabras, un desplazamiento correspondiente a Q_1 está formado por la suma de dos traslaciones y representa un desplazamiento relativo entre los dos puntos marcados con B en la Fig. 2-6b. En una manera similar los desplazamientos correspondientes a Q_2 y Q_3 pueden definirse como la suma de dos traslaciones verticales y dos rotaciones, respectivamente, en el nudo B.

Los desplazamientos en la estructura libre causados por la carga P y correspondientes a Q_1 , Q_2 y Q_3 se muestran en la Fig. 2-6c. Por ejemplo, el desplazamiento D_{Q1} de acuerdo con la figura está formado por dos traslaciones horizontales, como se describe en el párrafo anterior. Similarmente, los dos

lanzamientos D_{Q2} y D_{Q3} se muestran como dos traslaciones verticales y dos rotaciones, respectivamente. No es difícil calcular estos desplazamientos debidos a la fuerza P, ya que la estructura libre está formada por dos vigas en voladizo. Primero, tomando la viga AB de la Fig. 2-6c, se ve que los desplazamientos en el extremo B son como siguen:

$$(D_{Q1})_{AB} = 0 \quad (D_{Q2})_{AB} = -\frac{5PL^3}{48EI} \quad (D_{Q3})_{AB} = -\frac{PL^2}{8EI}$$

Estas expresiones están basadas únicamente sobre las deformaciones por flexión de la viga AB debido a que no existen deformaciones axiales. En segundo lugar, debe considerarse la viga BC de la Fig. 2-6c. En este ejemplo no existe carga sobre el miembro BC y, por lo tanto, no hay desplazamientos en el extremo B; por lo tanto

$$(D_{Q1})_{BC} = (D_{Q2})_{BC} = (D_{Q3})_{BC} = 0$$

Los desplazamientos finales causados por la carga P pueden obtenerse combinando los anteriores resultados:

$$D_{Q1} = 0 \quad D_{Q2} = -\frac{5PL^3}{48EI} \quad D_{Q3} = -\frac{PL^2}{8EI}$$

Por lo tanto, la matriz D_{QL} es

$$D_{QL} = \frac{PL^2}{48EI} \begin{bmatrix} 0 \\ -5L \\ -6 \end{bmatrix}$$

A continuación debe determinarse la matriz de flexibilidad. Consideremos primero la estructura libre con la acción $Q_1 = 1$ aplicada sobre ella, como se muestra en la Fig. 2-6d. Los desplazamientos correspondientes a Q_1 , Q_2 y Q_3 se muestran en la figura como los coeficientes de flexibilidad F_{11} , F_{21} y F_{31} . Si se consideran las deformaciones axiales y las de flexión, los desplazamientos en el extremo B del miembro AB son

$$(F_{11})_{AB} = \frac{L}{EA} \quad (F_{21})_{AB} = 0 \quad (F_{31})_{AB} = 0$$

También, los desplazamientos en el extremo B del miembro BC son

$$(F_{11})_{BC} = \frac{H^3}{3EI} \quad (F_{21})_{BC} = 0 \quad (F_{31})_{BC} = -\frac{H^2}{2EI}$$

Por lo tanto, los valores finales de los tres coeficientes de flexibilidad mostrados en la Fig. 2-6d son

$$F_{11} = \frac{L}{EA} + \frac{H^3}{3EI} \quad F_{21} = 0 \quad F_{31} = -\frac{H^2}{2EI}$$

A continuación, debemos hacer el mismo tipo de análisis para las acciones $Q_2 = 1$ y $Q_3 = 1$ actuando sobre la estructura libre. Estas condiciones se muestran en las Figs. 2-6e y 2-6f, y se encuentra que los diferentes coeficientes de flexibilidad son como siguen:

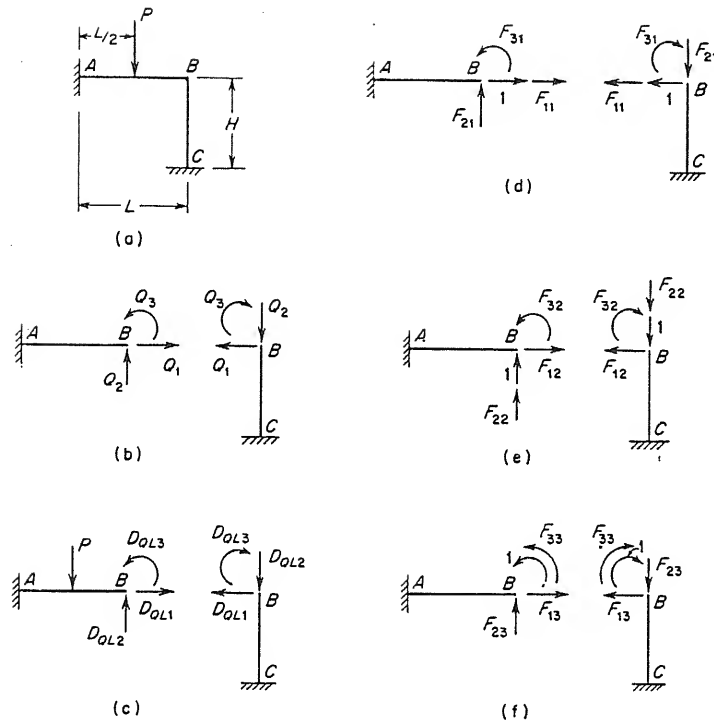


FIG. 2-6. Ej. 4: Marco plano

$$F_{12} = 0 \quad F_{22} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{H}{EA} \quad F_{32} = \frac{L^2}{2EI}$$

$$F_{13} = -\frac{H^2}{2EI} \quad F_{23} = \frac{L^2}{2EI} \quad F_{33} = \frac{L}{EI} + \frac{H}{EI}$$

Finalmente, podemos arreglar la matriz de flexibilidad:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} + \frac{H^3}{3EI} & 0 & -\frac{H^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} + \frac{H}{EA} & \frac{L^2}{2EI} \\ -\frac{H^2}{2EI} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} + \frac{H}{EI} \end{bmatrix} \quad (a)$$

Si omitiéramos los efectos axiales en el análisis, las dos fracciones en F que contienen la rigidez axial EA en los denominadores se omitirían.

La siguiente etapa en la solución es obtener la inversa de la matriz de flexibilidad y luego sustituirla, así como la matriz D_{QL} , en la Ec. (2-10). Es

posible utilizar la Ec. (2-10) en este ejemplo debido a que los desplazamientos D_Q son todos iguales a cero, ya que el nudo B en el marco original (Fig 2-6a) es una conexión rígida. Sin embargo, la inversa de la matriz de flexibilidad F dada, anteriormente no puede obtenerse convenientemente en forma literal, como se hizo en los ejemplos anteriores, donde F era una matriz 2×2 . Por lo tanto, esta solución se continuará sustituyendo en datos numéricos.

Supongamos ahora que se dan los siguientes valores para el marco mostrado en la Fig. 2-6a:

$$P = 10 \text{ k} \quad L = H = 12 \text{ pies} \quad E = 30\,000 \text{ ksi} \quad I = 200 \text{ plg}^4 \quad A = 10 \text{ plg}^2$$

Cuando se sustituyen estos valores numéricos en las matrices D_{QL} y F , queda:

$$D_{QL} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5184 \\ -0.00432 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0.1664 & 0 & -0.001728 \\ 0 & 0.1664 & 0.001728 \\ -0.001728 & 0.001728 & 0.000048 \end{bmatrix}$$

Los valores numéricos que aparecen en D_{QL} y F están en kips, pulgadas y radianes; así pues, D_{QL2} es -0.5184 plg, D_{QL3} es 0.00432 radianes, F_{11} es 0.1664 plg por kip, F_{13} es -0.001728 plg por plg-kip, F_{32} es 0.001728 radianes por kip, y así sucesivamente. La inversa de F puede obtenerse por métodos establecidos, y es igual a

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} 14.92 & -8.913 & 858.1 \\ -8.913 & 14.92 & -858.1 \\ 858.1 & -858.1 & 82\,620 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las matrices F^{-1} y D_{QL} pueden sustituirse en la Ec. (2-10) para obtener el vector de redundantes:

$$Q = \begin{bmatrix} 14.92 & -8.913 & 858.1 \\ -8.913 & 14.92 & -858.1 \\ 858.1 & -858.1 & 82\,620 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5184 \\ 0.00432 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.913 \\ 4.03 \\ -87.9 \end{bmatrix}$$

Así, las redundantes son

$$Q_1 = -0.913 \text{ k} \quad Q_2 = 4.03 \text{ k} \quad Q_3 = -87.9 \text{ plg-k}$$

El signo menos para Q_1 y Q_3 muestran que estas acciones son opuestas en dirección a las direcciones positivas supuestas en la Fig. 2-6b.

Si se omiten en el análisis los efectos de las deformaciones axiales, la matriz de flexibilidad queda

$$F = \begin{bmatrix} 0.1659 & 0 & -0.001728 \\ 0 & 0.1659 & 0.001728 \\ -0.001728 & 0.001728 & 0.000048 \end{bmatrix}$$

y se obtienen los siguientes valores para las redundantes:

$$Q_1 = -0.938 \text{ k} \quad Q_2 = 4.06 \text{ k} \quad Q_3 = -90.0 \text{ plg-k}$$

Estos resultados difieren por menos del 3% de los primeros, que es una situación frecuente cuando se analizan marcos planos. En tales casos sólo se necesitan considerar las deformaciones por flexión en el análisis.

EJEMPLO 5. La estructura en parrilla mostrada en la Fig. 2-7a está en un plano horizontal (x - z) y soporta una carga P que actúa en una dirección vertical. Los apoyos de la parrilla en A y C son empotramientos, y los miembros AB y BC tienen una longitud L , rigidez a la flexión EI y rigidez a la torsión GJ (véase el Apéndice A para la definición de rigidez a la torsión). Las redundantes que se han escogido para este ejemplo se sueltan cortando la parrilla en el nudo B (Fig. 2-7b), dando, por lo tanto, una estructura libre en forma de dos vigas en voladizo. Cada redundante está formada de un par de acciones, y estas acciones se muestran en sus direcciones positivas supuestas en la Fig. 2-7b. No existen otras acciones internas en el nudo B , debido a que en una parrilla con solamente cargas verticales no existen fuerzas horizontales entre los miembros ni momentos respecto a un eje vertical.

Cuando se aplica la carga P a la estructura libre (Fig. 2-7c), se producen los desplazamientos D_{QL} . Estos desplazamientos se muestran en sus direcciones positivas en la figura. Nótese que un desplazamiento translacional está indicada por una flecha con una sola cabeza, en tanto que una rotación tiene una flecha con dos cabezas. Esta representación es análoga a la convención que se utiliza al representar fuerzas y pares. Los desplazamientos mostrados en la Fig. 2-7c pueden obtenerse sin dificultad, y luego puede formarse la matriz D_{QL} :

$$D_{QL} = \frac{PL^2}{48EI} \begin{bmatrix} 5L \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de flexibilidad son los desplazamientos mostrados en las Figs. 2-7d, 2-7e y 2-7f. Para estas figuras, se supone que valores unitarios de las redundantes Q_1 , Q_2 y Q_3 actúan sobre la estructura libre. Refiriéndonos a las figuras, pueden obtenerse los diferentes coeficientes, y puede formarse la matriz de flexibilidad

$$F = \begin{bmatrix} \frac{2L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} + \frac{L}{GJ} & 0 \\ -\frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} + \frac{L}{GJ} \end{bmatrix}$$

Esta matriz puede escribirse en una forma más simple introduciendo un parámetro adimensional ρ definido como la relación entre las rigideces a la flexión y a la torsión, por lo tanto

$$\rho = \frac{EI}{GJ}$$

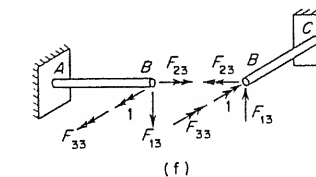
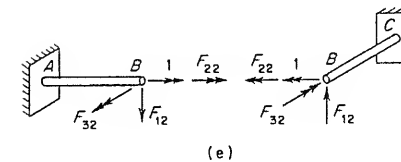
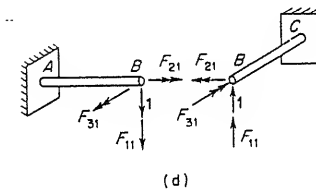
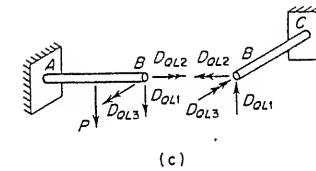
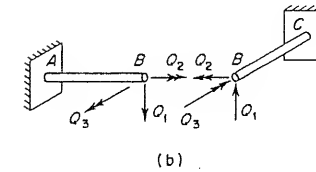
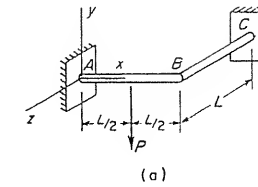


FIG. 2-7. Ej. 5: Parrilla

Con esta notación la matriz de flexibilidad puede ponerse de la forma siguiente:

$$F = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 4L^2 & 3L & -3L \\ 3L & 6(1+\rho) & 0 \\ -3L & 0 & 6(1+\rho) \end{bmatrix}$$

La inversa de F es

$$F^{-1} = \frac{EI}{2L^3 b_1 b_2} \begin{bmatrix} 12b_1^2 & -6Lb_1 & 6Lb_1 \\ -6Lb_1 & L^2 b_3 & -3L^2 \\ 6Lb_1 & -3L^2 & L^2 b_3 \end{bmatrix}$$

en donde se utilizan los siguientes parámetros adimensionales adicionales:

$$b_1 = 1 + \rho \quad b_2 = 1 + 4\rho \quad b_3 = 5 + 8\rho$$

Finalmente, al sustituir en la Ec. (2-10) se obtiene el vector de redundantes:

$$Q = \frac{P}{16(1+\rho)(1+4\rho)} \begin{bmatrix} -2(1+\rho)(2+5\rho) \\ L(2+5\rho) \\ 3L\rho \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, las redundantes son las siguientes:

$$Q_1 = -\frac{P}{8} \frac{2+5\rho}{1+4\rho}$$

$$Q_2 = \frac{PL}{16} \frac{2+5\rho}{(1+\rho)(1+4\rho)}$$

$$Q_3 = \frac{3PL}{16} \frac{\rho}{(1+\rho)(1+4\rho)}$$

Si los miembros AB y BC son muy débiles a la torsión, ρ puede considerarse infinitamente grande. Las fórmulas anteriores dan los siguientes valores para las redundantes (después de dividir los numeradores y denominadores entre ρ):

$$Q_1 = -\frac{5P}{32} \quad Q_2 = Q_3 = 0$$

Este resultado también se puede obtener suponiendo que en B existe una articulación esférica que transmite la fuerza vertical pero no el momento. Una parrilla como la mencionada sería estáticamente indeterminada de primer grado.

2.4. Efectos de temperatura, deformación previa y desplazamiento de los apoyos. Frecuentemente es necesario incluir en el análisis de una estructura no solamente los efectos de las cargas, sino también los efectos de los cambios de temperatura, deformación previa de los miembros y los desplazamientos de uno o más apoyos. En la mayoría de los casos estos efectos pueden incorporarse en el análisis incluyéndolos en el cálculo de desplazamientos de la estructura libre. Como un ejemplo, consideremos los efectos de los cambios de tem-

peratura. Si suponemos que los cambios ocurren en la estructura libre, existirán desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las acciones redundantes Q . Estos desplazamientos pueden identificarse por el símbolo D_{QT} , que es análogo al símbolo D_{QL} usado anteriormente para representar los desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las redundantes y causados por las cargas. Los desplazamientos de temperatura D_{QT} en la estructura libre pueden deberse a cambios uniformes en la temperatura o a cambios diferenciales en la temperatura. Un cambio uniforme se refiere a un cambio de temperatura que es constante en todo el miembro, y causa que el miembro aumente o disminuya su longitud. Un cambio diferencial significa que la parte superior y la inferior del miembro están sujetas a temperaturas diferentes, en tanto que la temperatura promedio permanece invariable; así, el miembro no cambia de longitud pero sufre una curvatura de su eje longitudinal. El cálculo de desplazamientos debido a cambios de temperatura se discute en el Apéndice A.

Cuando se ha obtenido la matriz D_{QT} de los desplazamientos debido a los cambios de temperatura, puede sumarse a la matriz D_{QL} de los desplazamientos debidos a las cargas para dar la suma de todos los desplazamientos en la estructura libre. Luego estos desplazamientos totales pueden utilizarse en la ecuación de superposición (véase la Ec. 2-8) en lugar de sólo D_{QL} . Por lo tanto, la ecuación de superposición queda

$$D_Q = D_{QL} + D_{QT} + FQ \quad \checkmark$$

que puede resolverse para el vector Q de redundantes como se ve anteriormente. Una ilustración del cálculo del vector D_{QT} que se utiliza en esta ecuación, se da en un ejemplo posterior.

Los efectos de la deformación previa en cualquier miembro de la estructura pueden manejarse de modo análogo al de los cambios de temperatura. Por deformación previa de un miembro se entiende una deformación inicial del miembro debido a una de diferentes causas. Por ejemplo, un miembro de una armadura puede estar fabricado con una longitud mayor o menor que la longitud teórica o una viga puede estar fabricada con una curvatura inicial. Puede verse intuitivamente que una barra de armadura que tenga una deformación previa consistente en una elongación inicial, producirá los mismos efectos en la armadura como si la barra se hubiese calentado uniformemente a una temperatura que produjese el mismo incremento en longitud. Por lo tanto, el método de análisis para efectos de deformación previa es similar al de los cambios de temperatura. El primer paso es suponer que la deformación previa ocurre en la estructura

libre. Luego deben hallarse los desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las redundantes. Estos desplazamientos se denominan D_{QP} , que quiere decir que corresponden a las redundantes y que son debidos a efectos de deformación previa. La matriz D_{QP} para los desplazamientos debidos a deformaciones previas puede sumarse a las matrices D_{QL} y D_{QT} para dar la suma de todos los desplazamientos en la estructura libre. Finalmente, la suma de todos los desplazamientos se incluye en la ecuación de superposición de la manera siguiente:

$$D_Q = D_{QL} + D_{QT} + D_{QP} + FQ$$

Como antes, la ecuación de superposición puede resolverse para la matriz de las redundantes Q . Después se dará un ejemplo en que se considere el cálculo de los desplazamientos debidos a la deformación previa.

Finalmente, consideremos la posibilidad de desplazamientos conocidos que toman lugar en los apoyos de una estructura. Existen dos posibilidades por considerarse, dependiendo o no en si los desplazamientos de los apoyos o restricciones corresponden a una de las acciones redundantes Q . Si el desplazamiento de la restricción corresponde a una redundante, sus efectos pueden tomarse en cuenta incluyendo el desplazamiento en el vector D_Q de los desplazamientos reales en la estructura. Este procedimiento se discutió antes en el Art. 2.2 y se ilustró en el Art. 2.3 en un ejemplo de una armadura estáticamente indeterminada (véase el Ej. 3). En una situación más generalizada, sin embargo, existen desplazamientos de los apoyos que no corresponden a ninguna de las redundantes seleccionadas. En tal evento, los efectos de tales desplazamientos deben incorporarse en el análisis de la estructura libre, de igual manera que en el caso de los efectos de temperatura y deformación previa. Cuando los desplazamientos de los apoyos se supone que ocurren en la estructura libre, existen desplazamientos D_{QR} correspondientes a las redundantes Q . Cuando se han encontrado estos desplazamientos, puede obtenerse la matriz D_{QR} . Después esta matriz puede sumarse a las otras matrices que representan los desplazamientos en la estructura libre.

La suma de todas las matrices que representan desplazamientos en la estructura libre se denominará D_{QS} en futuras discusiones, y puede expresarse de la manera siguiente:

$$D_{QS} = D_{QL} + D_{QT} + D_{QP} + D_{QR} \quad (2-11)$$

Por lo tanto, la matriz D_{QS} representa la suma de los desplazamientos debidos a todas las causas, incluyendo cargas, cambios de temperatura, efectos de deformaciones previas y desplazamientos de los apoyos. Utilizando la notación de la Ec. (2-11), podemos escribir una

forma generalizada de la ecuación de superposición para el método de la flexibilidad

$$D_Q = D_{QS} + FQ \quad (2-12)$$

La ecuación de superposición utilizada previamente (Ec. 2-8) puede considerarse como un caso especial de la Ec. (2-12). Cuando la última ecuación se resuelve para Q , el resultado es

$$Q = F^{-1}(D_Q - D_{QS}) \quad (2-13)$$

y esta ecuación puede utilizarse en lugar de la Ec. (2-9) cuando se deban considerar otras causas fuera de cargas. Por supuesto, en cualquier análisis en particular no es probable que todas las matrices dadas en la Ec. (2-11) sean de interés. Daremos a continuación algunos casos del uso de las ecuaciones anteriores.

EJEMPLO 1. Para ilustrar el análisis de una estructura cuando existen presentes cambios de temperatura, consideremos la viga de dos claros ABC de la Fig. 2-8a. Suponemos que la viga está sujeta a una diferencia de temperatura tal que la superficie superior de la viga está a una temperatura T_2 en tanto que la inferior está a una temperatura T_1 . Previamente, analizamos la misma viga para el efecto de cargas (véase la Fig. 2-2), y en esa solución las reacciones en los apoyos B y C se tomaron como las redundantes Q_1 y Q_2 . Utilizaremos esas mismas redundantes para resolver el problema de los efectos térmicos; por lo tanto, la inversa de la flexibilidad puede tomarse de la otra solución (véase el Art. 2.2):

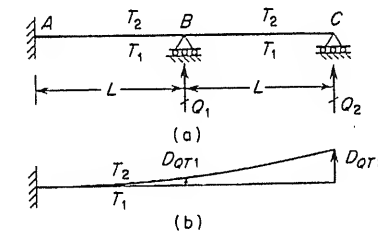


FIG. 2-8. Ej. 1: Viga continua de la Fig. 2-2

$$F^{-1} = \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

También, el vector D_Q (véase la Ec. 2-13) que da los desplazamientos reales en la viga es un vector nulo ($D_Q = 0$).

La estructura libre para la viga ABC, es la viga en voladizo mostrada en la Fig. 2-8b. Si la temperatura T_1 es mayor que T_2 , la viga libre se flexionará hacia arriba tal como se indica en la figura. Los desplazamientos correspondientes a las redundantes, se denominan D_{QT1} y D_{QT2} . Estos desplazamientos pueden calcularse mediante el método de la carga unitaria descrito en el Apéndice A (véase el Ej. 4 del Art. A.2). Por lo tanto, los desplazamientos D_{QT1} y D_{QT2} son

$$\frac{\alpha(T_1 - T_2)L^2}{2d} \quad \text{y} \quad \frac{2\alpha(T_1 - T_2)L^2}{d}$$

respectivamente. En estas expresiones α es el coeficiente de expansión térmica para el material de la viga, y d es el peralte de la viga. El vector D_{QT} es

$$D_{QT} = \frac{\alpha(T_1 - T_2)L^2}{2d} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Si sólo se consideran los efectos de temperatura en el análisis de la viga, el vector D_{QT} es el vector D_{QS} en la Ec. (2-13). Luego las redundantes según esa ecuación son:

$$Q = \frac{3EI \alpha(T_1 - T_2)}{7Ld} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Los signos de los elementos de Q muestran que la reacción redundante Q_1 es hacia arriba cuando T_1 es mayor que T_2 , en tanto que la redundante Q_2 es hacia abajo. Si T_1 es menor que T_2 , las direcciones de las redundantes se invierten. Por supuesto, si T_1 es igual a T_2 , las redundantes son cero.

Si los efectos combinados de las cargas y temperaturas son deseados, la matriz D_{QS} de la Ec. (2-13) se toma como la suma de D_{QT} (obtenida arriba) y D_{QL} (obtenida en el Art. 2.2). Los resultados obtenidos para las redundantes bajo las condiciones combinadas serán la suma de los resultados obtenidos para cambios de temperatura y cargas tomados separadamente.

EJEMPLO 2. Como segundo ejemplo para ilustrar los efectos de un cambio de temperatura, consideremos la armadura plana mostrada previamente en la Fig. 2-5a y supongamos que la barra BD tiene un incremento uniforme de temperatura T . La elongación resultante producirá desplazamientos D_{QT} en la estructura libre correspondiente a las redundantes.

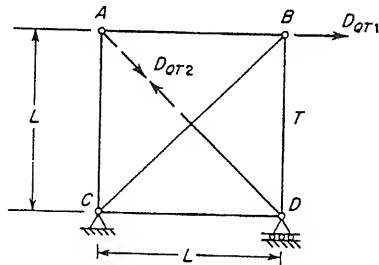


FIG. 2-9. Ej. 2: Armadura plana de la Fig. 2-5

Estos desplazamientos, denominados D_{QT1} y D_{QT2} , se muestran en la Fig. 2-9 con sus direcciones positivas (compárese con la Fig. 2-5c que muestra los desplazamientos en la estructura libre debidos a las cargas). Los desplazamientos D_{QT} pueden encontrarse rápidamente por el método de la carga unitaria, como se ilustra en el Ej. 2 del Art. A.2. Por este medio se encuentra que el vector D_{QT} es:

$$D_{QT} = \alpha L T \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Los efectos de temperatura pueden incorporarse ahora al análisis de la armadura incluyendo la matriz D_{QT} en el cálculo de D_{QS} (véase la Ec. 2-11).

Si el miembro BD de la armadura de la Fig. 2-5a estuviera fabricado con una longitud $L + e$, en vez de L , el análisis podría manejarse de la misma manera mostrada anteriormente para un cambio de temperatura en la barra. La única diferencia es que la elongación previa e reemplazaría la elongación por temperatura $\alpha L T$ para la barra BD . Por lo tanto, el vector de desplazamientos previos en la estructura libre sería (véase el Ej. 2, Art. A.2):

$$D_{QF} = e \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Una deformación previa de cualquier otra barra puede manejarse de modo similar.

EJEMPLO 3. Este ejemplo ilustra cómo tomar en consideración los desplazamientos de los apoyos. Refirámonos de nuevo a la viga de dos claros mostrada en la Fig. 2-2a y supongamos que ocurren los dos siguientes desplazamientos. El nudo A sufre una rotación conocida en el sentido de las manecillas del reloj de β radianes, y el nudo B se desplaza hacia abajo una longitud s . El desplazamiento en B corresponde a una de las redundantes y, por lo tanto, se considera en el vector D_Q , que ahora queda

$$D_Q = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \end{bmatrix}$$

El signo menos se requiere en el primer elemento ya que Q_1 es positivo hacia arriba. El desplazamiento del apoyo A está incluido en el análisis mediante la matriz D_{QR} (véase la Ec. 2-11). Esta matriz está formada por los desplazamientos en la estructura libre (véase la Fig. 2-10) cuando el nudo A gira el ángulo β en la dirección de las manecillas del reloj. Por lo tanto, los desplazamientos D_{QR1} y D_{QR2} correspondientes a Q_1 y Q_2 son

$$-\beta L \quad \text{y} \quad -2\beta L$$

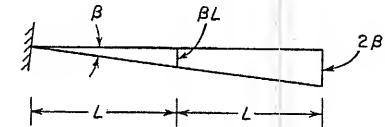


FIG. 2-10. Ej. 3: Rotación del apoyo en la estructura libre

respectivamente. Estos términos son negativos debido a que los desplazamientos reales son hacia abajo. Por lo tanto, la matriz D_{QR} es

$$D_{QR} = \beta L \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, esta matriz puede incluirse en el cálculo de D_{QS} , después de lo cual se puede resolver la Ec. (2-13) para las redundantes. Como en los otros ejemplos, los valores de las redundantes debidos a los efectos combinados es igual a la suma de los valores obtenidos separadamente.

2.5. Desplazamiento de nudos, acciones en los extremos de los miembros y reacciones. En los artículos anteriores se enfatizó en encontrar las acciones redundantes mediante el método de la flexibilidad. Las acciones redundantes pueden ser resultantes de esfuerzos internos (como fuerzas axiales y momentos flexionantes) o reacciones externas en los puntos de apoyo. En todos los casos es posible encontrar otras acciones en la estructura utilizando principios de equilibrio estático después de calcular las redundantes. Tales cálculos normalmente incluyen las reacciones de la estructura y las acciones en los extremos de cada miembro. Aún más, cuando se cuenta con todas las acciones en la estructura, es posible calcular todos los desplazamientos. Esto puede hacerse, por ejemplo, aislando miembros de la estructura y encontrando los desplazamientos en el miembro mediante relaciones desplazamiento-acción. Usualmente los desplazamientos de interés primario son las traslaciones y las rotaciones de los nudos.

En lugar del procedimiento descrito arriba, es más sistemático incorporar todos los cálculos para los desplazamientos de nudos, acciones en los extremos de los miembros y reacciones directamente en los cálculos básicos para el método de la flexibilidad. Esto es, la tarea de encontrar las diferentes acciones y desplazamientos que son de interés, puede hacerse en paralelo con los cálculos para encontrar las redundantes en lugar de posponerlo en cálculos separados que se efectuarán al final del análisis.

Para demostrar el procedimiento para hacer un análisis completo de una estructura, consideramos la viga de dos claros dada previamente en la Fig. 2-2. La viga que se va a analizar se muestra nuevamente en la Fig. 2-11a. Supongamos ahora que se desea calcular no sólo las redundantes Q_1 y Q_2 para la viga, sino también los desplazamientos de nudo, acciones en los extremos de los miembros y las reacciones. Los desplazamientos de nudo en una estructura se denominarán con el símbolo general D_J , y se utilizarán subíndices numéricos para identificar los desplazamientos de nudo en particular. Por ejemplo, en la viga de la Fig. 2-11a los dos desplazamientos de nudo que deben encontrarse son las rotaciones en los puntos B y C. Estos desplazamientos se denominarán D_{J1} y D_{J2} , respectivamente, y se suponen positivo cuando son en contra de las manecillas del reloj, según se muestra en la figura.

Las acciones en los extremos de los miembros son los pares y las fuerzas que actúan en los extremos de un miembro cuando se considera aislado del resto de la estructura. Para la viga en consideración, las acciones de extremo son los momentos flexionantes y fuerzas cortantes en los extremos, según se muestra en la Fig. 2-11b. Estas

acciones de extremo deben evaluarse de acuerdo con una convención de signos específica, que puede ser una convención de signos por deformación (de acuerdo al modo con que se deforma el miembro) o una convención de signos estática (de acuerdo con la dirección de la acción en el espacio). Las direcciones positivas mostradas en la Fig. 2-11b están basadas en una convención de signos estática que las fuerzas hacia arriba y los momentos en sentido contrario a las manecillas del reloj son positivos. En general, las acciones de extremo se denominan por el símbolo A_M y se distinguen una de otra por subíndices numéricos. En el ejemplo de la Fig. 2-11 existe un total de ocho acciones de extremo. Sin embargo, se supone arbitrariamente que sólo las cuatro acciones llamadas A_{M1} , A_{M2} , A_{M3} y A_{M4} de la Fig. 2-11b serán calculadas. Las acciones de extremo A_{M1} y A_{M2} son la fuerza cortante y el momento flexionante en el extremo de la derecha del miembro AB, en tanto que A_{M3} y A_{M4} son la fuerza cortante y el momento flexionante en el extremo de la izquierda del miembro BC. Por lo tanto, las primeras dos acciones de extremo están localizadas exactamente a la izquierda del nudo B, y las dos últimas están localizadas justamente a la derecha del nudo B. En este ejemplo en particular, la suma de las fuerzas cortantes A_{M1} y A_{M2} debe ser igual a la reacción redundante Q_1 , debido a que no existe una carga vertical sobre la viga en el nudo B. También, la suma de los momentos flexionantes A_{M2} y A_{M4} debe ser igual al par M que actúa como carga en el nudo B.

Finalmente, consideremos las reacciones de la viga en la Fig. 2-11a. Las dos reacciones en los apoyos B y C se determinan automáticamente, ya que son las redundantes Q_1 y Q_2 . Las acciones restantes, denominadas generalmente, por el símbolo A_R , están formadas por una fuerza vertical y un par en el apoyo A. Estas reacciones se llaman A_{R1} y A_{R2} en la Fig. 2-11a y se suponen positivas en las direcciones mostradas. En tanto que la convención de signos para reacciones puede seleccionarse arbitrariamente en cada caso en particular, las direcciones positivas mostradas en la figura serán las utilizadas como costumbre en todo este libro.

Para encontrar los desplazamientos D_J , acciones de extremo A_M , y reacciones A_R para la viga de la Fig. 2-11a, se utilizará el principio de superposición. Previamente, aplicamos este principio a las estructuras libres mostradas en las Figs. 2-11c, 2-11d y 2-11e para obtener una ecuación para las redundantes Q (véase la Ec. 2-8). De modo similar, el principio de superposición puede utilizarse para obtener los desplazamientos de nudo D_J en la viga de la Fig. 2-11a. Para realizar esto, es necesario evaluar los desplazamientos en las estructuras libres (Figs. 2-11c, 2-11d y 2-11e) correspondientes a los

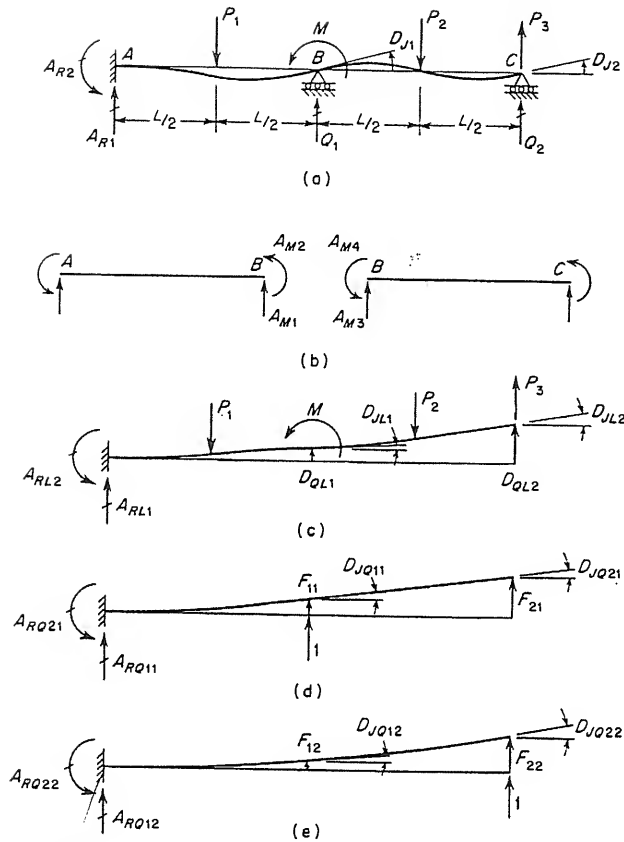


FIG. 2-11. Desplazamientos de nudo, acciones en los extremos, y reacciones

desplazamientos D_J . En la estructura libre sujeta a las cargas, estos desplazamientos se denominan por el símbolo general D_{JL} y en particular, las rotaciones de los nudos B y C se denominan D_{JL1} y D_{JL2} , respectivamente. Ambas de estas cantidades pueden encontrarse a partir de un análisis de la viga en voladizo de la Fig. 2-11c.

A continuación, debemos considerar la estructura libre sujeta a valores unitarios de las redundantes (Figs. 2-11d y 2-11e). Los desplazamientos correspondientes a D_J se denominan D_{JQ} , en donde la letra Q se utiliza para indicar que estos desplazamientos de nudo están causados por valores unitarios de las redundantes. Consideremos, por ejemplo, la estructura libre sujeta a un valor unitario de la redundante Q_1 (Fig. 2-11d). Los desplazamientos de nudo causados por esta carga se denominan D_{JQ11} y D_{JQ21} , en donde el primer subíndice numérico identifica el desplazamiento particular en consi-

deración y el segundo subíndice denomina la redundante que produce dicho desplazamiento. De igual modo, los desplazamientos D_{JQ12} y D_{JQ22} causados por un valor unitario de Q_2 se muestran en la Fig. 2-11e.

El principio de superposición puede utilizarse ahora para obtener los desplazamientos D_J de la viga real. Superponiendo los desplazamientos de las vigas en las Figs. 2-11c, 2-11d y 2-11e obtenemos los desplazamientos en la viga de la Fig. 2-11a:

$$D_{J1} = D_{JL1} + D_{JQ11}Q_1 + D_{JQ12}Q_2$$

$$D_{J2} = D_{JL2} + D_{JQ21}Q_1 + D_{JQ22}Q_2$$

Estas ecuaciones pueden expresarse de modo más sencillo en la siguiente ecuación matricial:

$$\underline{D_J} = \underline{D_{JL}} + \underline{D_{JQ}}\underline{Q} \quad (2-14)$$

en donde las diferentes matrices son:

$$\underline{D_J} = \begin{bmatrix} D_{J1} \\ D_{J2} \end{bmatrix} \quad \underline{D_{JL}} = \begin{bmatrix} D_{JL1} \\ D_{JL2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{D_{JQ}} = \begin{bmatrix} D_{JQ11} & D_{JQ12} \\ D_{JQ21} & D_{JQ22} \end{bmatrix} \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Por supuesto, en una situación más general, las matrices pueden ser de orden mayor que las de este ejemplo. Si existen j desplazamientos de nudo que deben obtenerse, el orden de los vectores $\underline{D_J}$ y $\underline{D_{JL}}$ será $j \times 1$. Si el número de redundantes es q , de modo que la matriz \underline{Q} es de orden $q \times 1$, la matriz $\underline{D_{JQ}}$ será rectangular y de orden $j \times q$. La Ec. (2-14) puede utilizarse para calcular los desplazamientos $\underline{D_J}$ mediante operaciones matriciales únicamente, después de haber obtenido las matrices $\underline{D_{JL}}$, $\underline{D_{JQ}}$ y \underline{Q} .

De un modo similar al utilizado para obtener la Ec. (2-14), el principio de superposición puede utilizarse para obtener las acciones en los extremos de los miembros $\underline{A_M}$ y las reacciones $\underline{A_R}$. En estos casos las ecuaciones de superposición son

$$\underline{A_M} = \underline{A_{ML}} + \underline{A_{MQ}}\underline{Q} \quad (2-15)$$

$$\underline{A_R} = \underline{A_{RL}} + \underline{A_{RQ}}\underline{Q} \quad (2-16)$$

en donde $\underline{A_M}$ y $\underline{A_R}$ son vectores de acciones en los extremos y reacciones en la viga real (Fig. 2-11a); $\underline{A_{ML}}$ y $\underline{A_{RL}}$ son vectores de acciones en los extremos y reacciones en la estructura libre debidas a las cargas; y $\underline{A_{MQ}}$ y $\underline{A_{RQ}}$ son matrices de acciones en los extremos y reacciones y en la estructura libre debidas a valores unitarios de las redundantes. En el ejemplo de la Fig. 2-11 las matrices $\underline{A_M}$ y $\underline{A_{ML}}$ son de orden 4×1 debido a que están en consideración cuatro acciones en los extremos; las matrices $\underline{A_R}$ y $\underline{A_{RL}}$ son de orden 2×1 debido a

que se están considerando dos reacciones; y las matrices A_{MQ} y A_{RQ} son de orden 4×2 y 2×2 , respectivamente. En el caso general en donde se tienen m acciones en los extremos de los miembros, r reacciones, y q redundantes, las matrices A_M y A_{ML} son de orden $m \times 1$, A_{MQ} es de orden $m \times q$, A_R y A_{RL} son de orden $r \times 1$, y A_{RQ} es de orden $q \times r$.

De la discusión anterior se ve que los pasos que deben seguirse al analizar una estructura por el método de la flexibilidad incluyen análisis bastante extensos de la estructura libre. Con las cargas en la estructura libre, es necesario encontrar las acciones y desplazamientos que forman las matrices D_{QL} , D_{JL} , A_{ML} y A_{RL} . Con los valores unitarios de las redundantes actuando sobre la estructura libre es necesario determinar las matrices F , D_{JQ} , A_{MQ} y A_{RQ} . Luego se resuelve la Ec. (2-8), dando el vector Q de redundantes, después de lo cual las Ecs. (2-14) a (2-16) pueden evaluarse para los vectores D_J , A_M y A_R . Por estos medios se pueden encontrar todas las acciones y desplazamientos de interés en la estructura real.

Cuando se deben tomar en consideración los efectos de cambios de temperatura, deformación previa y desplazamiento de los apoyos, los únicos cambios en las ecuaciones de superposición son en los primeros términos de los lados de la derecha del signo igual. Estos términos representan las acciones y desplazamientos en la estructura libre y deben incluir los efectos de temperatura, deformación previa y desplazamiento de los apoyos. Esta situación se describió en el artículo anterior para los desplazamientos correspondientes a las redundantes, y la Ec. (2-12) se derivó como una forma generalizada de la Ec. (2-8). Utilizando el mismo principio, una forma más general de la Ec. (2-14) queda

$$D_J = D_{JS} + D_{JQ}Q \quad (2-17)$$

en donde el vector D_{JS} representa la suma de todos los efectos en la estructura libre y está dado por la siguiente expresión:

$$D_{JS} = D_{JT} + D_{JP} + D_{JR} \quad (2-18)$$

En la Ec. (2-18) las matrices D_{JT} , D_{JP} y D_{JR} representan desplazamientos de nudo debidos a temperatura, deformación previa y desplazamientos de los apoyos, respectivamente. Los desplazamientos de los apoyos que se consideran al obtener D_{JR} son aquellos que no corresponden a redundantes. Aquellos que sí corresponden a redundantes están representados en la matriz D_Q .

No hay necesidad para generalizar las Ecs. (2-15) y (2-16) para tomar en consideración cambios de temperatura, deformación previa y desplazamientos de los apoyos. Ninguna de estas influencias producirá acciones o reacciones en una estructura libre estáticamente

determinada; en lugar de ello, la estructura simplemente cambiará su configuración para acomodarse a esos efectos. Los efectos de estas influencias están propagados en las matrices A_M y A_R a través de los valores de las redundantes Q , que se obtuvieron al resolver la Ec. (2-12).

En resumen, el procedimiento en cualquier ejemplo en particular es analizar la estructura libre para todas las causas, y después sumar las matrices apropiadas como se muestra en las Ecs. (2-11) y (2-18). Luego las redundantes se encuentran a partir de la Ec. (2-13), después de lo cual las diferentes acciones y desplazamientos se encuentran a partir de las Ecs. (2-15), (2-16) y (2-17).

EJEMPLO. Daremos una solución general para la viga de dos claros mostrada en la Fig. 2-11 para el caso de cargas únicamente. Se supone que el objeto del análisis es calcular los diferentes desplazamientos de nudo D_J , acciones en los extremos de los miembros A_M , y reacciones A_R que se dan en las Figs. 2-11a y 2-11b. La viga tiene una rigidez a la flexión constante igual a EI y está bajo la acción de las cargas P_1 , M , P_2 y P_3 que se supone que tienen los siguientes valores:

$$P_1 = 2P \quad M = PL \quad P_2 = P \quad P_3 = P$$

Cuando estas cargas actúan sobre la estructura libre (Fig. 2-11c), se encuentra que los desplazamientos de nudo D_{JL1} y D_{JL2} son

$$D_{JL1} = \frac{5PL^2}{4EI} \quad D_{JL2} = \frac{13PL^2}{8EI}$$

y, por lo tanto, el vector D_{JL} es

$$D_{JL} = \frac{PL^2}{8EI} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Las acciones en los extremos de los miembros en la viga de la Fig. 2-11c pueden encontrarse por equilibrio estático. Por ejemplo, A_{ML1} y A_{ML2} son la fuerza cortante y el momento flexionante justo a la izquierda del punto donde se aplica el par M . Estas cantidades son iguales a

$$-P_2 + P_3 \quad \text{y} \quad M - \frac{P_2L}{2} + P_3L$$

respectivamente, o

$$A_{ML1} = 0 \quad A_{ML2} = \frac{3PL}{2}$$

De modo similar, la fuerza cortante y el momento flexionante justo a la derecha del punto B en la viga de la Fig. 2-11c son

$$A_{ML3} = P_2 - P_3 = 0 \quad A_{ML4} = \frac{P_2L}{2} - P_3L = -\frac{PL}{2}$$

Por lo tanto, la matriz A_{ML} es

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3PL}{2} \\ 0 \\ -\frac{PL}{2} \end{bmatrix}$$

También, las reacciones en la viga de la Fig. 2-11c son

$$A_{RL} = \begin{bmatrix} 2P \\ -\frac{PL}{2} \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos de nudo debido a valores unitarios de las redundantes están mostrados en las Figs. 2-11d y 2-11e. Estos desplazamientos pueden calcularse rápidamente para la estructura libre y están dados en la matriz D_{JQ} :

$$D_{JQ} = \frac{L^2}{2EI} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Las acciones en los extremos de los miembros y las reacciones en las vigas de las Figs. 2-11d y 2-11e se encuentran por estática y constituyen las matrices A_{MQ} y A_{RQ} :

$$A_{MQ} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & L \\ 0 & -1 \\ 0 & -L \end{bmatrix} \quad A_{RQ} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -L & -2L \end{bmatrix}$$

Las matrices D_{QL} y F que aparecen en la Ec. (2-8) se determinaron previamente para la viga de la Fig. 2-11 (véase el Art. 2.2) y el vector Q de redundantes se encontró ser igual a

$$Q = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 69 \\ -64 \end{bmatrix}$$

Utilizando esta matriz, así como las matrices D_{JL} y A_{JQ} en la Ec. (2-14) se tienen dos desplazamientos de nudo en la viga real

$$D_J = \frac{PL^2}{112EI} \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Este resultado muestra que la rotación D_{J1} en el nudo B es contra las manecillas del reloj e igual a

$$D_{J1} = \frac{17PL^2}{112EI}$$

en tanto que la rotación en C es

$$D_{J2} = -\frac{5PL^2}{112EI}$$

con el sentido de las manecillas del reloj según se indica por el signo negativo.

Las acciones en los extremos A_M y las reacciones A_R se obtienen sustituyendo las matrices apropiadas dadas arriba en las Ecs. (2-15) y (2-16); los resultados son

$$A_M = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 5 \\ 20L \\ 64 \\ 36L \end{bmatrix} \quad A_R = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 107 \\ 31L \end{bmatrix}$$

Los resultados obtenidos para A_M y A_R pueden verificarse rápidamente por equilibrio estático. Con los redundantes Q_1 y Q_2 conocidas, el equilibrio de la viga puede utilizarse para verificar las reacciones en el apoyo A; también, las acciones de extremo pueden obtenerse considerando el equilibrio de los miembros individuales.

2.6. Inversa de la matriz de flexibilidad. El análisis de una estructura por el método de la flexibilidad requiere la determinación de la matriz de flexibilidad F . Esta matriz se obtiene calculando desplazamientos en la estructura libre, después de lo cual F se invierte y sustituye en la Ec. (2-13). Después la ecuación se resuelve para el vector Q de redundantes. Como la inversa de la matriz de flexibilidad es una matriz de rigidez, es natural considerar la posibilidad de conocer F^{-1} directamente de una consideración de la estructura. Tal procedimiento es posible, pero, como se mostrará después, la inversión de la matriz de flexibilidad sigue siendo un paso esencial en el análisis. Para comprender por qué es cierto esto, se presenta la siguiente discusión sobre el significado físico de F^{-1} .

Según se discutió en el Art. 1-11, cada matriz de flexibilidad y de rigidez puede asociarse con un juego de acciones y desplazamientos correspondientes (véanse las Ecs. 1-10 y 1-12). En el caso de la matriz F utilizada en el método de flexibilidad, las acciones son redundantes que actúan sobre la estructura libre. La matriz de flexibilidad está formada por los desplazamientos correspondientes a las redundantes y debidos a valores unitarios de ellas. Por lo tanto, se sigue que la inversa de la matriz de flexibilidad está formada por las acciones correspondientes a las redundantes y debidas a valores unitarios de los desplazamientos correspondientes a éstas. Cada elemento de la matriz es una acción sobre la estructura debida a un desplazamiento unitario correspondiente a una redundante particular, en tanto que todos los otros desplazamientos correspondientes a las redundantes son cero. Esta matriz de rigidez, igual a F^{-1} , se denominará con el símbolo K .

Para mostrar el significado físico de la matriz K , refirámonos a la viga de dos claros de la Fig. 2-12a. Esta es la misma viga que se ha considerado en ejemplos previos (véase la Fig. 2-2 y 2-11), y las redundantes son las reacciones Q_1 y Q_2 en los apoyos B y C. En la Fig. 2-12b

la viga está mostrada con un desplazamiento unitario correspondiente a Q_1 en tanto que el desplazamiento correspondiente a Q_2 es igual a cero. Las acciones correspondientes a Q_1 y Q_2 se muestran como K_{11} y K_{21} en la figura; estas acciones son los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez K , que es la inversa de la matriz de flexibilidad F para esta viga. De modo similar, en la Fig. 2-12c la viga está sujeta a un desplazamiento unitario correspondiente a Q_2 , y las acciones resultantes correspondientes a Q_1 y Q_2 se denominan K_{12} y K_{22} . Si estas acciones se evalúan para las vigas de la figura, los resultados son

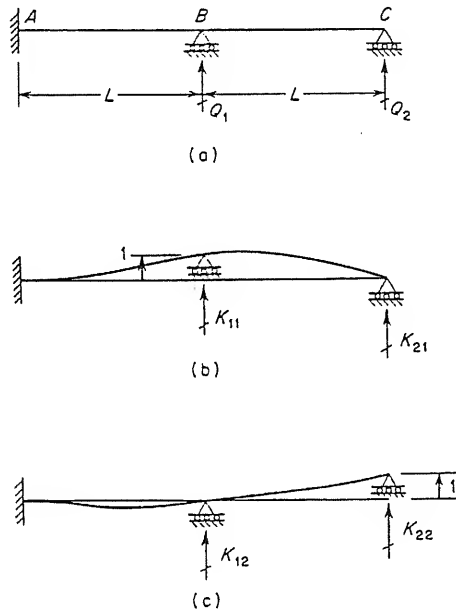


FIG. 2-12. Inversa de la matriz de flexibilidad

$$K_{11} = \frac{96EI}{7L^3} \quad K_{12} = K_{21} = -\frac{30EI}{7L^3} \quad K_{22} = \frac{12EI}{7L^3}$$

Por lo tanto, la matriz inversa K es

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es la misma que la matriz F^{-1} encontrada previamente en el Art. 2.2 para la misma viga.

Si las cuatro acciones K_{11} , K_{12} , K_{21} y K_{22} (dadas anteriormente) se obtienen por el método de flexibilidad utilizando Q_1 y Q_2 como re-

dundantes, el cálculo de la matriz de flexibilidad F y de su inversa es necesario. Por lo tanto, la labor de determinar la matriz K directamente de una consideración de la estructura (véanse las Figs. 2-12b y 2-12c) involucra las mismas operaciones que el procedimiento usual. En general, el modo de solución más conveniente por el método de flexibilidad consiste en determinar la matriz de flexibilidad a partir de un análisis de la estructura libre, invirtiendo esta matriz y sustituyendo en la Ec. (2-13) para encontrar las redundantes.

2.7. Resumen del método de flexibilidad. De acuerdo con lo mostrado en los ejemplos de los artículos precedentes, el método de análisis de las flexibilidades es bastante general y puede aplicarse a cualquier tipo de estructura reticular. Por supuesto, las estructuras escogidas para propósitos ilustrativos en los artículos anteriores son relativamente sencillos para facilitar los cálculos y mantenerlos a un mínimo. Sin embargo, el método puede aplicarse en teoría a estructuras de cualquier grado de complejidad. Para facilitar el análisis de estructuras más complicadas, en el Cap. 3 se desarrollará el método dando énfasis en hacer los cálculos tan sistemáticos como sea posible. Para fines de referencia, al hacer los cálculos por métodos manuales, se hace un resumen en este artículo de las características esenciales del método de flexibilidad, así como de la notación utilizada.

El análisis de una estructura por el método de flexibilidad puede describirse por los pasos siguientes:

1. Enunciado del problema. El problema por resolverse debe estar claramente definido describiéndose la estructura y las cargas, los cambios de temperatura, deformaciones previas y los desplazamientos de los apoyos a los que esté sujeta. La descripción de la estructura incluye el tipo de estructura, las posiciones de los nudos, de los miembros y las posiciones y tipos de los apoyos. También es necesario enunciar los tipos de deformaciones que se considerarán en el análisis, tales como deformaciones por flexión, axiales, etc. Dependiendo en los tipos de deformaciones por considerarse, se deben dar las rigideces apropiadas de los miembros. Por ejemplo, si se consideran las deformaciones por flexión, la rigidez a la flexión EI debe ser conocida para cada miembro; si se consideran las deformaciones axiales, la rigidez axial EA debe darse; y así sucesivamente.

2. Selección de la estructura libre. El grado de indeterminación estática de la estructura debe determinarse, y debe seleccionarse un número correspondiente de acciones redundantes desconocidas Q . La estructura libre se obtiene soltando las redundantes seleccionadas. Las redundantes deben escogerse cuidadosamente para obtener una estructura libre estáticamente determinada que sea inmóvil y fácil

de analizar. En algunos casos, la selección de redundantes requiere una cantidad considerable de criterio de parte del analista y si el análisis se va a hacer tan sencillo como sea posible.

3. Análisis de la estructura libre bajo las cargas. Deben evaluarse diferentes acciones y desplazamientos en la estructura libre provocadas por las cargas. Los desplazamientos más importantes que deben determinarse son los desplazamientos D_{QL} que corresponden a las redundantes. Otros desplazamientos de interés son los desplazamientos D_{JL} en los nudos de la estructura. Las acciones que deben determinarse incluyen las acciones de extremo A_{ML} para los miembros y las reacciones A_{RL} para los apoyos.

4. Análisis de la estructura libre por otras causas. Si existen cambios de temperatura, efectos de deformación previa o desplazamiento de los apoyos que deben incluirse en el análisis, sus efectos deben evaluarse en la estructura libre. Los desplazamientos por encontrar son los que corresponden a las redundantes (D_{QT} , D_{QP} , D_{QR}) y también los desplazamientos de nudo (D_{JT} , D_{JP} , D_{JR}). Las acciones en los extremos de los miembros y las reacciones en los apoyos no se afectan:

5. Análisis de la estructura libre para valores unitarios de las redundantes. Deben determinarse las acciones y los desplazamientos en la estructura libre debidas a valores unitarios de las redundantes. Los desplazamientos que deben calcularse son los que corresponden a las redundantes (coeficientes de influencia de flexibilidad F) y los desplazamientos de los nudos (D_{JQ}). Las acciones que deben evaluarse son las acciones de extremo y las reacciones (A_{MQ} y A_{RQ}).

6. Determinación de redundantes. La ecuación de superposición para los desplazamientos D_Q correspondientes a las redundantes en la estructura actual es la Ec. (2-12):

$$D_Q = D_{QS} + FQ \quad (2-12)$$

repetida

En esta ecuación el vector D_{QS} incluye los efectos de cargas; temperatura, deformación previa y desplazamientos de los apoyos (fuera de los ya considerados en D_Q), de la manera siguiente:

$$D_{QS} = D_{QL} + D_{QT} + D_{QP} + D_{QR} \quad (2-11)$$

repetida

Cuando la Ec. (2-12) se resuelve para las redundantes, el resultado es

$$Q = F^{-1}(D_Q - D_{QS}) \quad (2-13)$$

repetida

7. Determinación de otros desplazamientos y acciones. Los vectores D_J , A_M y A_R para los desplazamientos de nudo, acciones de extremo y reacciones, respectivamente, en la estructura real se obtienen a partir de las siguientes ecuaciones de superposición:

$$D_J = D_{JS} + D_{JQ}Q \quad (2-17)$$

repetida

$$A_M = A_{ML} + A_{MQ}Q \quad (2-15)$$

repetida

$$A_R = A_{RL} + A_{RQ}Q \quad (2-16)$$

repetida

En la Ec. (2-17) el vector D_{JS} representa desplazamientos en la estructura libre debidos a todas las causas, del modo siguiente:

$$D_{JS} = D_{JL} + D_{JT} + D_{JP} + D_{JR} \quad (2-18)$$

repetida

Cuando los vectores D_J , A_M y A_R han sido obtenidos, el análisis puede considerarse completo.

Todas las matrices utilizadas en el método de flexibilidad están resumidas en la Tabla 2-1.

2.8. Método de la rigidez. El método de la rigidez se distingue del de la flexibilidad en los conceptos físicos que están involucrados, aunque los métodos son similares en su formulación matemática. En ambos métodos las ecuaciones fundamentales se derivan utilizando el principio de superposición. En el método de la flexibilidad las cantidades desconocidas son acciones redundantes, pero en el método de la rigidez las incógnitas son los desplazamientos de los nudos de la estructura. Por lo tanto, en el método de la rigidez el número de incógnitas que debe calcularse es igual al grado de indeterminación cinemática. El método de la rigidez involucra un uso extensivo de acciones y desplazamientos en miembros con extremos empotrados, y por lo que se hará referencia constante al material presentado en el Apéndice B.

Para ilustrar los conceptos del método de la rigidez en su forma más sencilla, consideremos el análisis de la viga de la Fig. 2-13a. Esta viga tiene un apoyo empotrado en A, un apoyo guiado en B y está sujeta a una carga uniformemente repartida w . La viga es cinemáticamente indeterminada de primer grado (si se desprecian las deformaciones axiales), debido a que el único desplazamiento de nudo desconocido es la rotación θ_B en el nudo B. La primera fase del análisis es determinar esta rotación. Después de encontrar dicha rotación, pueden determinarse las diferentes acciones y desplazamientos en toda la viga, según se mostrará posteriormente.

En el método de la flexibilidad una estructura libre estáticamente determinada se obtiene alterando la estructura real de modo tal, que las acciones de las redundantes seleccionadas sean cero. La operación análoga en el método de la rigidez es obtener una estructura cinemáticamente determinada alterando la estructura real de modo tal, que todos los desplazamientos desconocidos sean cero. Como los

desplazamientos desconocidos son las translaciones y rotaciones de los nudos, pueden hacerse iguales a cero impidiendo que los nudos de la estructura tengan desplazamientos de cualquier clase. La estructura obtenida al sujetar todos los nudos de la estructura real se llama la *estructura fija*. Para la viga de la Fig. 2-13a la estructura fija se obtiene sujetando al nudo B e impidiéndole cualquier rotación. Por lo tanto, la estructura fija es la viga empotrada mostrada en la Fig. 2-13b.

Cuando las cargas actúan sobre la viga fija (véase la Fig. 2-13b), existe un par M_B desarrollado en el apoyo B. Este par reactivo tiene el sentido de las manecillas del reloj y está dado por la expresión

$$M_B = \frac{wL^2}{12} \quad (2-19)$$

que puede encontrarse en la tabla de momentos de empotramiento dada en el Apéndice B (véase la Tabla B-1). Nótese que el par M_B es una acción correspondiente a la rotación Θ_B , que es la cantidad desconocida en el análisis. Debido a que existe por momento en el nudo B de la viga real de la Fig. 2-13a, es necesario considerar en seguida que la viga fija está sujeta a un momento igual y opuesto al momento M_B . Dicho momento se muestra actuando sobre la viga en la Fig. 2-13c. Cuando las acciones que actúan sobre las dos vigas en (b) y (c) se superponen, producen las acciones sobre la viga real. Por lo tanto, el análisis de la viga de la Fig. 2-13a puede considerarse como la superposición de los análisis mostrados en las Figs. 2-13b y 2-13c. Se sigue, por lo tanto, que la rotación producida por el par M_B en la Fig. 2-13c es igual a Θ_B , la rotación desconocida en la viga real.

La relación entre el momento M_B y la rotación Θ_B en la viga de la Fig. 2-13c es

$$M_B = \frac{4EI}{L} \Theta_B \quad (2-20)$$

en donde EI es la rigidez a la flexión de la viga. La Ec. (2-20) se obtiene del Caso 3 de la Tabla B-4. Igualando las dos expresiones para el momento M_B de las Ecs. (2-19) y (2-20) tenemos la ecuación

$$\frac{wL^2}{12} = \frac{4EI}{L} \Theta_B$$

de donde

$$\Theta_B = \frac{wL^3}{48EI}$$

Por lo tanto, se ha determinado la rotación en el nudo B de la viga.

TABLA 2-1. MATRICES UTILIZADAS EN EL METODO DE LA FLEXIBILIDAD

Matriz	Orden	Definición
Q	$q \times 1$	Acciones redundantes desconocidas (q = número de redundantes)
D_Q	$q \times 1$	Desplazamientos en la estructura real correspondientes a las redundantes
D_{QL}	$q \times 1$	Desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las redundantes y debidos a las cargas
F (o D_{QQ})	$q \times q$	Desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las redundantes y debidos a valores unitarios de las redundantes (coeficientes de flexibilidad)
D_{QT}, D_{QP}, D_{QR}	$q \times 1$	Desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las redundantes y debidos a temperatura, deformación previa, y desplazamientos de los apoyos (fuera de los considerados en D_Q)
D_{QS}	$q \times 1$	$D_{QS} = D_{QL} + D_{QT} + D_{QP} + D_{QR}$
D_J	$j \times 1$	Desplazamientos de nudo en la estructura real (j = número de desplazamientos de nudos)
D_{JL}	$j \times 1$	Desplazamientos de nudo en la estructura libre debidos a las cargas
D_{JQ}	$j \times q$	Desplazamientos de nudo en la estructura libre debidos a valores unitarios de las redundantes
D_{JT}, D_{JP}, D_{JR}	$j \times 1$	Desplazamientos de nudo en la estructura libre debido a temperatura, deformación previa y desplazamientos de los apoyos (fuera de los considerados en D_Q)
D_{JS}	$j \times 1$	$D_{JS} = D_{JL} + D_{JT} + D_{JP} + D_{JR}$
A_M	$m \times 1$	Acciones en los extremos de los miembros en la estructura real (m = número de acciones)
A_{ML}	$m \times 1$	Acciones en los extremos de los miembros en la estructura real debidos a las cargas
A_{MQ}	$m \times q$	Acciones en los extremos de los miembros en la estructura real debidos a valores unitarios de las redundantes
A_R	$r \times 1$	Reacciones en la estructura real (r = número de reacciones)
A_{RL}	$r \times 1$	Reacciones en la estructura libre debidas a las cargas
A_{RQ}	$r \times q$	Reacciones en la estructura libre debidas a valores unitarios de las redundantes

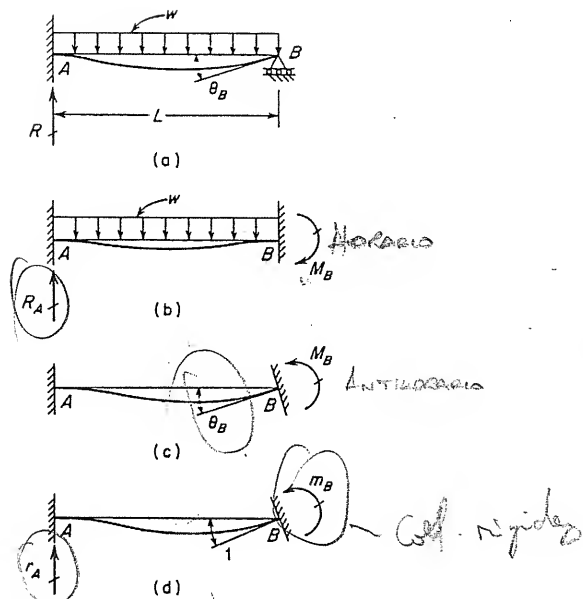


FIG. 2-13. Ilustración del método de la rigidez

De una manera análoga a la utilizada en el método de la flexibilidad, es conveniente en el ejemplo anterior considerar la estructura fija bajo el efecto de un valor unitario de la rotación desconocida. También es más sistemático formular la ecuación para la rotación como una ecuación de superposición y utilizar una convención consistente de signos para todos los términos de la ecuación. Este procedimiento será utilizado para la viga de la Fig. 2-13.

El efecto de un valor unitario de la rotación desconocida se muestra en la Fig. 2-13d, donde la viga fija está sujeta a la acción de un par m_B que produce un valor unitario de la rotación θ_B en el extremo de la derecha. Como el momento m_B es una acción correspondiente a la rotación θ_B y causada por un valor unitario de aquella rotación (en tanto que los otros desplazamientos de nudo son cero), se conoce que m_B es un coeficiente de rigidez para la estructura fija (véase el Art. 1.10). El valor del par m_B (véase la Ec. 2-20) es

$$m_B = \frac{4EI}{L}$$

Al formular la ecuación de superposición los pares en el nudo B se sobrepondrán de la manera siguiente. El par en la viga fija sujeta a la carga (Fig. 2-13b) se suma al par m_B (correspondiente a un

valor unitario de θ_B), multiplicado por θ_B . La suma de estos dos términos debe dar el par en el nudo B de la viga real, que es cero en este ejemplo. Todos los términos en la ecuación de superposición se expresan en la misma convención de signos, a saber, que todos los pares y rotaciones en el nudo B son positivos cuando tienen un sentido opuesto al de las manecillas del reloj. De acuerdo con esta convención, el par M_B en la viga de la Fig. 2-13b es negativo:

$$M_B = -\frac{wL^2}{12}$$

La ecuación de superposición de momentos en el apoyo B queda

$$M_B + m_B \theta_B = 0 \quad \text{Manejo de la viga real en el apoyo B} \quad (2-21)$$

o

$$-\frac{wL^2}{12} + \frac{4EI}{L} \theta_B = 0$$

Resolviendo esta ecuación queda

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI}$$

que es el mismo resultado anterior. El signo positivo para el resultado significa que la rotación tiene el sentido de las manecillas del reloj.

La parte más esencial en la solución anterior consiste en escribir la ecuación de superposición (2-21), que expresa el hecho de que el momento en B en la viga real es cero. En esta ecuación está incluido el momento provocado por las cargas que actúan sobre la estructura fija y el momento causado por la rotación del extremo B de la estructura fija. El último término en la ecuación se expresó adecuadamente como el producto del momento causado por un valor unitario del desplazamiento desconocido (coeficiente de rigidez) multiplicado por el desplazamiento desconocido. Los dos efectos se suman algebraicamente, utilizando la misma convención de signos para todos los términos de la ecuación. Cuando la ecuación se resuelve para el desplazamiento desconocido, el signo del resultado da la dirección real del desplazamiento. La ecuación puede llamarse ecuación de superposición o bien ecuación de equilibrio de nudo. El último nombre se utiliza debido a que puede considerarse que la ecuación expresa el equilibrio de momentos en el nudo B.

Una vez obtenida la rotación desconocida θ_B para la viga, es posible calcular otras cantidades, tales como las acciones de extremo y las reacciones. Como ejemplo, supongamos que debemos encontrar la fuerza reactiva R que actúa en el apoyo A de la viga (Fig. 2-13a). Esta fuerza es la suma de la fuerza reactiva correspondiente R_A en el apoyo A en la Fig. 2-13b y θ_B multiplicada por la fuerza r_A en la

Fig. 2-13d, como se muestra en la siguiente ecuación de superposición:

$$R = R_A + \theta_{B^*A}$$

Las fuerzas R_A y r_A pueden calcularse fácilmente para la viga fija (véase el Caso 6, Tabla B-1, y el Caso 3, Tabla B-4):

$$R_A = \frac{wL}{2} \quad r_A = \frac{6EI}{L^2}$$

Cuando estos valores, así como los encontrados previamente para θ_B , se sustituyen en la ecuación anterior, el resultado es

$$R = \frac{5wL}{8}$$

Se pueden utilizar los mismos conceptos para calcular cualquier otra acción o desplazamientos de la viga. Sin embargo, en todos los casos deben encontrarse primero los desplazamientos de nudo desconocidos.

Si una estructura es cinemáticamente indeterminada de mayor grado al primero, se debe introducir un acercamiento más organizado para la solución, así como una notación también más generalizada. Para este fin, se analizará la misma viga de dos claros utilizada previamente como un ejemplo en el método de la flexibilidad, pero ahora por el método de la rigidez (véase la Fig. 2-14a). La viga tiene una rigidez a la flexión constante e igual a EI , y está sujeta a las cargas P_1 , M , P_2 y P_3 . Como los nudos B y C pueden permitir rotaciones, la estructura es cinemáticamente indeterminada de segundo grado cuando despreciamos las deformaciones axiales. Sean D_1 y D_2 las rotaciones desconocidas en estos puntos, respectivamente, y supongamos que las rotaciones con sentido opuesto a las manecillas del reloj son positivas. Estos desplazamientos desconocidos pueden determinarse resolviendo ecuaciones de superposición para las acciones en los nudos B y C , como se describe en la siguiente discusión.

El primer paso en el análisis consiste en aplicar fijaciones imaginarias en los nudos para prevenir todos los desplazamientos. La estructura fija que se obtiene por estos medios se muestra en la Fig. 2-14b y está formada por dos vigas empotradas. La estructura fija se supone bajo la acción de todas las cargas excepto aquellas que corresponden a los desplazamientos desconocidos. Por lo tanto, únicamente se muestran en la Fig. 2-14b las cargas P_1 , P_2 y P_3 . Todas las cargas que corresponden a los desplazamientos de nudo desconocidos, tales como el par M de este ejemplo, se consideran posteriormente. Los momentos A_{DL1} y A_{DL2} (Fig. 2-14b) son las acciones de las restricciones (contra la estructura fija) correspondientes a D_1 y

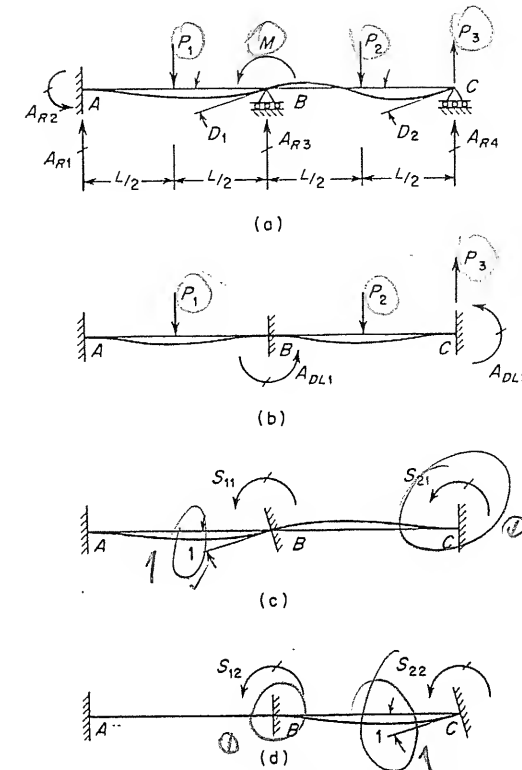


FIG. 2-14. Ilustración del método de la rigidez

D_2 , respectivamente, y causadas por cargas que actúan sobre la estructura, por ejemplo, la acción de fijación o restricción A_{DL1} es la suma del momento reactivo en B debido a la carga P_1 que actúa sobre el miembro AB y el momento reactivo en B debido a la carga P_2 que actúa en el miembro BC . Estas acciones pueden encontrarse con el auxilio de fórmulas para momentos de empotramiento en vigas (véase el Apéndice B), según se ilustra posteriormente.

Para generar los coeficientes de rigidez en los nudos B y C , se inducen separadamente en la estructura fija valores de los desplazamientos desconocidos D_1 y D_2 . Un desplazamiento unitario correspondiente a D_1 consiste en una rotación unitaria del nudo B , según se muestra en la Fig. 2-14c. El desplazamiento D_2 permanece igual a cero en esta viga. Por lo tanto, las acciones correspondientes a D_1 y D_2 son los coeficientes de rigidez S_{11} y S_{21} respectivamente. Estas rigideces están formadas por los pares producidos por las fijaciones en la viga en los nudos B y C respectivamente. El cálculo de estas acciones no es difícil cuando se cuenta con fórmulas para momentos

de empotramiento. Su determinación en este ejemplo se describirá luego. La condición que D_2 es igual a la unidad en tanto que D_1 es igual a cero se muestra en la Fig. 2-14d. En la figura la rigidez S_{12} es la acción correspondiente a D_1 en tanto que la rigidez S_{22} es la acción correspondiente a D_2 . Nótese que en cada caso el coeficiente de rigidez es la acción que la fijación artificial ejerce sobre la estructura.

Podemos escribir ahora dos ecuaciones de superposición que expresan las condiciones pertenecientes a los momentos que actúan sobre la estructura original (Fig. 2-14a) en los nudos B y C. Sean las acciones en la estructura real correspondientes a D_1 y D_2 llamadas A_{D1} y A_{D2} , respectivamente. Estas acciones son cero en todos los casos excepto cuando una acción concentrada externa se aplica en un nudo correspondiente a un grado de libertad. En el ejemplo de la Fig. 2-14, la acción A_{D1} es igual al par M en tanto que la acción A_{D2} es igual a cero. Las ecuaciones de superposición expresan el hecho de que las acciones en la estructura original (Fig. 2-14a) son iguales a las acciones correspondientes en la estructura fija debidas a las cargas (Fig. 2-14b) más las acciones correspondientes en la estructura fija bajo los desplazamientos unitarios (Figs. 2-14c y 2-14d) multiplicadas por los desplazamientos mismos. Por lo tanto, las ecuaciones de superposición son

$$\begin{aligned} A_{D1} &= A_{DL1} + S_{11}D_1 + S_{12}D_2 \\ A_{D2} &= A_{DL2} + S_{21}D_1 + S_{22}D_2 \end{aligned} \quad (2-22)$$

La convención de signos utilizada en estas ecuaciones es que los momentos son positivos cuando tienen el mismo sentido (contrario a las manecillas del reloj) que los desplazamientos desconocidos correspondientes.

Cuando las Ecs. (2-22) se expresan en forma matricial quedan

$$A_D = A_{DL} + SD \quad (2-23)$$

en donde el vector A_D representa las acciones en la viga original correspondientes a los desplazamientos de nudo desconocidos D , el vector A_{DL} representa acciones en la estructura fija correspondientes a los desplazamientos de nudo desconocidos y causados por las cargas (esto es, todas las cargas excepto aquellas correspondientes a los desplazamientos desconocidos), y S es la matriz de rigidez correspondiente a los desplazamientos desconocidos. La matriz de rigidez S también podría denominarse A_{DD} , ya que representa acciones correspondientes a los desplazamientos de nudo desconocidos y causados por valores unitarios de aquellos desplazamientos. Para el ejemplo de la Fig. 2-14 las matrices son las siguientes:

$$A_D = \begin{bmatrix} A_{D1} \\ A_{D2} \end{bmatrix} \quad A_{DL} = \begin{bmatrix} A_{DL1} \\ A_{DL2} \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

En general, estas matrices tendrán tantos renglones como existan desplazamientos de nudo desconocidos. Por lo tanto, si d representa el número de desplazamientos desconocidos, el orden de la matriz de rigidez S es $d \times d$, en tanto que A_D , A_{DL} y D son vectores de orden $d \times 1$.

Restando A_{DL} de ambos lados de la Ec. (2-23) y luego premultiplicando por S^{-1} tenemos la siguiente ecuación para los desplazamientos desconocidos:

$$D = S^{-1}(A_D - A_{DL}) \quad (2-24)$$

Esta ecuación representa la solución para los desplazamientos en los términos de la matriz debido a que los elementos de A_D , A_{DL} y S son conocidos o pueden obtenerse a partir de la estructura fija. Aún más, las acciones de extremo y reacciones de la estructura pueden encontrarse una vez que se conozcan los desplazamientos de nudo. El procedimiento para desarrollar dichos cálculos se ilustrará después.

Para demostrar el uso de la Ec. (2-24), la viga de la Fig. 2-14a se analizará para los valores de las cargas dadas anteriormente:

$$P_1 = 2P \quad M = PL \quad P_2 = P \quad P_3 = P$$

Cuando las cargas P_1 , P_2 y P_3 actúan sobre la estructura fija (Fig. 2-14b) las acciones A_{DL1} y A_{DL2} , correspondientes a D_1 y D_2 , respectivamente, se desarrollan en los apoyos B y C. Como el par M corresponde a uno de los desplazamientos desconocidos, se toma en consideración posteriormente por medio de la matriz A_D . Las acciones A_{DL1} y A_{DL2} se encuentran a partir de las fórmulas para momentos de empotramiento (véase el Caso 1, Tabla B-1):

$$\begin{aligned} A_{DL1} &= -\frac{P_1 L}{8} + \frac{P_2 L}{8} = -\frac{PL}{8} \\ A_{DL2} &= -\frac{P_2 L}{8} = -\frac{PL}{8} \end{aligned}$$

$7\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{PL}{8}$

Por lo tanto, la matriz A_{DL} es

$$A_{DL} = \frac{PL}{8} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Puede observarse en estos cálculos que la carga P_3 no interviene en la matriz A_{DL} , por lo tanto, no afecta los cálculos para los desplazamientos de nudo. Sin embargo, esta carga sí afecta los cálculos para las reacciones de la viga real, las que se dan posteriormente.

La matriz de rigidez S consiste en los coeficientes de rigidez mos-

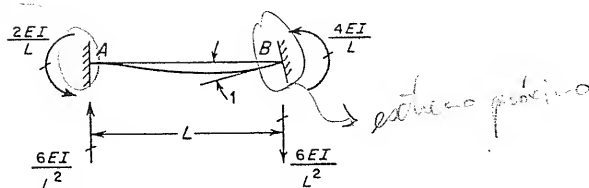


FIG. 2-15. Rigideces de miembro para una viga

trados en las Figs. 2-14c y 2-14d. Cada coeficiente es un par correspondiente a uno de los desplazamientos desconocidos y debido a un valor unitario de uno de los desplazamientos. En la Fig. 2-14c, se muestran elementos de la primera columna de la matriz de rigidez, y en la Fig. 2-14d elementos de la segunda columna. Para encontrar estos coeficientes, consideremos primero la viga empotrada mostrada en la Fig. 2-15. Esta viga está sujeta a una rotación unitaria en el extremo B, y como resultado, el momento desarrollado en el extremo B es $4EI/L$ en tanto que el momento en el extremo opuesto es $2EI/L$ (véase el Caso 3, Tabla B-4). Las fuerzas reactivas en los extremos de la viga son cada una igual a $6EI/L^2$, y también se muestran en la figura. Todas las acciones mostradas en la Fig. 2-15 se llaman *rigideces del miembro*, debido a que son acciones en los extremos del miembro debidas a un desplazamiento unitario de un extremo. El extremo de la viga que sufre el desplazamiento unitario es llamado, en algunas ocasiones el *extremo próximo* de la viga, y el extremo opuesto el *extremo lejano*. Por lo tanto, las rigideces del miembro en A y B se les refiere en ocasiones como las rigideces en el extremo próximo y el lejano de la viga. El tema de rigidez de miembro se trata detalladamente en el Cap. 4 junto con una discusión más detallada del método de rigidez.

La labor de calcular las rigideces de nudo S_{11} y S_{21} en la Fig. 2-14c puede efectuarse ahora mediante el uso de las rigideces de miembro. Cuando la viga gira un ángulo unitario en el nudo B, se desarrolla un momento igual a $4EI/L$ debido a la rotación del extremo del miembro AB. También, un momento igual a $4EI/L$ se desarrolla en B debido a la rotación del extremo del miembro BC. Por lo tanto, el momento total en B, igual a S_{11} , es

$$S_{11} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} = \frac{8EI}{L} \quad (a)$$

La rigidez S_{21} es el momento desarrollado en el nudo C cuando el nudo B gira un ángulo unitario. Como el nudo C es el extremo lejano del miembro, el coeficiente de rigidez es

$$S_{21} = \frac{2EI}{L}$$

Tanto S_{11} como S_{21} son positivas debido a que actúan en sentido opuesto al de las manecillas del reloj. Los coeficientes de rigidez S_{12} y S_{22} se muestran en la Fig. 2-14d. El primero de éstos es igual a $2EI/L$, ya que es una acción en el extremo lejano del miembro BC, en tanto que el último es igual a $4EI/L$, ya que es en el extremo próximo del miembro.

La matriz de rigidez S puede formarse con los coeficientes de rigidez descritos anteriormente

$$S = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Cada uno de los elementos en S es una *rigidez de nudo*, ya que representa la acción en uno de los nudos de la estructura debida a un valor unitario de un desplazamiento en uno de los nudos. En este ejemplo, la rigidez de nudo S_{11} (véase la Fig. 2-14c) es la suma de las rigideces de miembro de extremo próximo (véase la Ec. a) para los dos miembros que se unen en ese nudo. De modo similar, la rigidez S_{22} es una rigidez de miembro de extremo próximo. Por otra parte, las rigideces S_{12} y S_{21} están formadas por rigideces de miembro de extremo lejano para miembros que se conectan a un nudo que ha sufrido una rotación. En un ejemplo más general, se encontrará que los elementos de rigidez de la diagonal principal siempre están compuestos de rigideces de extremo próximo en tanto que los que están fuera de la diagonal pueden ser rigideces ya sea de extremo próximo o de extremo lejano, como veremos en ejemplos posteriores. Una vez que se ha determinado la matriz de rigidez S , podemos encontrar su inversa

$$S^{-1} = \frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

La siguiente matriz que debe determinarse es la matriz A_D , que representa las acciones en la estructura real correspondientes a los desplazamientos unitarios. En este ejemplo la carga externa que corresponde a la rotación D_1 es el par M (igual a PL) en el nudo B. No existe momento en el nudo C correspondiente a D_2 y por lo tanto, la matriz A_D es

$$A_D = \begin{bmatrix} PL \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una vez que se han determinado las matrices A_D , S^{-1} y A_{DL} , podemos encontrar la matriz de desplazamientos D de la estructura real sustituyendo en la Ec. (2-24) y despejando:

$$D = \frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} PL \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{PL}{8} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{PL^2}{112EI} \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, las rotaciones D_1 y D_2 en los nudos B y C son respectivamente

$$D_1 = \frac{17PL^2}{112EI} \quad D_2 = -\frac{5PL^2}{112EI} \quad (b)$$

Estos resultados concuerdan con los desplazamientos de nudo encontrados por el método de flexibilidad en el ejemplo del Art. 2.5.

El siguiente paso una vez encontrados los desplazamientos de nudo es determinar las acciones de extremo y las reacciones de la estructura. Como en el método de flexibilidad existen dos acercamientos que pueden seguirse cuando se hacen las operaciones manualmente. Uno de ellos es obtener las acciones de extremo así como las reacciones efectuando cálculos separados una vez encontrados los desplazamientos de nudo. El otro acercamiento es efectuar los cálculos de modo sistemático simultáneamente con los cálculos para encontrar los desplazamientos. Utilizando el primero de los dos métodos, las acciones de extremo se obtienen considerando consecutivamente cada miembro en particular de la estructura. Para cada miembro se determinan los efectos de las cargas sobre el miembro fijo y los efectos de los desplazamientos en los extremos del miembro. A continuación se combinan estos resultados para dar las acciones de extremo en la viga original. (Este método es bastante apropiado para una programación para computadora, y se discute en el Cap. 4). Una vez determinadas todas estas acciones de extremo para una estructura, las reacciones pueden encontrarse por equilibrio estático.

El segundo acercamiento para encontrar acciones de extremo y reacciones es apropiado, sin embargo, para cálculos manuales debido a que es sistemático y puede generalizarse fácilmente. Para mostrar cómo se desarrollan las operaciones, consideremos de nuevo la viga de dos claros mostrada en la Fig. 2-14. Como en el método de la flexibilidad, las matrices de acciones en los extremos de los miembros y reacciones en la estructura real (Fig. 2-14a) se denominarán A_M y A_R , respectivamente. En la estructura fija sujeta a las cargas (Fig. 2-14b), las matrices de acciones de extremo y reacciones correspondientes a A_M y A_R se denominarán A_{ML} y A_{RL} , respectivamente. Debe notarse de nuevo que cuando se haga cualquier referencia a las cargas que actúan sobre la estructura fija, se supone que todas las cargas reales se toman en consideración excepto aquellas que corresponden a un desplazamiento desconocido. Por lo tanto, la carga de nudo M mostrada en la Fig. 2-14a no aparece en la estructura fija de la Fig. 2-14b. Sin embargo, todas las otras cargas se consideran que actúan sobre la viga fija de la Fig. 2-14b, incluyendo la carga P_3 . Esta carga no afecta las acciones de extremo A_{ML} en la estructura fija, pero sí a las reacciones A_{RL} . Cada una de las matrices

A_M y A_{ML} es de orden $m \times 1$, suponiendo que m representa el número de acciones de extremo; de igual modo, las matrices A_R y A_{RL} son de orden $r \times 1$, en donde r representa el número de reacciones.

En la estructura fija sujeta a desplazamientos unitarios (Figs. 2-14c y 2-14d), las matrices de acciones de extremo y reacciones se denominan A_{MD} y A_{RD} , respectivamente. La primera columna de cada una de las matrices contiene las acciones obtenidas de la viga fija en la Fig. 2-14c, en tanto que la segunda columna está formada por acciones obtenidas de la viga en la Fig. 2-14d. En el caso general las matrices A_{MD} y A_{RD} son de orden $m \times d$ y $r \times d$, respectivamente, en donde d representa el número de desplazamientos desconocidos.

Las ecuaciones de superposición para las acciones de extremo y reacciones en la estructura real puede expresarse ahora en forma matricial:

$$A_M = A_{ML} + A_{MD}D \rightarrow \text{ACCIONES} \quad (2-25)$$

$$A_R = A_{RL} + A_{RD}D \rightarrow \text{REACCIONES} \quad (2-26)$$

Las dos ecuaciones anteriores y la Ec. (2-23) juntas constituyen las tres ecuaciones de superposición del método de la rigidez. La solución completa de una estructura consiste en resolver la matriz D de desplazamientos de la Ec. (2-24) y luego sustituir en las Ecs. (2-25) y (2-26) para determinar A_M y A_R . Cuando se ha hecho esto, todos los desplazamientos de nudo, acciones de extremo y reacciones de la estructura son conocidos.

Consideremos ahora el uso de las Ecs. (2-25) y (2-26) en la solución de la viga de dos claros mostrada en la Fig. 2-14. Los desplazamientos desconocidos D han sido determinados previamente (ver Ecs. b) y todo lo que falta es la determinación de las matrices A_{ML} , A_{RL} , A_{MD} y A_{RD} . Supongamos que las acciones de extremo que deben calcularse son la fuerza cortante A_{M1} y el momento A_{M2} en el extremo B del miembro AB, y la fuerza cortante A_{M3} y el momento A_{M4} en el extremo B del miembro BC. Estas son las mismas acciones de extremo consideradas previamente en la solución mediante el método de la flexibilidad (véase la Fig. 2-11b), y se ha escogido únicamente para fines ilustrativos. También, supongamos que las reacciones que deben calcularse son la fuerza A_{R1} y el par A_{R2} en el apoyo A, y las fuerzas A_{R3} y A_{R4} en los apoyos B y C (véase la Fig. 2-14a). Las dos primeras reacciones son las mismas que en la solución anterior, y las últimas dos son las redundantes de la misma solución anterior. Todas estas acciones se consideran positivas cuando son hacia arriba o en contra de las manecillas del reloj.

En la estructura fija sujeta a las cargas (Fig. 2-14b), los momentos de extremo y las reacciones en términos de las cargas P_1 , P_2 y P_3 son los siguientes:

$$A_{ML1} = \frac{P_1}{2} \quad A_{ML2} = -\frac{P_1 L}{8} \quad A_{ML3} = \frac{P_2}{2} \quad A_{ML4} = \frac{P_2 L}{8}$$

$$A_{RL1} = \frac{P_1}{2} \quad A_{RL2} = \frac{P_1 L}{8} \quad A_{RL3} = \frac{P_1}{2} + \frac{P_2}{2} \quad A_{RL4} = \frac{P_2}{2} - P_3$$

Los valores de las cargas ($P_1 = 2P$, $P_2 = P$, $P_3 = P$) pueden sustituirse en estas expresiones, pudiendo formarse de este modo las matrices A_{ML} y A_{RL} :

$$A_{ML} = \frac{P}{8} \begin{bmatrix} 8 \\ -2L \\ 4 \\ L \end{bmatrix} \quad A_{RL} = \frac{P}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ L \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Las matrices A_{MD} y A_{RD} se obtienen de un análisis de las vigas mostradas en las Figs. 2-14c y 2-14d. Por ejemplo, la acción de extremo A_{MD11} es la fuerza cortante en el extremo B del miembro AB debido a un desplazamiento unitario correspondiente a D_1 (Fig. 2-14c). Por lo tanto, esta acción de extremo es

$$A_{MD11} = -\frac{6EI}{L^2}$$

como puede verse en la Fig. 2-15. La reacción A_{RD11} es la fuerza vertical en el apoyo A de la viga de la Fig. 2-14c, y es

$$A_{RD11} = \frac{6EI}{L^2}$$

De modo similar, las otras acciones de extremo y las reacciones pueden encontrarse para la viga mostrada en la Fig. 2-14c. Estas cantidades constituyen las primeras columnas de las matrices A_{MD} y A_{RD} . Los términos de las segundas columnas se encuentran mediante análisis similares que se hacen para la viga mostrada en la Fig. 2-14d. Los resultados son como siguen:

$$A_{MD} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 4L & 0 \\ 6 & 6 \\ 4L & 2L \end{bmatrix} \quad A_{RD} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2L & 0 \\ 0 & 6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las matrices A_{ML} y A_{MD} dadas anteriormente, así como la matriz D obtenida previamente, en la Ec. (2-25) obtenemos lo siguiente:

$$A_M = \frac{P}{8} \begin{bmatrix} 8 \\ -2L \\ 4 \\ L \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 4L & 0 \\ 6 & 6 \\ 4L & 2L \end{bmatrix} \frac{PL^2}{112EI} \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 5 \\ 20L \\ 64 \\ 36L \end{bmatrix}$$

Este resultado concuerda con el encontrado previamente por el método de la flexibilidad (véase el Art. 2.5). Sustituyendo las matrices A_{RL} , A_{RD} y D en la Ec. (2-26) podemos encontrar las reacciones también:

$$A_R = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 107 \\ 31L \\ 69 \\ -64 \end{bmatrix}$$

Estos resultados también concuerdan con los encontrados antes mediante el método de la flexibilidad.

El método de solución descrito antes para la viga de dos claros de la Fig. 2-14 es bastante general en sus conceptos básicos, y las ecuaciones matriciales (2-23) a (2-26) pueden utilizarse también en la solución de cualquier tipo de estructura reticular. También, las ecuaciones se aplican a estructuras que tengan cualquier grado de indeterminación cinemática. En el siguiente artículo se dan varios ejemplos que ilustran el método de la rigidez.

2.9. Ejemplos. Los ejemplos dados en este artículo ilustran las aplicaciones del método de rigidez a varios tipos de estructuras. En cada ejemplo el objeto de los cálculos es determinar los desplazamientos de nudo desconocidos y ciertas acciones de extremo y reacciones. Como el número de grados de indeterminación cinemática es pequeño, los problemas son apropiados para una resolución manual. La mayoría de los ejemplos se resuelven en forma de literales debido a que esto ilustra con más claridad cómo se obtienen los diferentes términos de las matrices.

EJEMPLO 1. La viga continua de tres claros mostrada en la Fig. 2-16a tiene apoyos empotrados en A y D y apoyos guiados en B y C; la longitud del claro central es igual a 1.5 veces el claro lateral. Las cargas que actúan sobre la viga se suponen ser dos fuerzas concentradas que actúan en las posiciones mostradas, una carga uniformemente repartida de intensidad w que actúa sobre los claros BC y CD, y un momento M aplicado en el nudo C. Todos los miembros de la viga se suponen tener la misma rigidez a la flexión EI .

Los desplazamientos de nudo desconocidos para la viga son las rotaciones en los apoyos B y C, denominados D_1 y D_2 , respectivamente, según se muestra en la Fig. 2-16b. Para fines ilustrativos en este ejemplo, se supondrá que las únicas acciones de extremo que deben determinarse son la fuerza cortante A_{M1} y el momento A_{M2} , del extremo izquierdo del miembro AB, y la fuerza cortante A_{M3} y el momento A_{M4} del extremo izquierdo del miembro BC, según se muestra en la Fig. 2-16b. Las reacciones que deben encontrarse en este ejemplo son las fuerzas verticales A_{R1} y A_{R2} en los apoyos B y C, respectivamente. También se pueden obtener otras reacciones si se desea. Todas las acciones de extremo, reacciones y desplazamientos de nudo se consideran positivos cuando sean hacia arriba o en sentido opuesto al de las manecillas de un reloj.

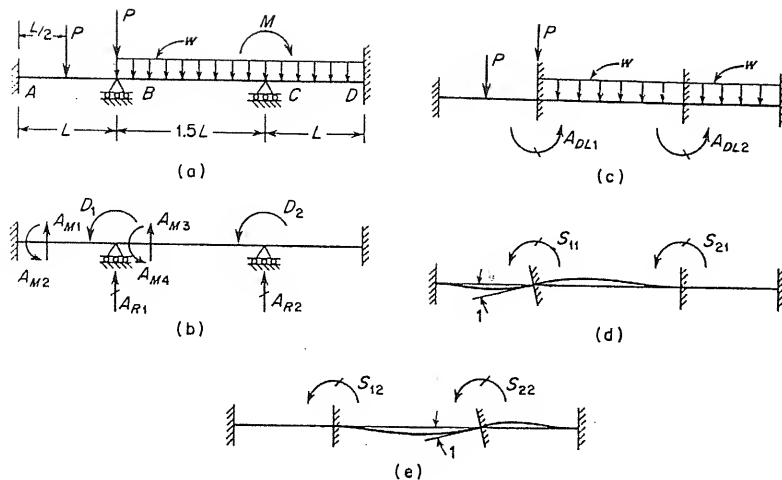


FIG. 2-16. Ej. 1: Viga continua

La única carga sobre la estructura que corresponde a uno de los desplazamientos de nudo desconocidos es el par M , que corresponde a la rotación D_2 (excepto en que es de sentido opuesto). Por tanto, el vector A_D de acciones correspondientes a los desplazamientos desconocidos es

$$A_D = \begin{bmatrix} 0 \\ -M \end{bmatrix}$$

Las fuerzas restantes que actúan sobre la viga se toman en cuenta considerando que actúan sobre la estructura fija mostrada en la Fig. 2-16c. Esta estructura consiste en vigas doblemente empotradas y se obtiene evitando que los nudos B y C giren. Las acciones A_{DL1} y A_{DL2} ejercidas sobre la viga por las fijaciones artificiales son los pares de los apoyos B y C. Cada uno de los pares es una acción correspondiente a un desplazamiento D y causado por cargas sobre la viga. Los pares pueden valorarse sin ninguna dificultad refiriéndose a las fórmulas para momentos de empotramiento dadas en la Tabla B-1 del Apéndice (véanse los Casos 1 y 6):

$$A_{DL1} = -\frac{PL}{8} + \frac{w(1.5L)^2}{12} = -\frac{PL}{8} + \frac{3wL^2}{16}$$

$$A_{DL2} = -\frac{w(1.5L)^2}{12} + \frac{wL^2}{12} = -\frac{5wL^2}{48}$$

Por lo tanto, el vector A_{DL} queda

$$A_{DL} = \frac{L}{48} \begin{bmatrix} -6P + 9wL \\ -5wL \end{bmatrix}$$

Las acciones de extremo A_{ML} y las reacciones A_{RL} de la viga fija de la Fig. 2-16c pueden determinarse también refiriéndonos a la tabla para acciones de empotramiento. Por ejemplo, la acción de extremo A_{ML1} es la fuerza cortante en el extremo izquierdo del miembro AB y es igual a $P/2$; de igual

modo, la reacción A_{RL1} es la reacción vertical en el apoyo B, obteniéndose del modo siguiente:

$$A_{RL1} = \frac{P}{2} + P + \frac{w(1.5L)}{2} = \frac{3P}{2} + \frac{3wL}{4}$$

Continuando de la misma manera, podemos encontrar todas las acciones necesarias en la estructura fija. Los vectores resultantes A_{ML} y A_{RL} son:

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ \frac{3wL}{4} \\ \frac{3wL^2}{16} \end{bmatrix} \quad A_{RL} = \begin{bmatrix} \frac{3P}{2} + \frac{3wL}{4} \\ \frac{5wL}{4} \end{bmatrix}$$

Nótese que la carga P que actúa hacia abajo en el nudo B afecta las reacciones en la viga fija pero no las acciones de extremo.

Para simplificar los cálculos subsecuentes, supongamos ahora que existen las siguientes relaciones entre las diferentes cargas sobre la viga:

$$wL = P \quad M = PL$$

Sustituyendo estas relaciones en las matrices dadas en los párrafos anteriores se obtienen las siguientes matrices:

$$A_D = PL \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad A_{DL} = \frac{PL}{48} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad A_{ML} = \frac{P}{16} \begin{bmatrix} 8 \\ 2L \\ 12 \\ 3L \end{bmatrix} \quad A_{RL} = \frac{P}{4} \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

El siguiente paso en la solución es el análisis de la viga fija para los efectos de desplazamientos unitarios correspondientes a las incógnitas. Las dos condiciones que deben considerarse son giros unitarios en los nudos B y C, según se ilustra en las Figs. 2-16d y 2-16e. Los cuatro pares que actúan en los nudos B y C en estas figuras, representan los elementos de la matriz de rigidez S . Utilizando las fórmulas dadas en la Fig. 2-15, cada una de estas rigideces pueden determinarse sin ninguna dificultad, de acuerdo con lo mostrado en los cálculos siguientes:

$$S_{11} = S_{22} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{1.5L} = \frac{20EI}{3L}$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{2EI}{1.5L} = \frac{4EI}{5L}$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez S queda

$$S = \frac{4EI}{3L} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

y la matriz inversa es

$$S^{-1} = \frac{L}{32EI} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos de nudo pueden encontrarse ahora sustituyendo las matrices S^{-1} , A_D y A_{DL} en la Ec. (2-24) y despejando D , como se muestra:

$$D = \frac{L}{32EI} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \left\{ PL \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{PL}{48} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} = \frac{PL^2}{384EI} \begin{bmatrix} 7 \\ -53 \end{bmatrix}$$

Esta matriz da las rotaciones en los nudos B y C de la viga continua mostrada en la Fig. 2-16a.

Como el siguiente paso en la determinación de las acciones de extremo y de las reacciones, es necesario considerar nuevamente las vigas fijas mostradas en las Figs. 2-16d y 2-16e. En cada una de estas vigas existen acciones de extremo y reacciones que corresponden a las acciones de extremo y a las reacciones seleccionadas anteriormente y mostradas en la Fig. 2-16b. Estas cantidades para las vigas con desplazamientos unitarios se denominan A_{MD} y A_{RD} , respectivamente. Por ejemplo, la acción de extremo A_{MD11} es la fuerza cortante en el extremo izquierdo del miembro AB debida a un valor unitario de D_1 (véase la Fig. 2-16d). La acción de extremo A_{MD21} es el momento en la misma posición. En todos los casos el primer subíndice identifica la acción de extremo misma y el segundo significa el desplazamiento unitario que produce la acción. Las acciones en las vigas de las Figs. 2-16d y 2-16e siguen un patrón similar, con A_{RD11} y A_{RD21} como reacciones en los apoyos B y C, respectivamente, debidas a un valor unitario del desplazamiento D_1 (Fig. 2-16d). Con este esquema de identificación en mente, y utilizando también las fórmulas dadas en la Fig. 2-15, no es difícil calcular las varias acciones de extremo y las reacciones. Por ejemplo, las acciones de extremo en la viga de la Fig. 2-16d son las siguientes:

$$A_{MD11} = \frac{6EI}{L^2} \quad A_{MD21} = \frac{2EI}{L} \quad A_{MD31} = \frac{6EI}{(1.5L)^2} = \frac{8EI}{3L^2} \quad A_{MD41} = \frac{4EI}{1.5L} = \frac{8EI}{3L}$$

También, las reacciones en la misma viga son

$$A_{RD11} = -\frac{6EI}{L^2} + \frac{6EI}{(1.5L)^2} = -\frac{10EI}{3L^2} \quad A_{RD21} = -\frac{6EI}{(1.5L)^2} = -\frac{8EI}{3L^2}$$

De modo similar, las acciones de extremo y las reacciones para la viga de la Fig. 2-16e pueden ser determinadas, después de lo cual se pueden construir las matrices A_{MD} y A_{RD} . Estas matrices son

$$A_{MD} = \frac{2EI}{3L^2} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3L & 0 \\ 4 & 4 \\ 4L & 2L \end{bmatrix} \quad A_{RD} = \frac{2EI}{3L^2} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Los pasos finales en la solución consisten en calcular las matrices A_M y A_R para las acciones de extremo y las reacciones de la viga original de la Fig. 2-16a. Estas matrices se obtienen sustituyendo en las Ecs. (2-25) y (2-26) las matrices D , A_{MD} , A_{RD} , A_{RL} y A_{RD} , todas las cuales han sido determinadas anteriormente. Se puede obtener los siguientes resultados:

$$A_M = \frac{P}{576} \begin{bmatrix} 351 \\ 93L \\ 248 \\ 30L \end{bmatrix} \quad A_R = \frac{P}{576} \begin{bmatrix} 1049 \\ 427 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, todas las acciones de extremo y las reacciones seleccionadas han sido calculadas.

EJEMPLO 2. La viga continua ABC mostrada en la Fig. 2-17a tiene un apoyo fijo en A, un apoyo guiado en B y otro apoyo guiado en C. Por lo tanto, los únicos desplazamientos de nudo desconocidos son la rotación en el apoyo B y la translación vertical en el apoyo C. Estos desplazamientos se denominan D_1 y D_2 , respectivamente, como se identifican en la Fig. 2-17b. La viga tiene una rigidez a la flexión constante EI y está sujeta a las cargas P_1 y P_2 , que actúan en las posiciones mostradas en la figura. Se supondrá que las cargas son las siguientes:

$$P_1 = 2P \quad P_2 = P$$

Para fines ilustrativos en este ejemplo, se van a calcular ciertas acciones de extremo y todas las reacciones de la viga. Las acciones de extremo seleccionadas son la fuerza cortante A_{M1} y el momento A_{M2} en el extremo derecho del miembro AB (véase la Fig. 2-17b), y las reacciones son la fuerza vertical A_{R1} y el momento A_{R2} en el apoyo A, la fuerza vertical A_{R3} en el apoyo B, y el momento A_{R4} en el apoyo C (véase la Fig. 2-17b). Todas las acciones y desplazamientos se muestran con sus direcciones positivas en la figura.

La estructura fija se obtiene evitando rotación en el nudo B y translación en el nudo C, dando, por lo tanto, las dos vigas empotradas mostradas en la Fig. 2-17c. Debido a las cargas sobre esta estructura fija, las acciones correspondientes a los desplazamientos desconocidos D son

$$A_{DL1} = -\frac{P_1L}{8} + \frac{P_2L}{8} = -\frac{PL}{8} \quad A_{DL2} = \frac{P_2}{2} = \frac{P}{2}$$

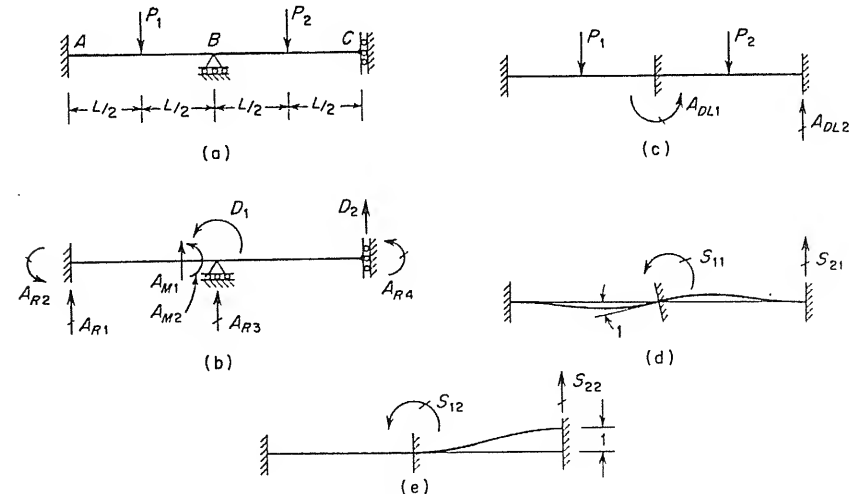


FIG. 2-17. Ej. 2: Viga continua

También, las acciones de extremo en la misma viga son

$$A_{ML1} = \frac{P_1}{2} = P \quad A_{ML2} = -\frac{P_1 L}{8} = -\frac{PL}{4}$$

y las reacciones son

$$A_{RL1} = \frac{P_1}{2} = P \quad A_{RL2} = \frac{P_1 L}{8} = \frac{PL}{4}$$

$$A_{RL3} = \frac{P_1}{2} + \frac{P_2}{2} = \frac{3P}{2} \quad A_{RL4} = -\frac{P_2 L}{8} = -\frac{PL}{8}$$

De los valores dados arriba, se pueden formar las siguientes matrices que son necesarias para la solución:

$$A_{DL} = \frac{P}{8} \begin{bmatrix} -L \\ 4 \end{bmatrix} \quad A_{ML} = \frac{P}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ -L \end{bmatrix} \quad A_{RL} = \frac{P}{8} \begin{bmatrix} 8 \\ 2L \\ 12 \\ -L \end{bmatrix}$$

Después de obtener las matrices de acciones debidas a las cargas, el siguiente paso es analizar la viga fija para valores unitarios de los desplazamientos desconocidos, como se muestra en las Figs. 2-17d y 2-17e. Las rigideces S_{11} y S_{21} , causadas por una rotación unitaria en el nudo B se obtienen rápidamente a partir de las fórmulas dadas en la Fig. 2-15, de la manera siguiente:

$$S_{11} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} = \frac{8EI}{L} \quad S_{21} = -\frac{6EI}{L^2}$$

En el caso de un desplazamiento unitario correspondiente a D_2 (Fig. 2-17e) es necesario tener fórmulas para las fuerzas y los momentos en los extremos de una viga empotrada sujeta a una translación de un extremo respecto del otro. Las fórmulas necesarias pueden obtenerse de la Tabla B-4 del Apéndice B

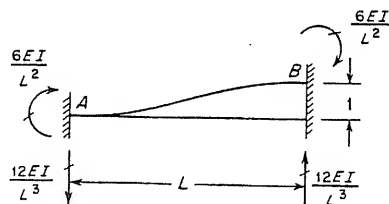


FIG. 2-18. Rigidez del miembro para una viga

(Caso 2). Cuando la translación es igual a la unidad, los momentos de los extremos son iguales a $6EI/L^2$, y las fuerzas son iguales a $12EI/L^3$, según se muestra en la Fig. 2-18. Utilizando estos valores, las rigideces S_{12} y S_{22} para la viga de la Fig. 2-17e son como sigue:

$$S_{12} = -\frac{6EI}{L^2} \quad S_{22} = \frac{12EI}{L^3}$$

Por lo tanto, puede formarse la matriz de rigidez, y se puede obtener su inversa:

$$S = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & -3L \\ -3L & 6 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = \frac{L}{30EI} \begin{bmatrix} 6 & 3L \\ 3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa, así como la matriz A_{DL} determinada con anterioridad, puede substituirse ahora en la Ec. (2-24) para obtener la matriz D de desplazamientos desconocidos. La matriz A_D que aparece en la ecuación es una matriz nula, ya que no hay cargas sobre la viga original correspondientes a D_1 o D_2 . Se encuentra que la solución para D es

$$D = \frac{PL^2}{240EI} \begin{bmatrix} -6 \\ -13L \end{bmatrix}$$

Las matrices A_{MD} y A_{RD} que aparecen en las Ecs. (2-25) y (2-26) representan las acciones de extremo y reacciones, respectivamente, en las vigas fijas de las Figs. 2-17d y 2-17e. La primera columna de cada matriz está asociada con un valor unitario del desplazamiento D_1 (véase la Fig. 2-17d) y la segunda columna con un valor unitario de D_2 (Fig. 2-17e). Todos los elementos de estas matrices pueden obtenerse con la ayuda de las fórmulas dadas en las Figs. 2-15 y 2-18, y los resultados son los siguientes:

$$A_{MD} = \begin{bmatrix} -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{4EI}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad A_{RD} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} \\ \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix}$$

o, de un modo más sencillo, las matrices son

$$A_{MD} = \frac{2EI}{L^2} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2L & 0 \end{bmatrix} \quad A_{RD} = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3L & 0 \\ L^2 & 0 \\ 0 & -6 \\ L^2 & -3L \end{bmatrix}$$

Como paso final, las matrices A_M y A_R pueden encontrarse substituyendo las matrices A_{ML} , A_{MD} , A_{RL} , A_{RD} y D en las Ecs. (2-25) y (2-26) y despejando. Los resultados son

$$A_M = \frac{P}{20} \begin{bmatrix} 23 \\ -7L \end{bmatrix} \quad A_R = \frac{P}{20} \begin{bmatrix} 17 \\ 4L \\ 43 \\ 3L \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se han calculado todas las acciones sobre la viga y los desplazamientos de nudo deseados.

EJEMPLO 3. El propósito de este ejemplo es ilustrar el análisis de una armadura plana por el método de la rigidez. La armadura por resolverse está mostrada en la Fig. 2-19a y está formada por cuatro barras que se unen en un nudo común E. Esta armadura particular fue escogida debido a que sólo

tiene dos grados de libertad para desplazamiento de nudos, a saber, las traslaciones horizontal y vertical en el nudo E. Sin embargo, la mayor parte de la discusión referente a la solución de esta armadura es también aplicable a armaduras más complicadas.

Es conveniente en el análisis identificar las barras de la armadura numéricamente. Por lo tanto, las barras están numeradas del 1 al 4 según se muestra por los números encerrados en círculos en la Fig. 2-19a. También, para los propósitos de una discusión general, se supondrá que las cuatro barras tienen longitudes L_1, L_2, L_3 y L_4 , y rigideces axiales EA_1, EA_2, EA_3 y EA_4 , respectivamente. Después se darán valores específicos a todas estas cantidades para poder terminar la solución del problema.

Las cargas sobre la armadura son las dos fuerzas concentradas P_1 y P_2 que actúan en el nudo E, así como los pesos de los miembros. Los pesos actúan como unas cargas uniformemente distribuidas a lo largo de las barras

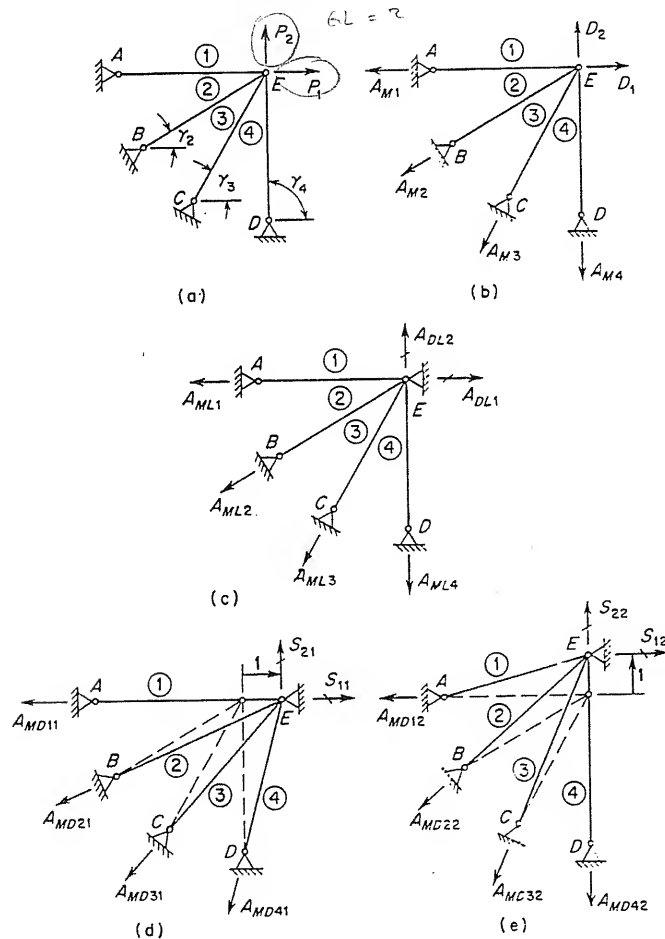


FIG. 2-19. Ej. 3: Armadura plana

y se supone que tienen una intensidad w_1, w_2, w_3 y w_4 , respectivamente, para cada una de las cuatro barras. En todos los casos la intensidad w es el peso de la barra por distancia unitaria medida a lo largo del eje de la barra. Por ejemplo, el peso total de la barra 1 es $w_1 L_1$.

Los desplazamientos desconocidos en el nudo E, denominados D_1 y D_2 en la Fig. 2-19b, se toman como las traslaciones horizontal y vertical del nudo. Estos desplazamientos, así como las cargas aplicadas en el nudo E, se consideran positivos cuando tienen dirección hacia la derecha o hacia arriba. Las acciones de extremo que deben calcularse serán las fuerzas axiales en las cuatro barras en los extremos A, B, C y D, respectivamente. Estas acciones se muestran en la Fig. 2-19b y se denominan A_{M1}, A_{M2}, A_{M3} y A_{M4} . Debido a los pesos de las barras, las fuerzas axiales en los otros extremos de las barras (esto es, en el nudo E) tendrán valores diferentes a los de los extremos A, B, C y D. Las fuerzas axiales en el extremo E de las barras pueden incluirse en los cálculos si se desea; también, las fuerzas cortantes en los extremos de las barras pueden incluirse. Sin embargo, las fuerzas axiales en el extremo E y las fuerzas cortantes no se incluyen en este ejemplo para facilitar el mismo. Las acciones de extremo se suponen positivas cuando producen tensión en las barras. Es superfluo calcular reacciones de la armadura en la Fig. 2-19 ya que las reacciones son las mismas que las acciones de extremo. Sin embargo, existen otras situaciones, como cuando varias barras de una armadura se unen en un punto de apoyo, en donde las reacciones deben determinarse separadamente.

Las cargas P_1 y P_2 que actúan en el nudo E de la estructura (Fig. 2-19a) son cargas que corresponden a los desplazamientos desconocidos D_1 y D_2 , respectivamente. Por lo tanto, estas cargas aparecen en el vector A_D de la manera siguiente:

$$A_D = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Las cargas restantes sobre la armadura se considera que actúan en la estructura fija, la que se obtiene evitando la traslación del nudo E (Fig. 2-19c). Cada miembro de la armadura está, por lo tanto, en la condición indicada en la Fig. 2-20, la que muestra un miembro de la armadura, inclinado, que está apoyado en ambos extremos por articulaciones inmóviles. Para fines de una discusión general, los puntos de apoyo se denominan A y B en la figura. El peso de la barra en sí está representado por la carga uniforme de intensidad w . Las reacciones de la barra son dos fuerzas verticales, cada una de las cuales es igual a la mitad del peso de la barra (véase el Apéndice B, Tabla B-5). Por lo tanto, las acciones A_{DL} para la armadura fija mostrada en la Fig. 2-19c pueden calcularse rápidamente. Las acciones que deben determinarse en el nu-

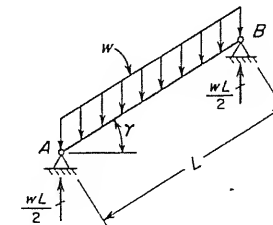


FIG. 2-20. Acciones de extremo para un miembro fijo de armadura

do E son la fuerza horizontal A_{DL1} y la fuerza vertical A_{DL2} , que corresponden a los desplazamientos D_1 y D_2 respectivamente. Como el peso de las barras no producen reacciones horizontales, la acción A_{DL1} debe ser cero. Sin embargo, las acciones A_{DL2} serán igual a la mitad del peso de todas las barras que se unen en el nudo E . Por lo tanto, el vector A_{DL} queda

$$A_{DL} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{w_1 L_1}{2} + \frac{w_2 L_2}{2} + \frac{w_3 L_3}{2} + \frac{w_4 L_4}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{W}{2} \end{bmatrix}$$

La cantidad W es el peso total de todas las barras que se unen en el nudo E , que en este ejemplo es también el peso total de la armadura.

Para fines de cálculo de las acciones de extremo para los miembros, es también necesario obtener el vector A_{ML} de una consideración de la estructura fija mostrada en la Fig. 2-19c. Este vector consiste en las acciones de extremo A_{ML1} , A_{ML2} , A_{ML3} y A_{ML4} , que se muestran en la figura en las direcciones positivas (tensión en los miembros). Cada cantidad de éstas está dada por la fórmula general

$$F = -\frac{wL}{2} \sin \gamma$$

en donde γ es el ángulo entre el eje de la barra y la horizontal, y el signo menos indica que la fuerza es de compresión. Para aplicar esta fórmula a la armadura de la Fig. 2-19, es necesario primero identificar los ángulos entre los miembros y la horizontal. Sean estos ángulos γ_1 , γ_2 , γ_3 y γ_4 para las cuatro barras 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Estos ángulos están mostrados en la Fig. 2-19a para todas las barras exceptuando la 1, ya que se supone horizontal en este ejemplo, en particular. Por lo tanto, la acción de extremo A_{ML2} , por ejemplo, está dada por la expresión

$$A_{ML2} = -\frac{w_2 L_2}{2} \sin \gamma_2$$

y puede verse que el vector A_{ML} es el siguiente:

$$A_{ML} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_1 L_1 \sin \gamma_1 \\ w_2 L_2 \sin \gamma_2 \\ w_3 L_3 \sin \gamma_3 \\ w_4 L_4 \sin \gamma_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_{ML1} \\ A_{ML2} \\ A_{ML3} \\ A_{ML4} \end{matrix}$$

Este vector puede evaluarse en cualquier caso en particular sustituyendo los valores apropiados para cada barra de la armadura. Si se supone que la barra 1 es horizontal y la barra 4 es vertical, el primero y el último elementos del vector pueden simplificarse a cero y $-w_4 L_4/2$, respectivamente.

Para obtener la matriz de rigidez S , es necesario imponer desplazamientos unitarios correspondientes a D_1 y D_2 sobre la estructura fija, como se muestra en las Figs. 2-19d y 2-19e, respectivamente. Las acciones correspondientes a los desplazamientos de nudo son las cuatro rigideces de nudo S_{11} , S_{21} , S_{12} y S_{22} . Cada una de estas rigideces está mostrada en la figura actuando en la dirección positiva. Las rigideces de nudo están compuestas por contribuciones de cada miembro de la armadura; esto es, de las rigideces de los propios miembros. Por ejemplo, S_{11} es la fuerza total en la dirección horizontal cuando se impone sobre la armadura un desplazamiento unitario en esa dirección (véase la Fig. 2-19d) y consiste en la suma de los componentes horizontales de las fuerzas de

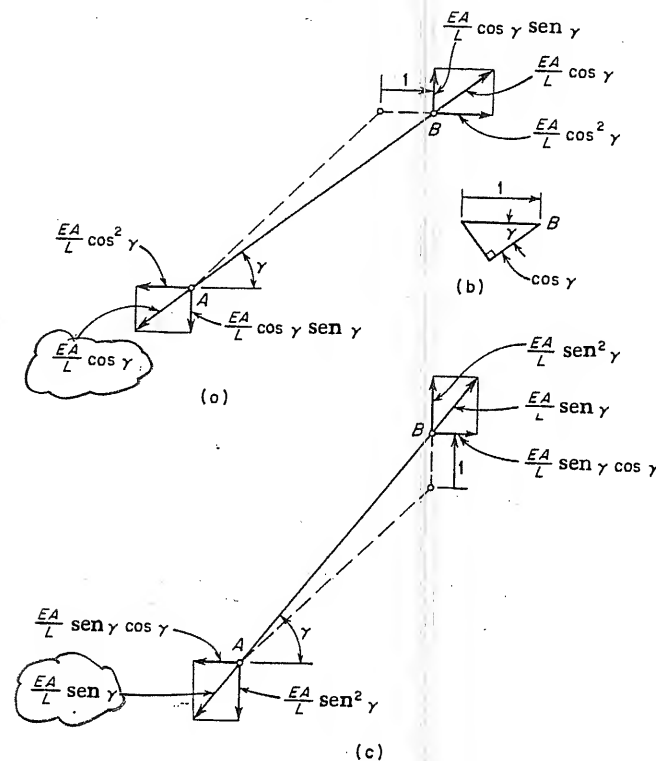


FIG. 2-21. Rigideces de miembro para un miembro de una armadura plana

todas las barras de la armadura. Por lo tanto, para obtener las rigideces de nudo mostradas en la figura es necesario primero encontrar las fuerzas que actúan en los miembros individuales cuando el nudo E se desplaza.

Las fuerzas que actúan en un miembro típico de armadura debidas a un desplazamiento horizontal unitario de un extremo están ilustradas en la Fig. 2-21a. Para propósitos de una discusión general, los extremos inferior y superior de la barra se denominan extremos A y B, respectivamente. El extremo superior de la barra se supone moverse a una distancia unitaria hacia la derecha, en tanto que los otros desplazamientos de extremo son cero. Como resultado, la barra aumenta su longitud, y se necesitan fuerzas de fijación en cada extremo. La elongación de la barra se determina a partir de los desplazamientos que toman lugar en el extremo B, como se muestra en la Fig. 2-21b. Del triángulo de la figura se ve que la elongación de la barra es $\cos \gamma$, en donde γ es el ángulo de inclinación de la barra. Por lo tanto, la fuerza de tensión en la barra es (véase la Fig. 2-21a)

$$\frac{EA}{L} \cos \gamma$$

en donde EA es la rigidez axial y L la longitud de la barra. Las componentes de esta fuerza axial en las direcciones horizontal y vertical también se mues-

tran en la figura. Estas componentes, que son rigideces de miembro, pueden determinarse rápidamente a partir de la geometría de la figura.

En el caso de un desplazamiento vertical unitario o del extremo B de la barra (Fig. 2-21c), la fuerza axial en la barra es

$$\frac{EA}{L} \sin \gamma$$

de donde los componentes en las direcciones horizontal y vertical pueden encontrarse rápidamente. Todas las fuerzas que actúan en este caso se pueden ver en la Fig. 2-21c.

Si el extremo inferior A de la barra de la Fig. 2-21a se desplaza una distancia unitaria hacia la derecha en tanto que el extremo superior B permanece fijo, todas las acciones mostradas en la figura tendrán direcciones opuestas. La misma situación ocurre a la barra mostrada en la Fig. 2-21c si el extremo A se desplaza hacia arriba una distancia unitaria en tanto que el extremo B permanece fijo. Todas las fórmulas dadas en la Fig. 2-21 son apropiadas para utilizarse en el análisis de armaduras planas mediante el método de la rigidez cuando los cálculos se hacen a mano. Posteriormente daremos un acercamiento más sistemático para el uso de rigideces de miembro, no sólo para armaduras, sino también para otros tipos de estructuras (véase el Cap. 4).

Consideremos otra vez el cálculo de las rigideces de nudo para la armadura fija mostrada en las Figs. 2-19d y 2-19e. La rigidez S_{11} está compuesta de contribuciones de los diferentes miembros de la armadura. Por ejemplo, la contribución a S_{11} del miembro 3 es (véase la Fig. 2-21a):

$$\frac{EA_3}{L_3} \cos^2 \gamma_3$$

Similarmente, la contribución del miembro 3 a la rigidez S_{21} es (véase la Fig. 2-21a):

$$\frac{EA_3}{L_3} \cos \gamma_3 \sin \gamma_3$$

Se pueden escribir expresiones de la misma forma que a las dos anteriores para las cuatro barras de la armadura. Las sumas de dichas expresiones nos dan las rigideces S_{11} y S_{21} . Como la barra 1 es horizontal ($\gamma_1 = 0$) y la barra 4 es vertical ($\gamma_4 = 90^\circ$), las expresiones para las rigideces son

$$S_{11} = \frac{EA_1}{L_1} + \frac{EA_2}{L_2} \cos^2 \gamma_2 + \frac{EA_3}{L_3} \cos^2 \gamma_3 = \frac{EA}{L} (1 + \cos^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ)$$

$$S_{21} = \frac{EA_2}{L_2} \cos \gamma_2 \sin \gamma_2 + \frac{EA_3}{L_3} \cos \gamma_3 \sin \gamma_3 = \frac{EA}{L} (\cos 30^\circ \sin 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 60^\circ)$$

Siguiendo un procedimiento análogo pero utilizando las fórmulas de la Fig. 2-21c, se obtienen las rigideces S_{12} y S_{22} (véase la Fig. 2-19e):

$$S_{12} = \frac{EA_2}{L_2} \sin \gamma_2 \cos \gamma_2 + \frac{EA_3}{L_3} \sin \gamma_3 \cos \gamma_3$$

$$S_{22} = \frac{EA_2}{L_2} \sin^2 \gamma_2 + \frac{EA_3}{L_3} \sin^2 \gamma_3 + \frac{EA_4}{L_4}$$

Las cuatro expresiones anteriores constituyen los elementos de la matriz de rigidez S. Los pasos restantes en el cálculo de los desplazamientos de nudo D

consisten en invertir S y sustituir en la Ec. (2-24). Esta parte de la solución se efectuará después utilizando valores específicos para las cantidades EA, L, y γ . Sin embargo, antes de proceder a esa etapa de la solución, se obtendrá en términos generales la matriz A_{MD} de las acciones de extremo en las estructuras fijas de las Figs. 2-19d y 2-19e.

Todas las acciones de extremo debidas a los desplazamientos unitarios de nudo se muestran en las Figs. 2-19d y 2-19e. Por ejemplo, la fuerza axial, A_{MD31} es la fuerza en la barra 3 debida a un valor unitario del desplazamiento D_1 . Cada fuerza de éstas se obtiene refiriéndose a la Fig. 2-21a o 2-21c. La fuerza A_{MD31} , por ejemplo, está dada por la expresión

$$\frac{EA_3}{L_3} \cos \gamma_3$$

según se encuentra en la Fig. 2-21a. Si procedemos de esta manera, se pueden encontrar todas las acciones de extremo debidas a desplazamientos unitarios, y podemos formar la matriz A_{MD} :

$$A_{MD} = \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L_1} & 0 \\ \frac{EA_2}{L_2} \cos \gamma_2 & \frac{EA_2}{L_2} \sin \gamma_2 \\ \frac{EA_3}{L_3} \cos \gamma_3 & \frac{EA_3}{L_3} \sin \gamma_3 \\ 0 & \frac{EA_4}{L_4} \end{bmatrix}$$

Como mencionamos previamente, podemos incluir en el análisis otras acciones de extremo, así como otras reacciones. Bajo tales condiciones, podemos utilizar las fórmulas apropiadas de la Fig. 2-21 para encontrar los valores de las varias acciones debidas a los desplazamientos unitarios. Cuando se han formado todas las matrices necesarias, las Ecs. (2-24) a (2-26) se utilizan para encontrar los efectos resultantes.

La discusión precedente ha servido para ilustrar en términos generales cuándo se obtienen las diferentes matrices en un análisis de una armadura. Para completar la solución de la armadura de la Fig. 2-19, es necesario suponer valores específicos para las cantidades que aparecen en las matrices. Por lo tanto, supondremos que todas las barras tienen la misma longitud L, la misma rigidez axial EA, y el mismo peso w por unidad de longitud. Aún más, se supondrá que los ángulos entre las barras adyacentes son 30° , de modo que los ángulos entre las barras y la horizontal son

$$\gamma_1 = 0 \quad \gamma_2 = 30^\circ \quad \gamma_3 = 60^\circ \quad \gamma_4 = 90^\circ$$

También, el peso total W de la armadura es

$$W = 4wL$$

Cuando se efectúan estas sustituciones, las matrices descritas arriba se simplifican a lo siguiente:

$$A_{DL} = wL \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad S = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{ML} = -\frac{wL}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix} \quad A_{MD} = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La inversa de S es

$$S^{-1} = \frac{2L}{13EA} \begin{bmatrix} 4 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$$

y el vector D , encontrado a partir de la Ec. (2-24), es

$$D = \frac{2L}{13EA} \begin{bmatrix} 4P_1 - \sqrt{3}P_2 + 2\sqrt{3}wL \\ -\sqrt{3}P_1 + 4P_2 - 8wL \end{bmatrix}$$

En este vector podemos sustituir cualquier valor particular de las cargas P_1 y P_2 , así como el peso w por unidad de longitud. Luego el vector A_M de las acciones de extremo (o fuerzas de barra) puede encontrarse sustituyendo las matrices A_{ML} , A_{MD} y D en la Ec. (2-25) y despejando. Si el peso de la armadura no está incluido en el análisis, las matrices A_{DL} y A_{ML} se vuelven nulas.

Como caso particular, supongamos que $P_1 = 0$, $P_2 = -P$, y $wL = P/10$. Se encuentra que los vectores D y A_M

$$D = \frac{12PL}{65EA} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -4 \end{bmatrix} \quad A_M = \frac{P}{520} \begin{bmatrix} 96\sqrt{3} \\ -61 \\ -157\sqrt{3} \\ -410 \end{bmatrix}$$

Estos resultados muestran que, bajo la carga supuesta, el nudo E se desliza hacia la derecha y hacia abajo, y todas las barras de la armadura están sujetas a compresión excepto la barra 1.

EJEMPLO 4. El análisis del marco plano ABC mostrado en la Fig. 2-22a se describe en este ejemplo. Este marco es el mismo que se analizó previamente por el método de la flexibilidad en el Ej. 4 del Art. 2.3. Cuando se utiliza el método de la rigidez, el primer paso es determinar el número de desplazamientos de nudo desconocidos. En este ejemplo, el número de incógnitas depende de si se consideran en el análisis tanto las deformaciones por flexión como las debidas a carga axial. Si se incluyen los dos tipos de deformación, el nudo B puede trasladarse así como girar. Un análisis de esta clase se hace posteriormente en el artículo. Sin embargo, en un marco plano normalmente no es necesario incluir las deformaciones axiales. Si se desprecian, el nudo B gira pero no se traslada, y sólo existirá un desplazamiento desconocido D (véase la Fig. 2-22b). Además de encontrar este desplazamiento de nudo, supondremos arbitrariamente que las siguientes acciones de extremo y reacciones deben encontrarse como parte de la solución: la fuerza axial A_{M1} , fuerza cortante A_{M2} , y momento A_{M3} en el extremo derecho del miembro AB (véase la Fig. 2-22b) y las tres acciones reactivas A_{R1} , A_{R2} y A_{R3} en el apoyo A . Los dos miembros del marco se suponen con la misma rigidez a la flexión EI .

La estructura fija (Fig. 2-22c) se obtiene evitando la rotación del nudo B . La acción A_{DL} , correspondiente al desplazamiento desconocido D y causada por la carga P es igual a

$$-\frac{PL}{8}$$

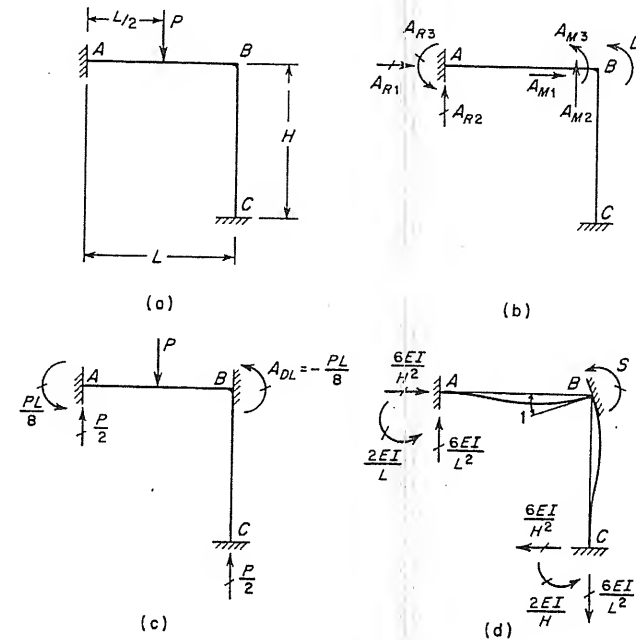


FIG. 2-22. Ej. 4: Marco plano (efectos de flexión únicamente)

Las acciones de extremo y las reacciones en la estructura fija debidas a la carga P son

$$A_{ML1} = 0 \quad A_{ML2} = \frac{P}{2} \quad A_{ML3} = -\frac{PL}{8}$$

$$A_{RL1} = 0 \quad A_{RL2} = \frac{P}{2} \quad A_{RL3} = \frac{PL}{8}$$

Todas las reacciones en la estructura fija debidas a la carga P se muestran en la Fig. 2-22c. Debe recordarse en esta etapa de los cálculos que la fijación en el nudo B es una fijación a la rotación únicamente y, por lo tanto, no ofrece ninguna restricción contra la translación. Por lo tanto, pueden transmitirse fuerzas horizontales y verticales a través del nudo B de un miembro al otro. Como resultado de esto, la fuerza reactiva vertical $P/2$ en el extremo derecho del miembro AB es mantenida en el nudo C en lugar del nudo B . Los vectores A_{DL} , A_{ML} y A_{RL} quedan

$$A_{DL} = \frac{P}{8} [-L] \quad A_{ML} = \frac{P}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -L \end{bmatrix} \quad A_{RL} = \frac{P}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ L \end{bmatrix}$$

En este problema el vector A_D es un vector nulo que contiene un elemento cero debido a que no existe un par aplicado como carga en el nudo B del marco.

La matriz de rigidez para el marco se encuentra produciendo un desplazamiento unitario correspondiente a D en la estructura fija (véase la Fig. 2-22d). De la figura se ve que la rigidez S es

$$\frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H}$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez S y su inversa son

$$S = \left[4EI \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{H} \right) \right] \quad S^{-1} = \left[\frac{LH}{4EI(L+H)} \right]$$

Las acciones del extremo y las reacciones para el marco fijo de la Fig. 2-22d se valúan a continuación. Recordando nuevamente que sólo existe una fijación rotacional en el nudo B , se ve que las reacciones para el marco fijo tienen los valores mostrados en la Fig. 2-22d. Por lo tanto, las matrices de acciones de extremo y reacciones son como sigue:

$$A_{MD} = \begin{bmatrix} -\frac{6EI}{H^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad A_{RD} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{H^2} \\ \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

Todas las matrices anteriores se sustituyen ahora en las Ecs. (2-24), (2-25) y (2-26), las que se resuelven para los vectores D , A_M y A_R . Los resultados son

$$D = \frac{PL^2}{32EI} \left[\frac{H}{L+H} \right]$$

$$A_M = \frac{P}{16H(L+H)} \begin{bmatrix} -3L^2 \\ H(8L+5H) \\ -2HL^2 \end{bmatrix} \quad A_R = \frac{P}{16H(L+H)} \begin{bmatrix} 3L^2 \\ H(8L+11H) \\ HL(2L+3H) \end{bmatrix}$$

En el caso especial en que $H = L$, estos resultados se simplifican a

$$D = \frac{PL^2}{64EI} [1] \quad A_M = \frac{P}{32} \begin{bmatrix} -3 \\ 13 \\ -2L \end{bmatrix} \quad A_R = \frac{P}{32} \begin{bmatrix} 3 \\ 19 \\ 5L \end{bmatrix}$$

Para obtener valores numéricos para estas cantidades, se utilizarán los datos dados previamente en el Ej. 4 del Art. 2.3.

$$P = 10 \text{ k} \quad L = H = 12 \text{ pies} \quad E = 30,000 \text{ ksi} \quad I = 200 \text{ plg}^4 \quad A = 10 \text{ plg}^2$$

Cuando estos valores se sustituyen en las expresiones dadas anteriormente, los vectores quedan

$$D = [0.00054] \quad A_M = \begin{bmatrix} -0.938 \\ 4.06 \\ -90.0 \end{bmatrix} \quad A_R = \begin{bmatrix} 0.938 \\ 5.94 \\ 225 \end{bmatrix}$$

en donde D está en radianes, y en los otros términos se utilizan kips y pulgadas. Los tres elementos del vector A_M tienen el mismo significado físico que las acciones Q_1 , Q_2 y Q_3 del Ej. 4, Art. 2.3 (compare las Figs. 2-22b y 2-6b). Por lo tanto, los valores numéricos dados antes para las acciones de extremo están de acuerdo con los valores de Q_1 , Q_2 y Q_3 obtenidos en el ejemplo anterior para el caso en que se desprecian las deformaciones axiales.

Cuando se incluyen las deformaciones axiales en el análisis del marco plano de la Fig. 2-22a, existen en el nudo B tres grados de libertad en vez de sólo uno. Los desplazamientos D_1 , D_2 y D_3 para este caso se muestran en la Fig. 2-23a. También se muestran en la figura las acciones de extremo y las reacciones que deben determinarse. La estructura fija para este nuevo análisis se obtiene evitando la translación horizontal, translación vertical y la rotación en el nudo B (véase la Fig. 2-23b). Las acciones en esta estructura fija correspondiente a los desplazamientos desconocidos y causados por la carga P se muestran en la figura como A_{DL1} , A_{DL2} y A_{DL3} . Estas acciones son

$$A_{DL1} = 0 \quad A_{DL2} = \frac{P}{2} \quad A_{DL3} = -\frac{PL}{8}$$

Las acciones de extremo y las reacciones en la estructura fija debidas a la carga P son las mismas que las encontradas previamente. Por lo tanto, los vectores A_{DL} , A_{ML} y A_{RL} son como sigue:

$$A_{DL} = \frac{P}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -L \end{bmatrix} \quad A_{ML} = \frac{P}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -L \end{bmatrix} \quad A_{RL} = \frac{P}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ L \end{bmatrix}$$

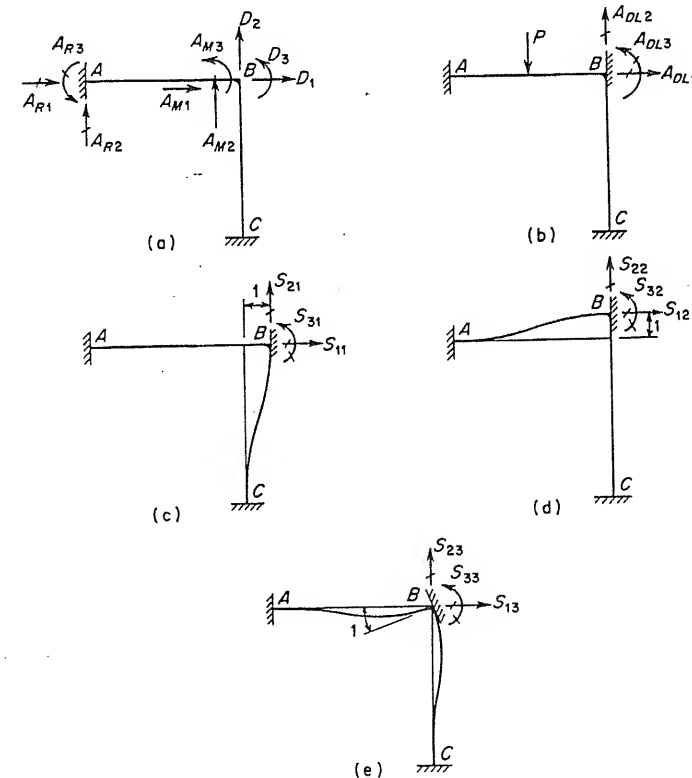


FIG. 2-23. Ej. 4: Marco plano (efectos por flexión y carga axial)

Como antes, el vector A_D es nulo debido a que no existen fuerzas o pares aplicados como cargas sobre el nudo B.

Los elementos de la matriz de rigidez para el marco se pueden ver en las Figs. 2-23c, 2-23d y 2-23e. Estas figuras muestran las acciones desarrolladas en el nudo fijo B cuando se introducen desplazamientos unitarios correspondientes a D_1 , D_2 y D_3 . Cada acción puede encontrarse a partir de las aspersiones para acciones de extremo debidas a un desplazamiento unitario (véanse las Figs. 2-15, 2-18 y 2-21). Por lo tanto, la matriz de rigidez es

$$S = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{bmatrix}$$

Las acciones de extremo y las reacciones para los marcos fijos de las Figs. 2-23c, 2-23d y 2-23e, se evalúan a continuación, dando, por lo tanto, las matrices A_{MD} y A_{RD} :

$$A_{MD} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad A_{RD} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

Todas las matrices anteriores se sustituyen ahora en las Ecs. (2-24), (2-25) y (2-26), de donde se despejan los vectores D , A_M , A_R . Para llevar a cabo estos pasos, se utilizarán los valores numéricos dados anteriormente. Cuando estos valores se sustituyen en los vectores A_{DL} , A_{ML} y A_{RL} , quedan

$$A_{DL} = A_{ML} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -180 \end{bmatrix} \quad A_{RL} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 180 \end{bmatrix}$$

Las unidades utilizadas en éstas y en las matrices subsecuentes son kips, pulgadas y radianes. La matriz de rigidez S y su inversa se convierten en

$$S = \begin{bmatrix} 2107 & 0 & 1736 \\ 0 & 2107 & -1736 \\ 1736 & -1736 & 333 \end{bmatrix} \quad S^{-1} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 476.6 & -2.054 & -2.493 \\ -2.054 & 476.6 & 2.493 \\ -2.493 & 2.493 & 3.026 \end{bmatrix}$$

y las matrices A_{MD} y A_{RD} son

$$A_{MD} = \begin{bmatrix} 2083 & 0 & 0 \\ 0 & 24.11 & -1736 \\ 0 & -1736 & 166 \end{bmatrix} \quad A_{RD} = \begin{bmatrix} -2083 & 0 & 0 \\ 0 & -24.11 & 1736 \\ 0 & -1736 & 83 \end{bmatrix}$$

El vector D de desplazamientos de nudo se encuentra sustituyendo en la Ec. (2-24) y resolviendo; el resultado es:

$$D = 10^{-6} \begin{bmatrix} -438.4 \\ -1934 \\ 532.2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, los desplazamientos de nudo en B son

$$D_1 = -0.000438 \text{ plg} \quad D_2 = -0.00193 \text{ plg} \quad D_3 = 0.000532 \text{ radianes}$$

Los signos menos para D_1 y D_2 muestran que estas translaciones son hacia la izquierda y hacia abajo respectivamente.

Los vectores A_M y A_R se encuentran a partir de las Ecs. (2-25) y (2-26), como sigue:

$$A_M = \begin{bmatrix} -0.913 \\ 4.03 \\ -87.9 \end{bmatrix} \quad A_R = \begin{bmatrix} 0.913 \\ 5.97 \\ 228 \end{bmatrix}$$

Estos vectores dan las acciones de extremo en el extremo B del miembro AB y las reacciones en el apoyo A. Lo anterior está de acuerdo con los valores calculados previamente para las redundantes Q_1 , Q_2 y Q_3 (véase el Ej. 4 del Art. 2.3).

Los resultados obtenidos anteriormente para A_M y A_R difieren en menos del 3% de los obtenidos primero cuando se despreciaron las deformaciones axiales. Debe esperarse esta pequeña diferencia en marcos planos en donde la flexión es el efecto principal.

EJEMPLO 5. La parrilla mostrada en la Fig. 2-24a está formada por dos miembros (AB y BC) que están unidos rigidamente en el nudo B. La carga sobre la parrilla es una fuerza concentrada P que actúa en el centro del claro del punto AB. Se supone que cada miembro tiene una rigidez a la flexión igual a EI y una rigidez a la torsión GJ . Debido a que los apoyos en A y C son empotramientos, los únicos desplazamientos desconocidos en la estructura son los del nudo B. Estos son una translación D_1 en el eje y , una rotación D_2 respecto al eje x , y una rotación D_3 respecto al eje z , según se indica en la Fig. 2-24b. En la figura la dirección positiva de cada vector desplazamiento se supone que es la misma que la dirección positiva de uno de los ejes coordenados. Como en los artículos anteriores, se utiliza una flecha con cabeza doble para distinguir una rotación de una translación. El número de grados de libertad de la parrilla es el mismo que el grado de indeterminación estática (véase el Ej. 5, Art. 2.3).

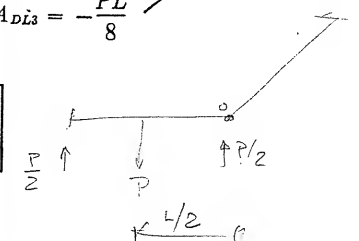
Cuando se analiza la parrilla por el método de la rigidez, se proporciona una fijación artificial en el nudo B para evitar los desplazamientos correspondientes a D_1 , D_2 y D_3 (véase la Fig. 2-24c). Cuando las cargas actúan sobre esta estructura fija, se forman en la restricción las acciones A_{DL} (correspondientes a los desplazamientos D). Estas acciones se evalúan rápidamente utilizando las fórmulas para acciones de empotramiento en vigas (véase el Apéndice B). En el caso de la carga P que actúa sobre el miembro AB, las acciones son

$$A_{DL1} = \frac{P}{2} \quad A_{DL2} = 0 \quad A_{DL3} = -\frac{PL}{8}$$

y, por lo tanto, el vector A_{DL} es

$$A_{DL} = \frac{P}{8} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -L \end{bmatrix}$$

$$\sum M_o = \frac{P}{2} L - \frac{PL}{2}$$



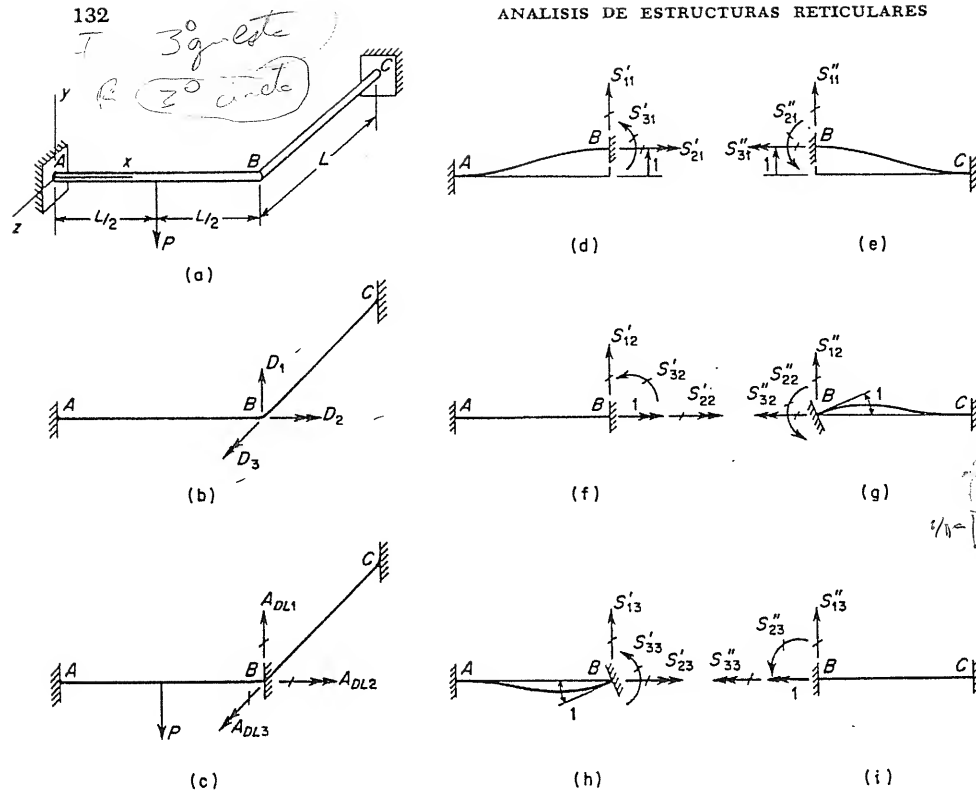


FIG. 2-24. Ej. 5: Parrilla

El vector A_D que representa las acciones en la viga real (Fig. 2-24a) correspondientes a los desplazamientos desconocidos es un vector nulo debido a que no existen fuerzas concentradas o momentos en el nudo B.

La matriz de rigidez para la parrilla se encuentra analizando la estructura fija para los efectos de desplazamientos desconocidos de valores unitarios. En el caso de un valor unitario de D_1 , el nudo B se desplaza hacia arriba a una distancia unitaria sin girar. Luego, las acciones desarrolladas en la fijación correspondiente a D_1 , D_2 y D_3 son las rigideces de nudo S_{11} , S_{21} y S_{31} respectivamente. Los efectos de esta translación unitaria en los miembros AB y BC se muestran separadamente en las Figs. 2-24d y 2-24e. En la Fig. 2-24d las contribuciones del miembro AB a las rigideces de nudo se indican con una sola prima, en tanto que en la Fig. 2-24e las contribuciones del miembro BC están indicadas con una doble prima. De las figuras puede verse que los términos de rigidez son como siguen:

$$S'_{11} = \frac{12EI}{L^3} \quad S'_{21} = 0 \quad S'_{31} = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$S''_{11} = \frac{12EI}{L^3} \quad S''_{21} = \frac{6EI}{L^2} \quad S''_{31} = 0$$

Por lo tanto, las rigideces de nudo, encontradas sumando los efectos de ambos miembros, son,

$$S_{11} = \frac{24EI}{L^3} \quad S_{21} = \frac{6EI}{L^2} \quad S_{31} = -\frac{6EI}{L^2}$$

De manera similar se pueden encontrar las rigideces resultantes de giros unitarios correspondientes a D_2 y D_3 . Las contribuciones de los miembros individuales se ilustran en las Figs. 2-24f a 2-24i y pueden evaluarse por inspección. En el caso de un valor unitario de D_2 (véanse las Figs. 2-24f y 2-24g) las contribuciones son

$$S'_{12} = 0 \quad S'_{22} = \frac{GJ}{L} \quad S'_{32} = 0$$

$$S''_{12} = \frac{6EI}{L^2} \quad S''_{22} = \frac{4EI}{L} \quad S''_{32} = 0$$

Para un valor unitario de D_3 las contribuciones son (véanse las Figs. 2-24h y 2-24i):

$$S'_{13} = -\frac{6EI}{L^2} \quad S'_{23} = 0 \quad S'_{33} = \frac{4EI}{L}$$

$$S''_{13} = 0 \quad S''_{23} = 0 \quad S''_{33} = \frac{GJ}{L}$$

Sumando los términos individuales dados arriba obtenemos las rigideces de nudo:

$$S_{12} = \frac{6EI}{L^2} \quad S_{22} = \frac{4EI}{L} + \frac{GJ}{L} \quad S_{32} = 0$$

$$S_{13} = -\frac{6EI}{L^2} \quad S_{23} = 0 \quad S_{33} = \frac{4EI}{L} + \frac{GJ}{L}$$

Finalmente, la matriz de rigidez S puede expresarse de la forma siguiente:

$$S = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 6L & -6L \\ 6L & (4 + \eta)L^2 & 0 \\ -6L & 0 & (4 + \eta)L^2 \end{bmatrix}$$

en donde el parámetro adimensional η es

$$\eta = \frac{GJ}{EI}$$

La cantidad η es el recíproco del parámetro ρ utilizado en resolver esta misma parrilla mediante el método de la flexibilidad. La matriz inversa es

$$S^{-1} = \frac{L}{24EIc_1c_2} \begin{bmatrix} L^2c_1^2 & -6Lc_1 & 6Lc_1 \\ -6Lc_1 & 12c_3 & -36 \\ 6Lc_1 & -36 & 12c_3 \end{bmatrix}$$

en donde se utilizan los siguientes parámetros adicionales:

$$c_1 = 4 + \eta \quad c_2 = 1 + \eta \quad c_3 = 5 + 2\eta$$

Las cantidades η , c_1 , c_2 y c_3 dependen únicamente en la relación de la rigidez a la torsión GJ a la rigidez a la flexión EI .

Los desplazamientos en el nudo B pueden encontrarse sustituyendo las matrices A_D , A_{DL} y S^{-1} en la Ec. (2-24) y despejando D . Esto da el siguiente resultado

$$D = \frac{PL^2}{96EI(1+\eta)(4+\eta)} \begin{bmatrix} -L(4+\eta)(5+2\eta) \\ 6(5+2\eta) \\ -18 \end{bmatrix}$$

de donde

$$D_1 = -\frac{PL^3}{96EI} \frac{5+2\eta}{1+\eta}$$

$$D_2 = \frac{PL^2}{16EI} \frac{5+2\eta}{(1+\eta)(4+\eta)}$$

$$D_3 = -\frac{3PL^2}{16EI} \frac{1}{(1+\eta)(4+\eta)}$$

Si los miembros AB y BC son muy débiles a la torsión, la parrilla puede considerarse formada por dos miembros unidos en B mediante una articulación que es capaz de transmitir una fuerza vertical pero no un par. En el análisis de dicha parrilla mediante el método de la rigidez, el único desplazamiento de nudo que debe tratarse como una incógnita en el análisis es la translación en la dirección y . Su valor puede encontrarse a partir del resultado dado antes para D_1 , permitiendo que η sea igual a cero; por lo tanto:

$$D_1 = -\frac{5PL^3}{96EI}$$

En general, el análisis de una parrilla formada por vigas que se cruzan (transmitiendo, por lo tanto, una fuerza vertical pero no momento en cada punto de cruce) tendrá un desplazamiento de nudo desconocido en cada uno de estos puntos.

También podemos calcular acciones de extremo y reacciones para la parrilla, siguiendo las técnicas generales ilustradas en los ejemplos anteriores. Dichos cálculos están dados como problemas al final de este capítulo.

2.10. Efectos de temperatura, deformaciones previas y desplazamiento de apoyos. Los efectos de los cambios de temperatura, deformación previa de los miembros y desplazamientos de los apoyos, pueden incorporarse rápidamente en el análisis de una estructura resuelta mediante el método de la rigidez. Un procedimiento conveniente es considerar que todos estos efectos toman lugar en la estructura fija y sumar todas las acciones resultantes a las acciones producidas por las cargas. Por ejemplo, en la estructura fija sujeta a cargas únicamente, es necesario calcular las acciones A_{DL} correspondientes a los desplazamientos desconocidos (véase la Ec. 2-23). Cuando se supone que los cambios de temperatura ocurren en la misma estructura fija, pueden tomar lugar acciones adicionales correspondientes a los desplazamientos desconocidos. Estas acciones se denominarán mediante el símbolo A_{DT} , que es consistente con el símbolo A_{DL} excepto que la causa es la temperatura y no las cargas. Podemos aplicar la misma idea a las deformaciones previas y a los desplazamientos de los apoyos, los que producen en la estructura fija las acciones A_{DP} y A_{DR} , respectivamente. Cuando todas estas acciones han sido determinadas para la estructura fija, pueden formarse los vectores A_{DL} , A_{DT} ,

A_{DP} y A_{DR} . Estos vectores son de orden $d \times 1$, en donde d representa el número de desplazamientos desconocidos. La suma de estos vectores contiene la suma de todas las acciones correspondientes a los desplazamientos desconocidos, y se denomina A_{DS} . Por lo tanto, este vector es

$$A_{DS} = A_{DL} + A_{DT} + A_{DP} + A_{DR} \quad (2-27)$$

El vector A_{DS} está incluido en la primera de tres ecuaciones de superposición, en lugar de la matriz A_{DL} sola (véase la Ec. 2-23):

$$A_D = A_{DS} + SD \quad (2-28)$$

Esta ecuación es una ecuación más general del método de la rigidez y debe utilizarse en lugar de la Ec. (2-23) siempre que se vayan a incluir en los cálculos otros efectos que no sean las cargas. La ecuación puede resolverse para los desplazamientos de la manera siguiente:

$$D = S^{-1}(A_D - A_{DS}) \quad (2-29)$$

Las técnicas utilizadas en el cálculo del vector A_{DS} se discutirán posteriormente en este artículo.

La presencia de los cambios de temperatura, deformaciones previas, y desplazamientos de los apoyos afecta también la determinación de las acciones de extremo y reacciones de una estructura. Los vectores de acciones de extremo en la estructura fija debidos a estas causas se denominan A_{MT} , A_{MP} y A_{MR} , respectivamente, y la suma de todas estas acciones, incluyendo las cargas, es el vector

$$A_{MS} = A_{ML} + A_{MT} + A_{MP} + A_{MR} \quad (2-30)$$

De manera análoga, la suma de todas las reacciones debidas a estas causas en la estructura fija da el vector A_{RS} :

$$A_{RS} = A_{RL} + A_{RT} + A_{RP} + A_{RR} \quad (2-31)$$

en donde las cuatro matrices del término derecho de la ecuación representan reacciones debidas a cargas, cambios de temperatura, deformaciones previas y desplazamientos de los apoyos, respectivamente. Las ecuaciones de superposición para las acciones de extremo y las reacciones quedan

$$A_M = A_{MS} + A_{MD}D \quad (2-32)$$

$$A_R = A_{RS} + A_{RD}D \quad (2-33)$$

Estas ecuaciones pueden considerarse como fórmulas generalizadas de las Ecs. (2-25 y (2-26), que se utilizaron previamente cuando en la estructura sólo actuaban cargas. El uso de las ecuaciones anteriores se ilustra a continuación, extendiendo el ejemplo de la viga de dos claros dada en el Art. 2.8 (véase la Fig. 2-14).

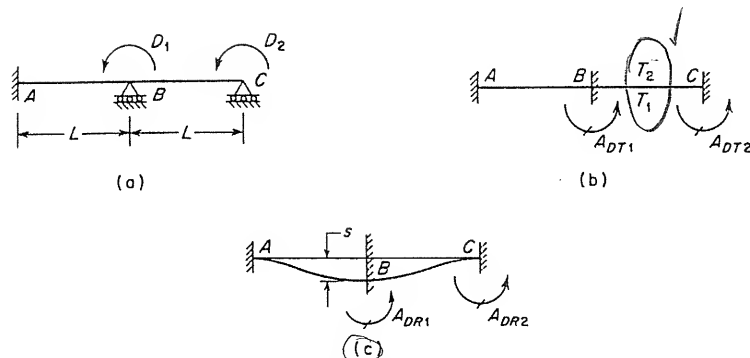


FIG. 2-25. Viga continua con cambio diferencial de temperatura y desplazamiento de apoyos

La viga que se va a analizar se puede ver en la Fig. 2-25a. Las cargas no se muestran en la figura debido a que sus efectos se consideran en el ejemplo anterior. Los desplazamientos de nudo desconocidos D_1 y D_2 se indican en la Fig. 2-25a mediante flechas curvas. Para propósitos ilustrativos, consideremos primero los efectos de los cambios de temperatura, y supongamos que el miembro BC está sujeto a un cambio diferencial de temperatura, de tal modo que el lado inferior de la viga está a una temperatura T_1 en tanto que el lado superior está a una temperatura T_2 . El miembro AB se supone permanece a una temperatura constante. Cuando se supone que estos efectos de temperatura toman lugar en la estructura fija (véase la Fig. 2-25b), se desarrollan momentos en los extremos del miembro. Por lo tanto, una acción de fijación A_{DT1} se desarrolla en el nudo B correspondiente al desplazamiento D_1 , y una acción A_{DT2} se desarrolla en el nudo C correspondiente a D_2 . Estas acciones se muestran en sus direcciones positivas en la figura y pueden evaluarse a partir de las expresiones para acciones de empotramiento debidas a cambios de temperatura, dadas en la Tabla B-2 del Apéndice B, como sigue:

$$A_{DT1} = -A_{DT2} = \frac{\alpha EI(T_1 - T_2)}{d}$$

en donde α es el coeficiente de expansión térmica, EI es la rigidez a la flexión de la viga, y d es el peralte de dicha viga. El vector A_{DT} puede expresarse ahora como

$$A_{DT} = \frac{\alpha EI(T_1 - T_2)}{d} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Este vector puede sumarse al vector A_{DL} obtenido en el ejemplo del Art. 2.8 para dar la suma A_{DS} para usarse en la Ec. (2-28), suponiendo que la viga va a ser analizada para los efectos combinados

de las cargas (véase la Fig. 2-14a) y la diferencia de temperaturas en el miembro BC. Por supuesto, los desplazamientos D calculados para ambos efectos juntos serán la suma de los desplazamientos obtenidos cuando las cargas y los efectos de temperatura se consideran separadamente.

De modo similar pueden determinarse las acciones de extremo y las reacciones debidas al cambio de temperatura en el miembro BC a partir de la viga fija de la Fig. 2-25b. En este ejemplo particular, las acciones de extremo son cero en el claro AB, y en el miembro BC son las mismas que las acciones de empotramiento. También, en este ejemplo todas las reacciones son cero ya que el cambio diferencial de temperatura no produce ninguna fuerza vertical en los nudos B y C. Sin embargo, en una situación más general existirán valores para las reacciones y para las acciones de extremo, y estos dos juegos de valores se colocan en los vectores A_{RT} y A_{MT} , respectivamente. Luego se suman estos vectores a las cantidades correspondientes causadas por las cargas, y el resultado se sustituye en las Ecs. (2-32) y (2-33).

El procedimiento es similar para los efectos de deformación previa y los desplazamientos de apoyo. En ambos casos se deben determinar tres vectores de acciones en la estructura fija (A_{DP} , A_{MP} , A_{RP} y A_{DR} , A_{MR} , A_{RR}). Todos estos vectores pueden evaluarse rápidamente cuando se conocen las acciones de empotramiento. Tales acciones de extremo están dadas en las Tablas B-3 y B-4 del Apéndice B. Supongamos que sabemos, por ejemplo, que el apoyo B de la viga sufre un desplazamiento hacia abajo igual a s (véase la Fig. 2-25c). Esto da como resultado las acciones A_{DR1} y A_{DR2} , las que se evalúan del modo siguiente (véase la Tabla B-4):

$$A_{DR1} = \frac{6EIs}{L^2} - \frac{6EIs}{L^2} = 0 \quad A_{DR2} = -\frac{6EIs}{L^2}$$

El vector A_{DR} se forma a partir de estas expresiones y se incluye posteriormente en el cálculo de A_{DS} (véase la Ec. 2-27). De modo similar pueden encontrarse los vectores de las acciones de extremo y de las reacciones (A_{MR} y A_{RR}) debidos al desplazamiento del apoyo mostrado en la Fig. 2-25c. Estos vectores se incluyen en los cálculos para A_{MS} y A_{RS} (véanse las Ecs. 2-30 y 2-31).

Como un ejemplo en donde se tienen que determinar los efectos de una deformación previa, consideremos el análisis de la armadura plana mostrada en la Fig. 2-19. Previamente esta armadura se analizó para los efectos de las cargas que actúan en el nudo E y para el peso de los miembros. Supongamos ahora que uno de los miembros, tal como la barra 3, se construye con una longitud $L_3 + e$, en vez de la longitud teórica L_3 . El efecto del incremento adicional de

longitud se supone que toma lugar en la armadura fija mostrada en la Fig. 2-19c. El resultado es que las acciones A_{DP1} y A_{DP2} se desarrollan en el nudo E, correspondientes a D_1 y D_2 , respectivamente, y en la barra 3 se desarrolla una fuerza axial A_{MP3} , correspondiente a la acción A_{M3} . Todas estas acciones pueden encontrarse sin ninguna dificultad. Por ejemplo, la fuerza axial es

$$A_{MP3} = -\frac{EA_3e}{L_3}$$

y el vector A_{MP} se vuelve

$$A_{MP} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{EA_3e}{L_3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las componentes horizontal y vertical de la fuerza axial en el miembro se utilizan para obtener las acciones en el nudo E de la armadura fija:

$$A_{DP1} = -\frac{EA_3e}{L_3} \cos \gamma_3 \quad A_{DP2} = -\frac{EA_3e}{L_3} \sin \gamma_3$$

Por lo tanto, el vector A_{DP} es

$$A_{DP} = \begin{bmatrix} -\frac{EA_3e}{L_3} \cos \gamma_3 \\ -\frac{EA_3e}{L_3} \sin \gamma_3 \end{bmatrix}$$

Los vectores A_{MP} y A_{DP} , encontrados arriba, se suman a los vectores A_{ML} y A_{DL} , encontrados en el ejemplo anterior, para dar las sumas A_{MS} y A_{DS} . Después se utilizan estos vectores en las Ecs. (2-29) y (2-32) al resolver para los desplazamientos de nudo y acciones de extremo. Los resultados finales para los efectos combinados de cargas y deformación previa serán la suma de los resultados obtenidos para cargas y deformación previa separadamente.

2.11. Inversa de la matriz de rigidez. La matriz de rigidez S utilizada en el método de análisis de rigidez se invierte durante el proceso de solución (véase la Ec. 2-29). La matriz inversa es, por supuesto, una matriz flexibilidad, pero no es la matriz flexibilidad F utilizada al analizar la misma estructura mediante el método de la flexibilidad. Para que sean iguales, las acciones redundantes en la solución por flexibilidad tienen que corresponder a los desplazamientos desconocidos del método de la rigidez, lo que es una condición imposible. Esta falta de correspondencia puede mostrarse refiriéndonos a

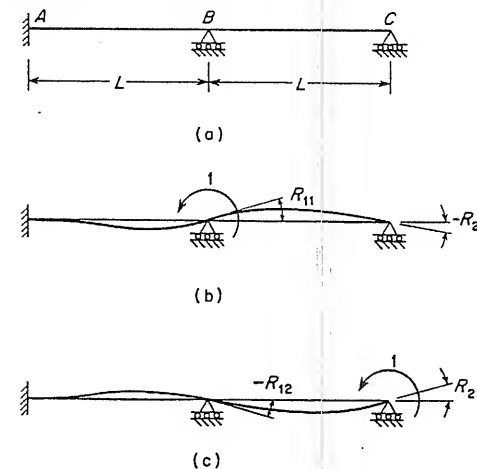


FIG. 2-26. Inversa de la matriz de rigidez

la viga de dos claros utilizada como ejemplo en los artículos anteriores (véase la Fig. 2-26a). En el método de la rigidez los desplazamientos desconocidos de esta viga son las rotaciones en los nudos B y C. En el método de la flexibilidad las acciones redundantes pueden ser reacciones de apoyos o resultantes de esfuerzos internos, dependiendo en las selecciones hechas. Es obvio, sin embargo, que no existe un juego de redundantes que corresponda a los desplazamientos desconocidos de nudo.

El significado físico de la inversa de la matriz de rigidez S puede conocerse sin ninguna dificultad en cualquier estructura en particular. Como la matriz S está formada por acciones correspondientes a los desplazamientos de nudo debido a valores unitarios de estos desplazamientos, la matriz inversa debe estar formada por los desplazamientos de nudo debidos a valores unitarios de las acciones correspondientes a los desplazamientos. Para la viga de dos claros mostrada en la Fig. 2-26 se muestran en las partes (b) y (c) valores unitarios de las acciones correspondientes a los desplazamientos de nudo. Cada una de las acciones unitarias es un par debido a que los desplazamientos de nudo son giros. Los giros en los nudos debidos a estos pares unitarios son los elementos de la matriz inversa S^{-1} , la que se denomina mediante el símbolo R . Por lo tanto, en la figura los giros de los nudos se denominan R_{11} , R_{21} , R_{12} y R_{22} , en donde el primer subíndice denota el desplazamiento y el segundo la carga unitaria que causa dicho desplazamiento. Todos los giros se consideran positivos cuando tienen un sentido contrario al de las manecillas del reloj. Si estas rotaciones de nudo se valúan para las vigas mostradas en la figura, los resultados son los siguientes:

$$R_{11} = \frac{L}{7EI} \quad R_{12} = R_{21} = -\frac{L}{14EI} \quad R_{22} = \frac{2L}{7EI}$$

Por lo tanto, la matriz inversa \mathbf{R} es

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} = \frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

que es la misma que la matriz \mathbf{S}^{-1} encontrada anteriormente en el Art. 2.8 para la misma viga.

La determinación directa de la matriz de rigidez \mathbf{S} , de acuerdo con el Art. 2.8 es, generalmente el método de solución preferido. Involucra un análisis de la estructura fija para valores unitarios de cada desplazamiento de nudo, lo que no es difícil ya que se conocen los coeficientes de rigidez para cada miembro. Por otra parte, la determinación directa de la matriz inversa \mathbf{R} requiere un análisis de las vigas mostradas en las Figs. 2-26b y 2-26c. Dicho análisis puede desarrollarse mediante el método de la rigidez, en cuyo caso es necesario obtener \mathbf{S} en el modo usual. Después se debe invertir \mathbf{S} para completar el análisis y encontrar los giros en los nudos de las dos vigas. Por lo tanto, cualquier intento para encontrar directamente las rotaciones R mostradas en la figura, incluye esencialmente los mismos pasos que los utilizados en el procedimiento usual.

En general, el modo de solución más conveniente por el método de la rigidez consiste en determinar la matriz de rigidez a partir de un análisis de la estructura fija, invertir esta matriz, y después sustituir en la Ec. (2-29) para encontrar los desplazamientos desconocidos.

2.12. Resumen del método de la rigidez. El método de análisis de la rigidez es un método muy general que puede aplicarse a la solución de cualquier tipo de estructura reticular. Los ejemplos de los artículos anteriores sirven para ilustrar las ideas fundamentales del método, que son las mismas sea cual fuere el grado de complejidad de la estructura. En el Cap. 4 se hará un desarrollo más amplio del método, enfatizando en hacer los cálculos tan sistemáticos como sea posible. También, en el Cap. 5 se dan descripciones de programas de computación para el método de la rigidez, y en el Cap. 6 se dan varias modificaciones al método. Sin embargo, las técnicas descritas en este capítulo son apropiadas para cálculos a mano, y se resumen en este artículo para fines de referencia.

El análisis de una estructura mediante el método de la rigidez puede describirse con los siguientes pasos:

1. Enunciado del problema. El problema por resolverse debe estar definido claramente mediante una descripción de la estructura y de las cargas, los cambios de temperatura, deformaciones previas y

desplazamientos de apoyos a que esté sujeta. La descripción de la estructura incluye el tipo de ella, las posiciones de los nudos, de los miembros y de los tipos de apoyo. También es necesario enunciar los tipos de deformaciones que van a considerarse en el análisis, tales como deformaciones por flexión y por carga axial. Dependiendo en los tipos de deformación que van a considerarse, deben darse las rigideces apropiadas de los miembros. Por ejemplo, si se van a considerar deformaciones por flexión, la rigidez a la flexión EI debe darse para cada miembro; si se consideran las deformaciones axiales, debe darse la rigidez axial EA ; y así sucesivamente.

2. Estructura fija. Debe determinarse el número de desplazamientos de nudo desconocidos (o grados de libertad) en la estructura. Debe proporcionarse un número correspondiente de fijaciones artificiales para producir la estructura fija, en donde todos los desplazamientos de nudo son cero. Sólo es posible una estructura fija, y su determinación se hace automáticamente.

3. Análisis de la estructura fija sujeta a las cargas. Todas las cargas, excepto aquellas que corresponden a un desplazamiento de nudo desconocido se consideran aplicadas a la estructura fija, y las diversas acciones en la estructura son evaluadas. Las acciones más importantes que deben determinarse son las acciones A_{DL} que corresponden a los desplazamientos desconocidos. Otras acciones de interés son las acciones de extremo A_{ML} para los miembros y las reacciones A_{RL} en los apoyos. Todas estas acciones pueden encontrarse rápidamente con la ayuda de tablas de acciones de empotramiento (Apéndice B).

4. Análisis de la estructura fija para otras causas. Si existen cambios de temperatura, efectos de deformación previa, o desplazamientos de apoyo que deban ser incluidos en el análisis, sus efectos deben evaluarse en la estructura fija. Las acciones por encontrarse son las que corresponden a los desplazamientos desconocidos (A_{DT} , A_{DP} , A_{DR}), las acciones de miembro (A_{MT} , A_{MP} , A_{MR}), y las reacciones (A_{RT} , A_{RP} , A_{RR}). Todas estas acciones pueden encontrarse con la ayuda de las tablas de acciones de empotramiento.

5. Análisis de la estructura fija para valores unitarios de los desplazamientos. Deben determinarse varias acciones en la estructura fija debidas a valores unitarios de los desplazamientos de nudo desconocidos. Las acciones más importantes que deben encontrarse son las que corresponden a los desplazamientos desconocidos (los coeficientes de rigidez \mathbf{S}). Las otras acciones que deban valorarse son las acciones de extremo y las reacciones (A_{MD} y A_{RD} , respectivamente).

6. Determinación de desplazamientos. La ecuación de superposición para las acciones A_D correspondientes a los desplazamientos en la estructura real es la Ec. (2-28):

$$A_D = A_{Ds} + SD \quad (2-28)$$

repetida

En esta ecuación el vector A_{Ds} incluye el efecto de cargas, temperatura, deformación previa y desplazamiento de los apoyos, de la manera siguiente:

$$A_{Ds} = A_{DL} + A_{DT} + A_{DP} + A_{DR} \quad (2-27)$$

repetida

Cuando se resuelve la Ec. (2-28) para desplazamientos, el resultado es

$$D = S^{-1}(A_D - A_{Ds}) \quad (2-29)$$

repetida

7. *Determinación de acciones de extremo y reacciones.* Los vectores A_M y A_R para las acciones de miembro y las reacciones, respectivamente, en la estructura real se obtienen a partir de las siguientes ecuaciones de superposición:

$$A_M = A_{Ms} + A_{MD} \quad (2-32)$$

repetida

$$A_R = A_{Rs} + A_{RD} \quad (2-33)$$

repetida

En estas ecuaciones los vectores A_{Ms} y A_{Rs} representan acciones en la estructura fija debidas a todas las causas, como sigue:

$$A_{Ms} = A_{ML} + A_{MT} + A_{MP} + A_{MR} \quad (2-30)$$

repetida

$$A_{Rs} = A_{RL} + A_{RT} + A_{RP} + A_{RR} \quad (2-31)$$

repetida

Cuando se han obtenido los vectores D , A_M y A_R , los análisis pueden considerarse terminados.

Todas las matrices utilizadas en el método de la rigidez están resumidas en la Tabla 2-2.

TABLA 2-2. MATRICES UTILIZADAS EN EL METODO DE LA RIGIDEZ

Matriz	Orden	Definición
D	$d \times 1$	Desplazamientos de nudo desconocidos (d = número de desplazamientos).
A_D	$d \times 1$	Acciones en la estructura real correspondientes a los desplazamientos desconocidos.
A_{DL}	$d \times 1$	Acciones en la estructura fija correspondientes a los desplazamientos desconocidos y debidos a todas las cargas, excepto aquellas que corresponden a los desplazamientos desconocidos.

TABLA 2-2 (continuación)

S (o A_{DD})	$d \times d$	Acciones en la estructura fija correspondientes a los desplazamientos desconocidos y debidos a valores unitarios de los desplazamientos (coeficientes de rigidez).
A_{DT}, A_{DP}, A_{DR}	$d \times 1$	Acciones en la estructura fija correspondientes a los desplazamientos desconocidos y debidos a temperatura, deformación previa y desplazamiento de los apoyos.
A_{Ds}	$d \times 1$	$A_{Ds} = A_{DL} + A_{DT} + A_{DP} + A_{DR}$
A_M	$m \times 1$	Acciones de extremo en la estructura real (m = número de acciones de extremo).
A_{ML}	$m \times 1$	Acciones de extremo en la estructura fija debidas a todas las cargas excepto aquellas que corresponden a los desplazamientos desconocidos.
A_{MD}	$m \times d$	Acciones de extremo en la estructura fija debidas a valores unitarios de los desplazamientos.
A_{MT}, A_{MP}, A_{MR}	$m \times 1$	Acciones de extremo en la estructura fija debidas a temperatura, deformación previa y desplazamiento de los apoyos.
A_{Ms}	$m \times 1$	$A_{Ms} = A_{ML} + A_{MT} + A_{MP} + A_{MR}$
A_R	$r \times 1$	Reacciones en la estructura real (r = número de reacciones).
A_{RL}	$r \times 1$	Reacciones en la estructura fija debidas a todas las cargas excepto aquellas que corresponden a los desplazamientos desconocidos.
A_{RD}	$r \times d$	Reacciones en la estructura fija debidas a valores unitarios de los desplazamientos.
A_{RT}, A_{RP}, A_{RR}	$r \times 1$	Reacciones en la estructura fija debidas a temperatura, deformación previa y desplazamiento de apoyos.
A_{Rs}	$r \times 1$	$A_{Rs} = A_{RL} + A_{RT} + A_{RP} + A_{RR}$

2.13. *Comparación de métodos.* Los métodos de la flexibilidad y de la rigidez son muy similares en su formulación matemática, y los dos necesitan el principio de superposición para poder obtener las ecuaciones fundamentales. Las similitudes entre los dos acercamientos, así como sus diferencias, se pueden ver rápidamente cuando se comparan los dos métodos simultáneamente, como en la Tabla 2-3. La tabla muestra todos los pasos principales en la solución de una estructura por los dos métodos.

En el método de la flexibilidad la selección de redundantes puede tener un efecto significativo en la cantidad de trabajo de cálculo

necesario. Por ejemplo, en vigas continuas generalmente se seleccionan los momentos flexionantes en los apoyos como redundantes debido a que la estructura libre consiste en una serie de vigas libremente apoyadas. Esta estructura libre es fácil de analizar tanto para los efectos de las cargas como para los efectos de los valores unitarios de las redundantes. La aplicación de un valor unitario de cada redundante influye únicamente en los claros adyacentes a la viga. Otras selecciones para las redundantes no dan esta localización ventajosa de efectos y, por el contrario, los efectos de una redundante unitaria pueden propagarse por toda la estructura. En el caso de estructuras que no sean vigas continuas, normalmente no es posible localizar los efectos cuando se utiliza el método de la flexibilidad.

En el método de la rigidez nunca existe duda acerca de la selección de la estructura fija, ya que sólo existe una posibilidad. El análisis de la estructura fija usualmente no es difícil debido a que todos los efectos están localizados. Por ejemplo, el efecto de un desplazamiento unitario en un nudo está limitado a los miembros que llegan a ese nudo.

En general, ambos métodos de análisis son útiles para cálculos a mano. El método de solución preferido usualmente será el que involucre menor cantidad de incógnitas. Para programación de calculadoras el método de la rigidez, generalmente, es mucho más apropiado que el de la flexibilidad. La ventaja del método de la rigidez estriba en la determinación automática de la estructura fija y en el hecho de que todos los efectos están localizados. Las ventajas de un método o del otro están indicadas en términos generales en la Tabla 2-4. Por supuesto, debemos comprender que ocasionalmente se encontrarán excepciones a la regla.

2.14. Sistemas de cargas múltiples. En muchos casos será necesario analizar una estructura para diferentes sistemas de carga. Un método es repetir el análisis de la estructura para cada nuevo juego de cargas. En estos casos, sólo aquellas matrices que dependen de las cargas deben ser calculadas nuevamente. En esta categoría se incluyen los vectores D_{QL} , D_{JL} , A_{ML} y A_{RL} en el método de la flexibilidad, y los vectores A_D , A_{DL} , A_{ML} y A_{RL} en el método de la rigidez. Las matrices que dependen únicamente en las propiedades de la estructura permanecen iguales cuando se considera un nuevo sistema de carga.

TABLA 2-3. COMPARACION DE METODOS

Método de la flexibilidad	Método de la rigidez
(a) Enunciado del problema	
(b) Selección de incógnitas	
Redundantes Q	Desplazamientos de nudo D
(c) Incógnitas iguales a cero	
Estructura libre	Estructura fija
(d) Efectos de las cargas	
$D_{QL}, D_{JL}, A_{ML}, A_{RL}$	$A_D, A_{DL}, A_{ML}, A_{RL}$
(e) Efectos de otras causas	
$D_Q, D_{QT}, D_{QP}, D_{QR}$ D_{JT}, D_{JP}, D_{JR}	A_{DT}, A_{DP}, A_{DR} A_{MT}, A_{MP}, A_{MR} A_{RT}, A_{RP}, A_{RR}
(f) Sumas de todos los efectos	
$D_{QS} = D_{QL} + D_{QT} + D_{QP} + D_{QR}$ $D_{JS} = D_{JL} + D_{JT} + D_{JP} + D_{JR}$	$A_{DS} = A_{DL} + A_{DT} + A_{DP} + A_{DR}$ $A_{MS} = A_{ML} + A_{MT} + A_{MP} + A_{MR}$ $A_{RS} = A_{RL} + A_{RT} + A_{RP} + A_{RR}$
(g) Efectos de valores unitarios de las incógnitas	
$F, D_{JQ}, A_{MQ}, A_{RQ}$	S, A_{MD}, A_{RD}
(h) Inversión de matrices	
F^{-1}	S^{-1}
(i) Ecuaciones de superposición	
$D_Q = D_{QS} + FQ$ $Q = F^{-1}(D_Q - D_{QS})$	$A_D = A_{DS} + SD$ $D = S^{-1}(A_D - A_{DS})$
$D_J = D_{JS} + D_{JQ}Q$ $A_M = A_{MS} + A_{MQ}Q$ $A_R = A_{RS} + A_{RQ}Q$	$A_M = A_{MS} + A_{MD}D$ $A_R = A_{RS} + A_{RD}D$

TABLA 2-4. SELECCIÓN DE MÉTODOS

Grados de indeterminación		Método apropiado	
Estática	Cinemática	A mano	Calculadora
Baja	Baja	Cualquiera	Rigidez
Baja	Alta	Flexibilidad	Rigidez
Alta	Baja	Rigidez	Rigidez
Alta	Alta	Ninguno	Rigidez

Estas matrices son F , D_{JQ} , A_{MQ} y A_{RQ} en el método de la flexibilidad, y S , A_{MD} y A_{RD} en el método de la rigidez. Por supuesto, todas las ecuaciones de superposición deben resolverse para cada nuevo sistema de carga, pero esto sólo involucra una suma y multiplicación de matrices una vez que se ha determinado la matriz inversa (ya sea F^{-1} o S^{-1}) para la estructura. Esta simplicidad es una de las ventajas de formular la solución en términos matriciales.

Un método más sistemático de manejar sistemas de cargas múltiples es generalizar las ecuaciones matriciales que han sido obtenidas previamente. Cada vector de columna en las ecuaciones de los métodos de la flexibilidad y de la rigidez puede cambiarse a una matriz rectangular que tenga una columna para cada sistema de carga. Por el contrario, las ecuaciones matriciales permanecen simbólicamente sin cambios.

Como un ejemplo, consideremos la Ec. (2-29) del método de la rigidez, misma que repetimos:

$$D = S^{-1}(A_D - A_{DS}) \quad (2-29)$$

repetida

Si existen p sistemas de carga que pueden actuar sobre la estructura, las matrices A_D y A_{DS} serán de orden $d \times p$, en donde d es el número de desplazamientos de nudo desconocidos. La primera columna de cada una de estas matrices corresponde al primer sistema de carga, y así sucesivamente. Cuando el término $A_D - A_{DS}$ se multiplica por S^{-1} , que es de orden $d \times d$, el resultado es la matriz D de desplazamientos de nudo. Esta matriz es también de orden $d \times p$, y cada columna representa los desplazamientos de nudo debidos al sistema de cargas correspondiente. Se aplican comentarios similares a todas las ecuaciones matriciales utilizadas en los métodos de la flexibilidad y de la rigidez.

El método descrito arriba para sistemas de cargas múltiples puede adaptarse también a manejar separadamente los efectos de cargas, cambios de temperatura, deformaciones previas y desplazamientos

tos de los apoyos. En vez de combinar estos efectos en vectores suma (tales como A_{DS} y D_{QS}), pueden tratarse como sistemas de cargas múltiples y manejarse como columnas separadas en las matrices.

También son posibles muchos otros métodos de organización de las ecuaciones matriciales. Por ejemplo, algunas ocasiones es conveniente analizar la estructura para valores unitarios de todas las cargas posibles que puedan actuar sobre la estructura, y luego multiplicar los resultados finales (las matrices D , A_M , A_R) por un vector de carga, formado por los valores del juego particular de cargas que esté bajo consideración.

PROBLEMAS

Los problemas del Art. 2.3 deben resolverse por el método de la flexibilidad utilizando la Ec. (2-9). En cada problema deben obtenerse las acciones redundantes a menos que se indique otra cosa.

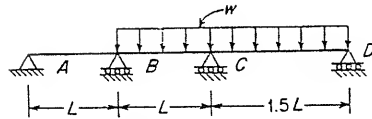
2.3-1. Determine los momentos reactivos en cada extremo de la viga doblemente empotrada mostrada en la Fig. 2-3a, debidos a la fuerza P y al momento M que actúan en el centro del claro. La viga tiene una rigidez a la flexión constante de EI y una longitud L . Seleccione los momentos reactivos como las acciones redundantes, y suponga que estos momentos son positivos cuando producen compresión en la parte inferior de la viga. Tome la primera redundante en el extremo A de la viga y la segunda en el extremo B .

2.3-2. Analice la viga de dos claros mostrada en la Fig. 2-2a tomando el momento reactivo en el apoyo A y el momento flexionante justo a la izquierda del apoyo B como las redundantes Q_1 y Q_2 , respectivamente. Suponga que estos momentos son positivos cuando producen compresión en la parte superior de la viga. También, suponga que las cargas sobre la viga son $P_1 = 2P$, $M = PL$, $P_2 = P$, $P_3 = P$, y la rigidez a la flexión EI es constante.

2.3-3. Analice la viga de dos claros de la Fig. 2-2a si el apoyo B se desplaza hacia abajo una pequeña distancia s . Seleccione las redundantes de modo que sean las reacciones verticales en los apoyos B y C , según se muestra en la Fig. 2-2a, y omita los efectos de las cargas en el análisis. Suponga que EI es constante para ambos claros.

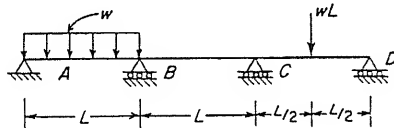
2.3-4. Encuentre las acciones redundantes para la viga de dos claros mostrada en la Fig. 2-2a utilizando la estructura libre mostrada en la Fig. 2-2b. Suponga que EI es constante para la viga y que las cargas son $P_1 = P$, $M = 0$, $P_2 = P$, $P_3 = P$. Numere las redundantes de izquierda a derecha a lo largo de la viga; también, suponga que el par redundante es positivo en sentido contrario a las manecillas del reloj, y que la fuerza redundante es positiva hacia arriba.

2.3-5. Determine los momentos flexionantes en los apoyos B y C de la viga continua mostrada en la figura, utilizando estos momentos como las redundantes Q_1 y Q_2 , respectivamente. Suponga que las redundantes son positivas cuando producen compresión en la parte superior de la viga. La viga tiene una rigidez a la flexión constante e igual a EI .



PROB. 2.3-5

2.3-6. Encuentre los momentos flexionantes en los apoyos B y C de la viga continua (véase figura), utilizando estos momentos como las redundantes Q_1 y Q_2 , respectivamente. Suponga que Q_1 y Q_2 son positivas cuando producen compresión en la parte superior de la viga. La rigidez a la flexión de la viga es EI .

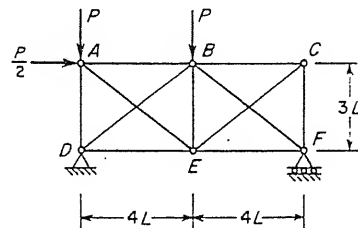


PROB. 2.3-6

2.3-7. Analice la armadura plana mostrada en la Fig. 2-5a tomando las fuerzas en los dos miembros diagonales AD y BC como las redundantes Q_1 y Q_2 , respectivamente. Suponga que la tensión en un miembro es positiva, y que no existen desplazamientos en los apoyos. Todos los miembros tienen la misma rigidez axial EA .

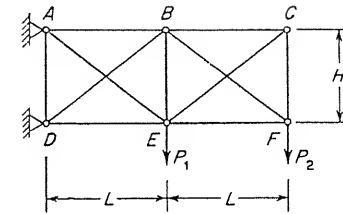
2.3-8. Resuelva el problema anterior utilizando la fuerza en la barra AD y la reacción en D como las redundantes Q_1 y Q_2 , respectivamente.

2.3-9. Encuentre las fuerzas en las barras AE y CE de la armadura mostrada en la figura tomando estas fuerzas de barra como las redundantes Q_1 y Q_2 , respectivamente. Considere que la tensión en un miembro es positiva. La rigidez axial para los miembros verticales y horizontales es EA y para los miembros diagonales $2EA$.



PROB. 2.3-9

2.3-10. Encuentre las fuerzas en las barras AB y BC de la armadura de la figura, utilizando estas fuerzas como las redundantes Q_1 y Q_2 , respectivamente. Suponga que la fuerza de tensión es positiva. Utilice los siguientes datos numéricos en la solución: $L = 40$ plg, $H = 30$ plg, $P_1 = 250$ lb, $P_2 = 150$ lb, $E = 12\,000\,000$ lb/plg² y $A = 1.5$ plg² para todos los miembros. Desarrolle todas las operaciones utilizando unidades de pulgadas y libras.

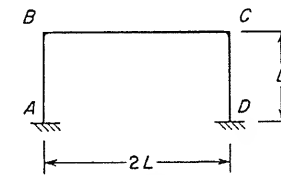


PROB. 2.3-10

2.3-11. Analice el marco plano mostrado en la Fig. 2-6a sujeto a una carga uniforme de intensidad $w = 0.4$ k/pie que actúa hacia abajo sobre el miembro AB. Omita la carga P en el análisis. Utilice las redundantes Q_1 , Q_2 y Q_3 mostradas en la Fig. 2-6b, y considere únicamente los efectos de las deformaciones por flexión. Utilice los siguientes datos numéricos para los dos miembros del marco: $L = H = 12$ pies, $E = 30\,000$ kips/plg² e $I = 200$ plg⁴. Desarrolle todas las operaciones utilizando unidades de pulgadas y kips.

2.3-12. Obtenga la matriz de flexibilidad F para el marco plano de la Fig. 2-6a, correspondiente a las redundantes mostradas en la Fig. 2-6b, considerando deformaciones por flexión, carga axial y cortante. Ambos miembros tienen una rigidez a la flexión igual a EI , rigidez axial EA , y rigidez al cortante GA/f (véase el Art. A.1).

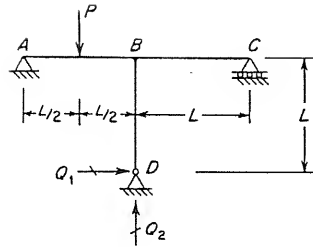
2.3-13. Para el marco plano mostrado en la figura, encuentre la matriz de flexibilidad F para las condiciones siguientes: (a) considerando deformaciones por flexión únicamente y (b) considerando deformaciones por flexión, carga axial y cortante. Seleccione las redundantes Q_1 , Q_2 y Q_3 como la fuerza axial, fuerza cortante, y momento flexionante, respectivamente, en el centro del claro del miembro BC. Tome estas cantidades como positivas cuando tengan las mismas direcciones que las acciones Q_1 , Q_2 y Q_3 mostradas en la Fig. 2-6b. Suponga que todos los miembros del marco tienen rigidez a la flexión EI , rigidez axial EA y rigidez al cortante GA/f .



PROBS. 2.3-13 y 2.3-14

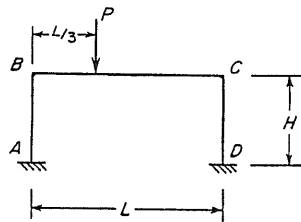
2.3-14. Obtenga la matriz de flexibilidad F para el marco plano del problema anterior si las redundantes Q_1 , Q_2 y Q_3 son la fuerza horizontal (positiva a la derecha), fuerza vertical (positiva hacia arriba), y momento (positivo en contra de las manecillas del reloj), respectivamente, en el apoyo D. Considere únicamente los efectos de las deformaciones por flexión y suponga que cada miembro tiene una EI constante.

2.3-15. Encuentre las redundantes Q_1 y Q_2 para el marco plano mostrado en la figura, considerando únicamente deformaciones por flexión. La rigidez a la flexión EI es igual para todos los miembros.



PROB. 2.3-15

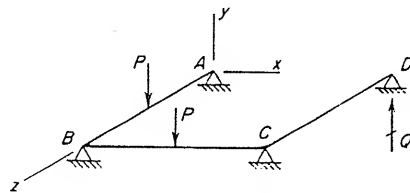
2.3-16. Encuentre las reacciones en el apoyo D del marco plano mostrado en la figura tomándo esas reacciones como las redundantes. Suponga que Q_1 es la reacción horizontal (positiva a la derecha), Q_2 es la reacción vertical (positiva hacia arriba) y Q_3 es el momento (positivo en sentido contrario al de las manecillas del reloj). Considere únicamente los efectos de las deformaciones por flexión en el análisis. Utilice los siguientes datos numéricos: $P = 16$ k, $L = 60$ pies, $H = 20$ pies, $E = 30\,000$ kip/plg², I para el miembro BC = 1100 plg⁴, I para los miembros AB y CD = 650 plg⁴.



PROB. 2.3-16

2.3-17. Obtenga la matriz de flexibilidad F para la parrilla mostrada en la Fig. 2-7a, considerando tanto deformaciones por flexión como por torsión, si las reacciones en el apoyo C se toman como las redundantes. Suponga que Q_1 es la fuerza en la dirección positiva de las y , Q_2 es el par positivo respecto al eje x , y Q_3 es el par positivo respecto al eje z . Las rigideces a la flexión y a la torsión son EI y GJ , respectivamente.

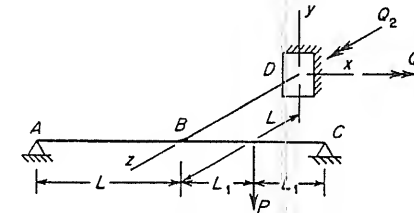
2.3-18. Calcule la reacción redundante Q en el apoyo D para la parrilla horizontal mostrada en la figura. La parrilla está construida por tres miembros (AB, BC, CD) que están unidos rigidamente en ángulos rectos y apo-



PROB. 2.3-18

yados simplemente en A, B, C, y D. Cada miembro tiene una rigidez a la flexión EI , a la torsión GJ , y longitud L . Suponga que las cargas P actúan en los puntos medios de los miembros AB y BC.

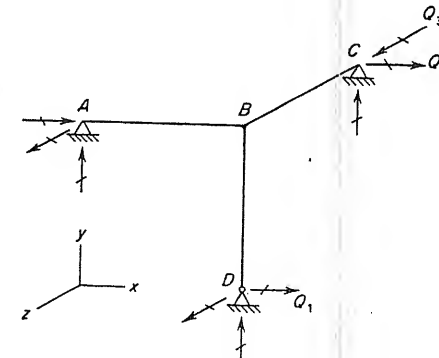
2.3-19. Determine los momentos redundantes Q_1 y Q_2 en el apoyo D de la parrilla mostrada en la figura. Los apoyos A y C son simples, y el apoyo en D es un empotramiento. Los miembros de la parrilla están conectados rigidamente en el nudo B; también, los miembros AB, BC y BD tienen una rigidez a la flexión igual a EI y a la torsión igual a GJ . La carga P actúa en el punto medio del miembro BC. Utilice los siguientes datos numéricos en los cálculos: $P = 300$ lb, $L = 80$ plg, $L_1 = 40$ plg, $E = 30\,000$ kip/plg², $G = 12\,000$ kip/plg², $I = 28.2$ plg⁴, $J = 56.4$ plg⁴. Expresé todos los resultados en unidades de libras y pulgadas.



PROBS. 2.3-19 y 2.3-20

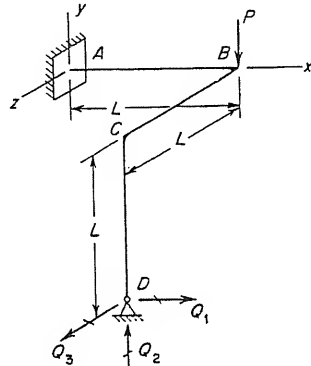
2.3-20. Resuelva el problema anterior para $L = L_1 = 60$ plg

2.3-21. El marco en el espacio ABCD tiene soportes articulados en A, C y D; por lo tanto, cada apoyo es capaz de resistir una fuerza en cualquier dirección, pero no de transmitir un momento. Los miembros están conectados rigidamente en el nudo B. Cada miembro del marco es de sección tubular con longitud L , rigidez a la flexión EI , y rigidez axial EA . Los efectos de las deformaciones por flexión y por carga axial deben ser considerados. Obtenga en forma de literales la matriz de flexibilidad F suponiendo que las redundantes Q_1 , Q_2 y Q_3 son las reacciones en D en la dirección x , en C en la dirección y y en C en la dirección z , respectivamente, como se muestra en la figura.



PROB. 2.3-21

2.3-22. Determine las matrices D_{QL} y F para el marco en el espacio mostrado en la figura, considerando las deformaciones por torsión y por flexión. La carga sobre el marco es una fuerza vertical P que actúa en el nudo B . El marco tiene un apoyo empotrado en A y uno articulado en D , y los miembros están conectados rigidamente en ángulos rectos en los nudos B y C . Las redundantes se seleccionan como las reacciones en el nudo D , como se muestra en la figura. Cada miembro del marco tiene rigidez a la flexión EI y a la torsión GJ .



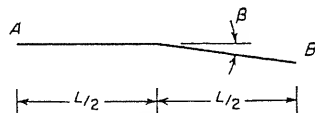
PROB. 2.3-22

2.4-1. Encuentre las reacciones redundantes Q_1 y Q_2 en el apoyo B de la viga empotrada mostrada en la Fig. 2-3a, suponiendo que la viga está sujeta a un cambio diferencial de temperatura tal, que la temperatura de la parte superior es T_2 y la de la parte inferior es T_1 . El coeficiente de expansión térmica de la viga es α , el peralte de la viga es d , y la rigidez a la flexión es EI . Omita los efectos de las cargas en el análisis.

2.4-2. Obtenga la matriz D_{QT} para la viga continua mostrada en la Fig. 2-4a, suponiendo que los miembros BC y CD se calientan a una temperatura T_1 en la parte inferior en tanto que la superior es T_2 . Sea α el coeficiente de expansión térmica y d el peralte de la viga. (Utilice las redundantes Q_1 y Q_2 mostradas en la Fig. 2-4b).

2.4-3. Obtenga la matriz D_{QT} para la armadura en el espacio mostrada en la Fig. 2-5a, suponiendo que toda la armadura ha sufrido un incremento de temperatura T . Utilice las redundantes Q_1 y Q_2 mostradas en la Fig. 2-5b y sea α el coeficiente de expansión térmica.

2.4-4. Encuentre las reacciones redundantes Q_1 y Q_2 en el apoyo B de la viga empotrada mostrada en la Fig. 2-3a, suponiendo que la viga está construida inicialmente con dos barras rectas unidas rigidamente, pero ligeramente fuera de alineación. (véase la figura). El ángulo entre las dos mitades de la viga



PROB. 2.4-4

es β , y la rigidez a la flexión de la viga es EI . No incluya los efectos de las cargas en el análisis.

2.4-5. Obtenga la matriz D_{QP} para la armadura plana mostrada en la Fig. 2-5a suponiendo que las barras AB y CD están construidas con longitudes $L + e$ en vez de L . Tome las redundantes Q_1 y Q_2 como se muestra en la Fig. 2-5b.

2.4-6. Encuentre las reacciones redundantes Q_1 y Q_2 en el apoyo B de la viga empotrada mostrada en la Fig. 2-3a, suponiendo que el apoyo A gira β radianes en el sentido de las manecillas del reloj y el apoyo B se desplaza hacia abajo una distancia s . La rigidez a la flexión de la viga es EI . Omita los efectos de las cargas en el análisis.

2.4-7. Obtenga la matriz D_{QR} para la armadura plana mostrada en la Fig. 2-5a si el apoyo C se desplaza hacia abajo una distancia s . Utilice las redundantes Q_1 y Q_2 mostradas en la Fig. 2-5b.

2.4-8. Obtenga la matriz D_{QR} para la viga continua de la Fig. 2-4a si el apoyo B se desplaza hacia abajo una distancia s_1 y el apoyo C se desplaza hacia abajo una distancia s_2 . Las redundantes Q_1 y Q_2 son las mismas que se muestran en la Fig. 2-4b.

2.4-9. Obtenga la matriz D_{QS} , que representa la suma de todos los efectos sobre la estructura libre, para el marco plano mostrado en la Fig. 2-6a si, además de la carga P , el marco tiene un aumento uniforme de temperatura de T , el apoyo A se desplaza hacia abajo una cantidad s , y el apoyo C gira en el sentido de las manecillas del reloj una cantidad β . Los miembros del marco tienen una rigidez a la flexión igual a EI y un coeficiente de expansión térmica α . Tome las redundantes Q_1 , Q_2 , y Q_3 según se muestra en la Fig. 2-6b.

Los problemas 2.5-1 a 2.5-3 deben resolverse utilizando las Ecs. (2-14), (2-15), y (2-16). Suponga que las reacciones y los desplazamientos de nudo son positivos hacia la derecha, hacia arriba y en sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

2.5-1. Encuentre los desplazamientos de nudo y reacciones para la viga continua mostrada en la Fig. 2-4a, suponiendo que la intensidad w de la carga distribuida es tal que $wL = P$. La viga tiene una rigidez a la flexión de EI . Los cuatro desplazamientos de nudo así como las reacciones deben numerarse consecutivamente de izquierda a derecha en la figura. Utilice la solución dada en el Ej 2, Art. 2.3, para las redundantes.

2.5-2. Para la armadura plana mostrada en la Fig. 2-5a, obtenga los desplazamientos horizontal y vertical del nudo A , las fuerzas en las barras AB , AC , y BD , y las reacciones vertical y horizontal en el apoyo C . Suponga que no existen desplazamientos de los apoyos y considere únicamente los efectos de las cargas en el análisis. Suponga que todas las barras tienen una rigidez axial EA y que la tensión en un miembro es positiva. Numere los desplazamientos, fuerzas de barra, y reacciones en el orden enunciado anteriormente. Utilice la solución dada en el Ej. 3, Art. 2.3, para las redundantes.

2.5-3. Para el marco plano de la Fig. 2-6a, obtenga los desplazamientos del nudo B (translaciones en las direcciones horizontal y vertical, y giro) y las reacciones en el apoyo C . Considere tanto deformaciones por flexión como por fuerza axial en el análisis, y utilice los datos numéricos del Ej. 4, Art. 2.3 en la solución.

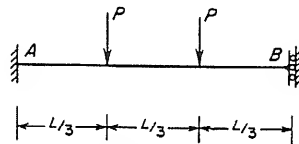
Los problemas para el Art. 2.9 deben resolverse por el método de la rigidez utilizando las Ecs. (2-24) a (2-26). Suponga que todas las acciones y los desplazamientos son positivos cuando son hacia la derecha, hacia arriba

o en el sentido opuesto a las manecillas del reloj, excepto cuando se diga lo contrario.

2.9-1. Determine las reacciones de la viga AB mostrada en la Fig. 2-13a. La viga soporta una carga uniforme de intensidad w y tiene una rigidez a la flexión constante e igual a EI . Las reacciones deben tomarse en el siguiente orden: (1) la fuerza en el apoyo A, (2) el momento en el apoyo A, y (3) la fuerza en el apoyo B.

2.9-2. Determine las acciones de extremo para el miembro AB de la viga mostrada en la Fig. 2-13a si, en vez de carga uniforme, la viga está sujeta a una fuerza concentrada P , vertical y hacia abajo, aplicada en el centro del claro. La viga tiene una rigidez a la flexión constante e igual a EI , y las acciones de extremo deben tomarse en el siguiente orden: (1) la fuerza cortante en el extremo izquierdo, (2) el momento en el extremo izquierdo, y (3) la fuerza cortante en el extremo derecho.

2.9-3. Determine las reacciones de la viga AB mostrada en la figura. La viga tiene un empotramiento en el extremo A y un apoyo guiado en el B, y está sujeta a dos fuerzas concentradas que actúan en las posiciones mostradas. Suponga que la viga tiene una rigidez a la flexión constante e igual a EI . Las acciones deben tomarse en el orden siguiente: (1) y (2), la fuerza vertical y momento, respectivamente, en el apoyo A; y (3), el momento en el apoyo B.

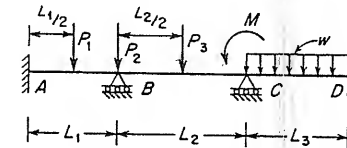


PROB. 2.9-3

2.9-4. Analice la viga de dos claros mostrada en la Fig. 2-14a si $P_1 = P$, $M = PL$, $P_2 = 0$, y $P_3 = 0$. Suponga que los miembros AB y BC tienen longitudes L y $1.5L$, respectivamente, y que la rigidez a la flexión EI es constante en los dos claros. Determine las acciones de extremo para los miembros de la manera siguiente: (1) la fuerza cortante en el extremo A del miembro AB, (2) el momento en el extremo A del miembro AB, (3) la fuerza cortante en el extremo B del miembro BC, y (4) el momento en el extremo B del miembro BC. Determine las reacciones de la estructura de la manera siguiente: (1) y (2), las fuerzas en los apoyos B y C, respectivamente. Los desplazamientos desconocidos deben numerarse de izquierda a derecha a lo largo de la viga.

2.9-5. Analice la viga ABC mostrada en la Fig. 2-17a si $P_1 = 3P_2 = P$. Suponga que las longitudes de los miembros AB y BC son L y $2L$, respectivamente, y que las cargas P_1 y P_2 actúan en los centros de claro de los miembros. También suponga que la rigidez a la flexión EI es constante para ambos claros. Determine las siguientes acciones de extremo para la viga: (1) la fuerza cortante en el extremo izquierdo del miembro AB y (2) el momento en el extremo izquierdo del miembro AB. Determine las siguientes reacciones: (1) la fuerza en el apoyo B y (2) el momento en el apoyo C. Los desplazamientos desconocidos deben numerarse de izquierda a derecha a lo largo de la viga.

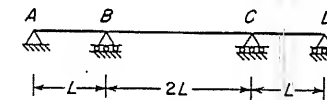
2.9-6. Analice la viga de tres claros mostrada en la figura si $L_1 = L_2 = L_3 = L$, $P_1 = P$, $P_2 = P_3 = 0$, $M = 0$, y $wL = P$. La rigidez a la flexión EI es constante para todos los miembros. Determine las siguientes acciones de extremo: (1) y (2), la fuerza cortante y momento, respectivamente, en el extremo izquierdo del miembro AB; (3) y (4), la fuerza cortante y momento, respectivamente, en el extremo derecho del miembro AB. Determine las siguientes reacciones: (1) y (2), las fuerzas en los apoyos B y C, respectivamente. Los desplazamientos desconocidos deben numerarse de izquierda a derecha a lo largo de la viga.



PROBS. 2.9-6 y 2.9-7

2.9-7. Analice la viga de tres claros del problema anterior si $L_1 = L_3 = L$, $L_2 = 2L$, $P_1 = P_2 = P_3 = P$, $M = PL$, y $wL = P$. La rigidez a la flexión para los miembros AB y CD es EI y para el miembro BC es $2EI$. Determine los momentos de extremo para todos los miembros, numerando las seis acciones consecutivamente de izquierda a derecha. También, determine reacciones como sigue: (1) y (2), las fuerzas en los apoyos B y C, respectivamente. Los desplazamientos desconocidos deben numerarse de izquierda a derecha a lo largo de la viga.

2.9-8. Obtenga la matriz de rigidez S para la viga continua mostrada en la figura, suponiendo que la viga tiene una rigidez a la flexión constante EI . Los desplazamientos desconocidos deben numerarse consecutivamente de izquierda a derecha a lo largo de la viga.

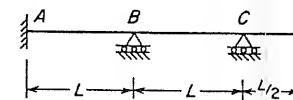


PROB. 2.9-8

2.9-9. Resuelva el problema anterior para la viga del Prob. 2.3-5.

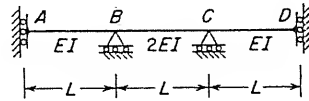
2.9-10. Resuelva el Prob. 2.9-8 para una viga continua sobre apoyos simples con cinco claros iguales.

2.9-11. Obtenga la matriz de rigidez S para la viga mostrada en la figura, suponiendo que la viga tiene una rigidez a la flexión constante e igual a EI . Los desplazamientos desconocidos deben numerarse de izquierda a derecha a lo largo de la viga con las translaciones antes de las rotaciones cuando ambas toman lugar en el mismo nudo.



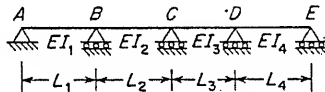
PROB. 2.9-11

2.9-12. Obtenga la matriz de rigidez S para la viga mostrada en la figura, suponiendo que la rigidez a la flexión del claro central es el doble del de los claros extremos. Los desplazamientos desconocidos deben numerarse de izquierda a derecha en la figura.



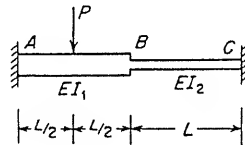
PROB. 2.9-12

2.9-13. Obtenga la matriz de rigidez S para la viga continua de cuatro claros mostrada en la figura si $L_1 = L_2 = L_4 = 24$ pies, $L_3 = 20$ pies, $EI_1 = EI_4 = 12\,000\,000$ k-plg², y $EI_2 = EI_3 = 9\,000\,000$ k-plg². Expresé el resultado en unidades de pulgadas y kips. Los desplazamientos desconocidos deben numerarse de izquierda a derecha a lo largo de la viga.



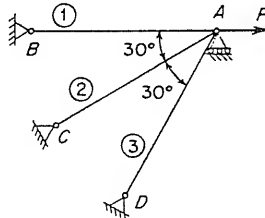
PROB. 2.9-13

2.9-14. Encuentre las reacciones en los apoyos A y C de la viga doblemente empotrada mostrada en la figura. Suponga que $EI_1 = 2EI$ y $EI_2 = EI$. Numere las reacciones en el orden siguiente: fuerza vertical en A, momento en A, fuerza vertical en C y momento en C. (Procure desarrollar los cálculos considerando AB y BC como miembros separados de la estructura.)



PROB. 2.9-14

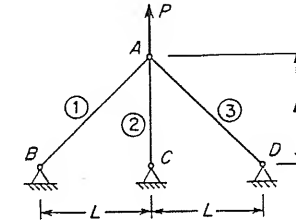
2.9-15. Encuentre las fuerzas axiales en todas las barras de la armadura mostrada en la figura. La armadura está sujeta a una fuerza horizontal P en el nudo A. Omite los pesos de las barras en el análisis. Cada barra tiene una lon-



PROB. 2.9-15

gitud L y una rigidez axial EA . Suponga que la fuerza de tensión en un miembro es positiva, y utilice el sistema de numeración de barras mostrado en la figura.

Prob. 2.9-16. Calcule las fuerzas axiales en todas las barras de la armadura debidas a la fuerza P únicamente (véase la figura), suponiendo que EA es la misma para todas las barras. Suponga que las fuerzas de tensión son positivas, y utilice el sistema de numerar las barras mostrado en la figura. (Debido a la simetría de la estructura y cargas, sólo existe un solo desplazamiento de nudo.)

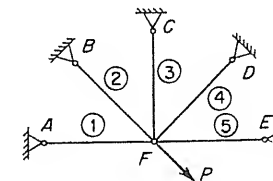


PROB. 2.9-16

2.9-17. Resuelva el problema anterior, si, en adición a la fuerza P , se incluyen en el análisis los pesos de todos los miembros. Suponga que cada barra tiene un peso w por unidad de longitud. Calcule las fuerzas axiales en los extremos superiores de los miembros.

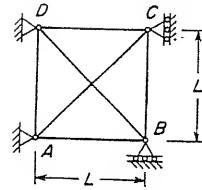
2.9-18. Encuentre las fuerzas axiales en todas las barras de la armadura del Prob. 2.9-16 si existe una fuerza horizontal P que actúa hacia la derecha en el nudo A (además de la fuerza hacia arriba P). Suponga que EA es igual para todas las barras, y considere que la tensión en una barra tiene signo positivo. Omite los efectos de los pesos de los miembros.

2.9-19. Encuentre las fuerzas axiales en las barras de la armadura mostrada en la figura si todas las barras tienen la misma longitud L y la misma rigidez axial EA . Los ángulos entre las barras son 45° , y la carga P hace un ángulo de 45° con la barra 5, que es horizontal. Suponga que la tensión en una barra es positiva. Omite los efectos de los pesos de los miembros.



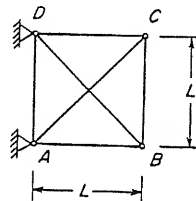
PROB. 2.9-19

2.9-20. Calcule las reacciones horizontal y vertical en los apoyos de la armadura mostrada en la figura debidas a los pesos de las barras. Numere las seis reacciones en sentido opuesto al de las manecillas del reloj comenzando en el nudo A, y tome la reacción horizontal antes de la reacción vertical cuando existan las dos en un apoyo. Cada barra tiene la misma rigidez axial EA y el mismo peso w por longitud unitaria.



PROB. 2.9-20

2.9-21. Construya la matriz de rigidez S para la armadura mostrada en la figura. Todas las barras tienen la misma rigidez axial EA . Numere los desplazamientos de nudo desconocidos en sentido opuesto al de las manecillas del reloj comenzando en el nudo B, y tome el desplazamiento horizontal antes del desplazamiento vertical cuando existan los dos en el mismo nudo.



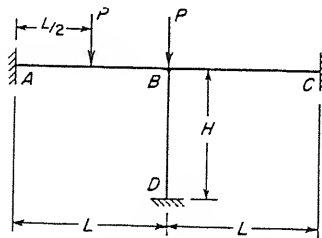
PROB. 2.9-21

2.9-22. Obtenga la matriz de rigidez S para la armadura mostrada en la Fig. 2-5a, suponiendo que todas las barras tienen la misma rigidez axial EA . Numere los desplazamientos de nudo en un sentido contrario al de las manecillas del reloj comenzando en el nudo D, y tome el desplazamiento horizontal antes del vertical cuando existan los dos en un mismo nudo.

2.9-23. Obtenga la matriz de rigidez S para la armadura del Prob. 2.3-9 si la rigidez axial para los miembros horizontal y vertical es EA y para los miembros diagonales es $2EA$. Numere los desplazamientos de nudo como se describe en el problema anterior pero comience con el nudo E.

2.9-24. Analice el marco plano mostrado en la Fig. 2-22a si un par M con el sentido de las manecillas del reloj actúa en el nudo B. Omite la carga P en el análisis, y considere sólo las deformaciones por flexión. Determine las acciones de extremo y las reacciones mostradas en la Fig. 2-22b.

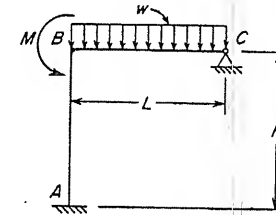
2.9-25. Encuentre las reacciones en los nudos A y D para el marco plano mostrado en la figura, considerando sólo deformaciones por flexión. Suponga



PROBS. 2.9-25 y 2.9-27

que todos los miembros tienen rigidez a la flexión EI y que $L = 1.5H$. Numere las reacciones en el orden siguiente: primero para el nudo A y después para el nudo D: fuerza horizontal, fuerza vertical, y par.

2.9-26. Analice el marco plano mostrado en la figura considerando únicamente los efectos de deformaciones por flexión. Suponga que $M = 2wL^2$, $H = L$, y que los dos miembros tienen una rigidez a la flexión EI . Determine las siguientes acciones de extremo: (1) la fuerza axial, (2) la fuerza cortante, y (3) el momento en el extremo B del miembro BC. También determine las reacciones en el apoyo C, tomando la fuerza horizontal primero que la vertical.



PROB. 2.9-26

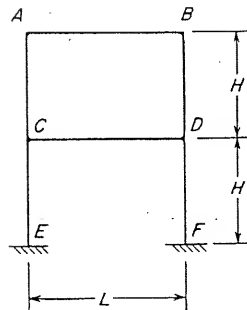
2.9-27. Resuelva el Prob. 2.9-25 considerando ahora deformaciones por flexión y fuerza axial en el miembro BD y solamente deformaciones por flexión en los miembros AB y BC. Utilice los siguientes datos numéricos: $P = 6$ k, $L = 24$ pies, $H = 16$ pies, $E = 30\,000$ k/plg², $I = 350$ plg⁴, $A = 16$ plg². Expresé los resultados en unidades de kips y pulgadas.

2.9-28. Determine las reacciones en el apoyo D para el marco plano del Prob. 2.3-16, considerando únicamente deformación por flexión. Numere las reacciones en el orden siguiente: fuerza horizontal, fuerza vertical y momento. Utilice los siguientes valores numéricos: $P = 16$ k, $L = 60$ pies, $H = 20$ pies, $E = 30\,000$ k/plg², $IBC = 1\,100$ plg⁴, $IAB, CD = 650$ plg⁴.

2.9-29. Obtenga la matriz de rigidez S para el marco plano del Prob. 2.3-13, considerando (a) deformaciones por flexión únicamente y (b) deformaciones por flexión y por fuerza axial. Numere los desplazamientos desconocidos para la parte (a) de la manera siguiente: desplazamiento horizontal de B, rotación de B, y rotación de C. Para la parte (b), numere los desplazamientos tomando el nudo B antes del nudo C, y tomando los desplazamientos en un nudo en el orden siguiente: translación horizontal, translación vertical y rotación. Suponga que todos los miembros tienen una rigidez a la flexión EI y rigidez axial EA .

2.9-30. Obtenga la matriz de rigidez S para el marco plano del Prob. 2.3-15 considerando únicamente deformaciones por flexión. Numere los desplazamientos desconocidos en la misma secuencia que los nudos.

2.9-31. Obtenga la matriz de rigidez S para el marco plano mostrado en la figura si sólo se consideran deformaciones por flexión. Las rigideces por flexión para las columnas son EI_1 y para las vigas son EI_2 . Numere los desplazamientos de nudo desconocidos en el orden siguiente: (1) translación horizontal de la viga AB, (2) translación horizontal de la viga CD, (3) rotación del nudo A, (4) rotación de B, (5) rotación de C y (6) rotación de D.



PROB. 2.9-31

2.9-32. Encuentre las reacciones en el apoyo A para la parrilla de la Fig. 2-24a. La carga sobre la parrilla es una fuerza concentrada P mostrada en la figura, y los dos miembros tienen la misma rigidez a la flexión EI y rigidez a la torsión GJ . Numere las reacciones en el orden siguiente: (1) fuerza en la dirección y , (2) momento respecto al eje x , (3) momento respecto al eje z . Suponga que todas las acciones y desplazamientos son positivos cuando sus vectores tienen las direcciones positivas de los ejes coordenados.

2.9-33. Encuentre las acciones de extremo en el extremo C del miembro BC para la parrilla de la Fig. 2-24a. La única carga que actúa sobre la parrilla es la fuerza concentrada P mostrada en la figura, y ambos miembros tienen rigidez a la flexión EI y rigidez a la torsión GJ . Numere las acciones de extremo de la manera siguiente: (1) fuerza cortante en la dirección y , (2) momento flexionante respecto al eje x , (3) momento torsionante respecto al eje z . Utilice la convención de signos descrita en el problema anterior.

2.9-34. Determine los desplazamientos D_1 , D_2 y D_3 en el nudo B de la parrilla mostrada en la Fig. 2-24 debidos únicamente al peso de los miembros. Suponga que cada miembro tiene un peso w por unidad de longitud, y que las rigideces EI y GJ son las mismas para los dos miembros.

2.9-35. Analice la parrilla de la Fig. 2-24a si se tiene un apoyo libre en el nudo B. El apoyo evita una translación en la dirección y pero no ofrece ninguna resistencia contra el giro del nudo. La carga sobre la parrilla consiste en una fuerza P mostrada en la figura, y los dos miembros tienen la misma rigidez a la flexión EI y rigidez a la torsión GJ . Numere los desplazamientos desconocidos en el orden siguiente: (1) rotación respecto al eje x y (2) rotación respecto al eje z . Determine las reacciones en el apoyo A, utilizando el sistema de numeración y convención de signos descritos en el Prob. 2.9-32.

2.9-36. Obtenga la matriz de rigidez S para la parrilla del Prob. 2.3-18. Todos los miembros de la parrilla tienen la misma rigidez a la flexión EI y rigidez a la torsión GJ . Numere los desplazamientos de nudo desconocidos en la misma secuencia que los nudos, tomando en cada nudo la rotación respecto al eje x antes de la rotación respecto al eje z . Suponga que todos los desplazamientos son positivos cuando sus vectores están en las direcciones positivas de los ejes.

2.9-37. Determine la matriz de rigidez S para la parrilla del Prob. 2.3-19. Suponga que los miembros AB, BC y BD tienen cada uno una longitud L , rigidez a la flexión EI y rigidez a la torsión GJ . Numere los desplazamientos de nudo desconocidos en la misma secuencia que los nudos, tomando los despla-

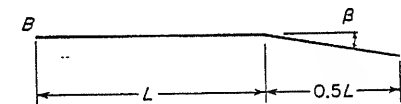
zamientos en cada nudo (cuando existen) en el siguiente orden: translación en la dirección y , rotación respecto al eje x , y rotación respecto al eje z . Suponga que todos los desplazamientos son positivos cuando sus vectores tienen las direcciones positivas de los ejes.

Al resolver los problemas para el Art. 2.10, suponga que todas las acciones y desplazamientos son positivas ya sea a la derecha, hacia arriba, o en sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

2.10-1. Encuentre las reacciones para la viga de la Fig. 2-14a debidas a una diferencia de temperaturas de modo que la superficie inferior de miembro AB está a una temperatura T_1 en tanto que la superficie superior está a una temperatura T_2 . Omita las cargas en el análisis, y suponga que los dos miembros tienen la misma rigidez a la flexión EI . El peralte del miembro AB es d y el coeficiente de expansión térmica es α . Tome las reacciones en el siguiente orden: fuerza vertical en A, momento en A, fuerza en B, y fuerza en C.

2.10-2. Encuentre las reacciones para la viga de la Fig. 2-14a si el apoyo B se desplaza hacia abajo una distancia s_1 y el apoyo C se desplaza hacia abajo una distancia s_2 . Omita las cargas en el análisis, y suponga que ambos miembros tienen una rigidez a la flexión EI . Tome las reacciones en el orden descrito en el problema anterior.

2.10-3. Determine las acciones de extremo y reacciones para la viga de la Fig. 2-16 si el miembro BC tiene inicialmente un doblez como el que se muestra en la figura (el ángulo β es un ángulo pequeño). Omita las cargas en el análisis, y suponga que todos los miembros tienen la misma rigidez a la flexión EI . Determine las acciones de extremo y reacciones mostradas en la Fig. 2-16b.



PROB. 2.10-3

2.10-4. Encuentre las acciones de extremo y reacciones mostradas para la viga de la Fig. 2-17b si la viga completa tiene una diferencia de temperaturas de modo que la superficie inferior está a una temperatura T_1 y la superficie superior está a T_2 . Omita las cargas en el análisis. Suponga que los dos miembros tienen una rigidez a la flexión EI , peralte d , y coeficiente térmico α .

2.10-5. Resuelva el Prob. 2.9-3 si el apoyo A gira en el sentido de las manecillas del reloj una cantidad β , en donde β es un ángulo pequeño. Omita las cargas en el análisis.

2.10-6. Determine los vectores A_{DS} y A_{RS} para la viga del Prob. 2.9-6 si, además de las cargas, toman lugar los siguientes efectos: el apoyo A se desplaza hacia abajo una distancia s , el apoyo D gira en contra de las manecillas del reloj un ángulo β , y la viga tiene una diferencia de temperaturas (T_1 la temperatura en la parte inferior y T_2 en la parte superior).

2.10-7. Suponga que la armadura plana de la Fig. 2-19 tiene un incremento uniforme de temperatura T . Omitiendo las cargas en el análisis, encuentre las acciones de extremo mostradas en la Fig. 2-19b. El coeficiente de expansión térmica es α , todas las barras tienen la misma rigidez axial EA y longitud L , y los ángulos entre las barras y la horizontal son $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 30^\circ$, $\gamma_3 = 60^\circ$ y $\gamma_4 = 90^\circ$.

2.10-8. Resuelva el Prob. 2.9-15 si la barra 2 tiene inicialmente una longitud $L + e$ en lugar de L . Omita las cargas en el análisis.

2.10-9. Determine los vectores A_{DS} y A_{MS} para la armadura del Prob. 2.9-16 si los siguientes efectos toman lugar: apoyo C se desplaza hacia arriba una distancia s , y las barras 1 y 3 tienen un incremento de temperatura T . El coeficiente de expansión térmica es α .

2.10-10. Determine el vector A_{DS} para la armadura del Prob. 2.9-21, considerando los siguientes efectos: apoyo A se desplaza hacia la izquierda una distancia s , el miembro BC tiene una longitud inicial $L + e$ en lugar de L , y toda la armadura tiene un incremento de temperatura de T . El coeficiente de expansión térmica es α .

2.10-11. Encuentre los vectores A_{DS} y A_{MS} para el marco plano de la Fig. 2-23 si los siguientes efectos toman lugar: el miembro AB tiene un incremento uniforme de temperatura T , el miembro BC tiene una diferencia de temperaturas (T_1 es la temperatura a la izquierda y T_2 la temperatura a la derecha), el apoyo C se desplaza hacia abajo a una distancia s_1 , y el apoyo A se desplaza hacia abajo una distancia s_2 . Suponga que los dos miembros tienen la misma rigidez a la flexión EI y rigidez axial EA . También, suponga que $H = L$, el coeficiente de expansión térmica es α y el peralte de los miembros es d . Los desplazamientos desconocidos D y las acciones de extremo A_M deben tomarse como se muestra en la Fig. 2-23a. Omita la carga P en el análisis.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE LA FLEXIBILIDAD

3.1. Introducción. Los principios fundamentales del método de la flexibilidad se describieron en el capítulo anterior y también se dieron varios ejemplos para ilustrar el uso de las ecuaciones matriciales. Se supuso que todos los cálculos se desarrollaron por métodos manuales, usando las técnicas más apropiadas para el análisis particular en consideración. En este capítulo el método de la flexibilidad se estudia más a fondo, principalmente con el fin de incluir el cálculo de los desplazamientos en la formulación matricial del problema. Al efectuar esto, los cálculos se hacen más organizados y formalizados. Aún más, el análisis tiende a dividirse en dos fases distintas: (1) existe una fase de planteo que debe hacerla el propio analista estructural y (2) una fase matemática que es rutinaria en naturaleza ya que sólo considera operaciones matriciales. Por lo tanto, la última fase puede ser desarrollada por cualquier persona que esté familiarizada con el álgebra matricial, o bien puede programarse para una calculadora.

En general, el método de la flexibilidad no es tan apropiado como el método de la rigidez para la preparación de programas de cálculo para analizar una amplia gama de estructuras. Por ejemplo, un programa de cálculo que sea suficientemente general para manejar cualquier estructura plana, debe prepararse por el método de la rigidez (como se describe en los Caps. 4 y 5). Una de las razones por la que esto es cierto es que en el método de la rigidez la estructura fija se determina de un modo definido, en tanto que en el método de la flexibilidad se pueden escoger muchas estructuras libres. Sin embargo, el método de la flexibilidad puede utilizarse con fines de programación si se trata de una clase más limitada de estructuras (por ejemplo, marcos planos de un nivel). De acuerdo con estas condiciones especiales, la estructura libre puede seleccionarse de acuerdo con alguna regla particular y, por lo tanto, la solución puede programarse de un modo definido.

Si el análisis va a desarrollarse por métodos manuales, el factor más importante en decidir entre los dos métodos es el tamaño de la matriz que se va a invertir. Hay muchas estructuras que tienen

menos grados de indeterminación estática que cinemática y, en tales casos, los métodos descritos en este capítulo proporcionan una solución completa y sistemática de la estructura.

De la discusión del método de la flexibilidad en el Cap. 2 se deduce que el cálculo de desplazamientos en la estructura libre es una parte importante de la solución. Previamente, se dejó al lector calcular los desplazamientos por cualquier método conveniente, tal como los descritos en el Apéndice A. En este capítulo, sin embargo, los cálculos de los desplazamientos se desarrollan sistemáticamente por métodos matriciales (véanse los Arts. 3.3 a 3.7). Uno de los requisitos del acercamiento matricial presentado aquí es que la estructura esté sujeta a cargas aplicadas únicamente en los nudos. Por lo tanto, como materia preliminar, la conversión de las cargas reales sobre la estructura a cargas equivalentes sobre los nudos se discute en el siguiente artículo. La misma conversión se requiere en el acercamiento formalizado al método de la rigidez dado en el Cap. 4.

En la mayor parte de este capítulo se supone que sólo se consideran los efectos de las cargas sobre la estructura. Los efectos de cambios de temperatura, efectos de deformación previa y desplazamientos de los apoyos se discuten en el Art. 3.10.

3.2. Cargas de nudo equivalentes. El cálculo de los desplazamientos en una estructura mediante ecuaciones matriciales derivadas posteriormente en este capítulo requiere que la estructura esté sujeta a cargas que actúen únicamente en los nudos. En general, sin embargo, las cargas reales que actúan sobre una estructura no cumplen con este requisito. En lugar de ello, las cargas pueden dividirse en dos tipos: cargas que actúan en los nudos y cargas que actúan en los miembros. Las cargas del último tipo deben reemplazarse por cargas estáticamente equivalentes que actúen en los nudos, si queremos cumplir con el anterior requisito. Las cargas de nudo que se determinan a partir de las cargas sobre los miembros se llaman *cargas de nudo equivalentes*. Cuando estas cargas se suman a las cargas de nudo reales, las cargas totales que resultan se llaman *cargas de nudo combinadas*. Después de hacer esto, la estructura puede analizarse por métodos matriciales para los efectos de las cargas de nudo combinadas.

Es ventajoso en el análisis que las cargas de nudo combinadas se valoren de tal modo que los desplazamientos resultantes de la estructura sean los mismos que los desplazamientos producidos por las cargas reales. Este resultado puede obtenerse si las cargas equivalentes se obtienen mediante el uso de acciones de empotramiento, tal como se demuestra en el ejemplo de la Fig. 3-1. La parte (a) de

esta figura muestra una viga ABC apoyada en los nudos A y B y sujeta a varias cargas. Algunas de estas cargas son cargas de nudo reales (véase la Fig. 3-1b); en tanto que las cargas restantes actúan sobre los miembros (véase la Fig. 3-1c). Para efectuar la sustitución de las cargas de miembro por cargas de nudo equivalentes, los nudos de la estructura se fijan contra todos los desplazamientos. Para la viga de la figura, este procedimiento da como resultado dos vigas doblemente empotradas (Fig. 3-1d). Cuando estas vigas doblemente empotradas están sujetas a las cargas de miembro, se produce un juego de acciones de empotramiento. Las acciones de extremo pueden obtenerse mediante las fórmulas dadas en el Apéndice B y se muestran en la Fig. 3-1d para las cargas particulares de este ejemplo. Las mismas acciones de empotramiento también se muestran en la Fig. 3-1e, donde se representan como acciones de fijación para la estructura fija. Si estas acciones de fijación se invierten en dirección, constituyen un juego de fuerzas y pares que es estáticamente equivalente a las cargas de miembro. Tales cargas de nudo equivalentes, al sumarse con las cargas de nudo reales (Fig. 3-1b),

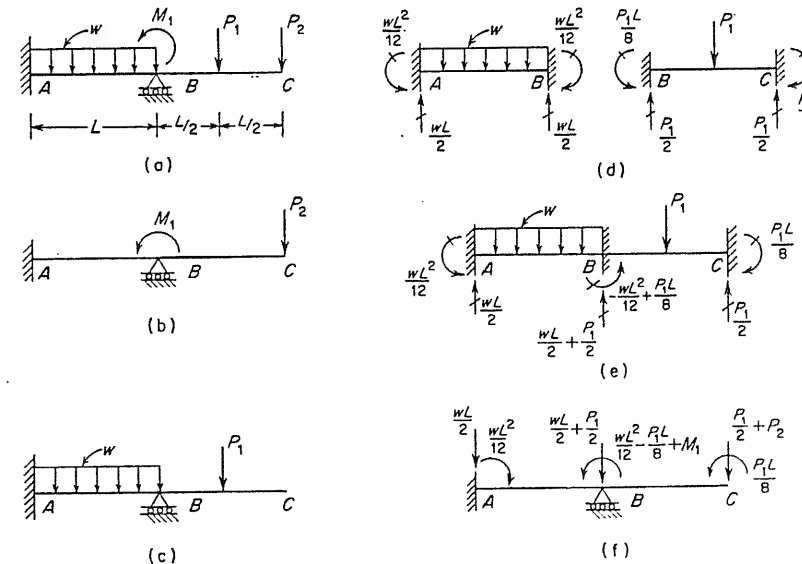


FIG. 3-1. Cargas de nudo combinadas

producen las cargas de nudo combinadas mostradas en la Fig. 3-1f. A continuación las cargas combinadas se utilizan para desarrollar el análisis estructural, que se describe posteriormente.

En general, las cargas de nudo combinadas para cualquier tipo de estructura pueden encontrarse por el procedimiento ilustrado en la Fig. 3-1. El primer paso es separar las cargas de nudo reales de las cargas de miembro. A continuación se fija la estructura contra cualquier desplazamiento de nudo introduciendo las fijaciones de nudo apropiadas, siguiendo las mismas técnicas descritas en el Cap. 2 para el método de la rigidez. En seguida se calculan las acciones de fijación producidas por las cargas de miembro, utilizando las fórmulas dadas en la Tabla B-1. Estas acciones, con dirección opuesta, son las cargas de nudo equivalentes. Estas cargas se suman a las cargas de nudo reales para dar las cargas combinadas.

Se enunció, anteriormente, que los desplazamientos de la estructura bajo la acción de las cargas combinadas deben ser los mismos que los producidos por las cargas reales. Para observar que este requisito se satisfaga, consideremos nuevamente la viga de la Fig. 3-1. De un examen de la figura, se ve que la superposición de las cargas combinadas (Fig. 3-1f) y las acciones sobre la estructura fija (Fig. 3-1e) dan las cargas reales sobre la viga (Fig. 3-1a). Se sigue, por lo tanto, que la superposición de los desplazamientos de nudo, en las vigas de las Figs. 3-1e y 3-1f, debe producir los desplazamientos de nudo en la viga real; pero como todos los desplazamientos de nudo de la viga fija son cero, puede concluirse que los desplazamientos de nudo en la viga sujeta a las cargas reales, así como los de las cargas combinadas, son iguales.

Aún más, las reacciones de los apoyos de la estructura sujeta a las cargas combinadas son las mismas que las reacciones causadas por las cargas reales. Esta conclusión también puede verificarse por superposición de las acciones de las vigas de las Figs. 3-1e y 3-1f. Todas las acciones de fijación en la viga de la Fig. 3-1e se equilibran con las cargas de nudo equivalentes iguales y opuestas que actúan sobre la viga de la Fig. 3-1f. Por lo tanto, las reacciones de la viga con las cargas combinadas son las mismas que para la viga con las cargas reales (Fig. 3-1a). Esta conclusión, así como a la que se llegó en el párrafo anterior, se aplica a todos los tipos de estructuras reticulares.

En contraste con las conclusiones anteriores, las acciones de extremo, causadas por las cargas de nudo combinadas que actúan sobre la estructura, usualmente no son las mismas que las causadas por las cargas reales. En lugar de ello, las acciones de extremo debidas a las cargas reales deben obtenerse sumando las acciones de extremo de la estructura fija a las causadas por las cargas combinadas. Por ejemplo, en el caso de la viga mostrada en la Fig. 3-1, las condiciones de extremo reales (Fig. 3-1a) se encuentran sobre-

poniendo las acciones de extremo de las vigas de las Figs. 3-1e y 3-1f. Esto último se obtiene como resultado del análisis estructural, y lo primero se conoce a partir de los cálculos de las acciones de empotramiento.

Las otras cantidades de interés, en un análisis estructural desarrollado por el método de la flexibilidad, son las acciones redundantes. El que las acciones redundantes sean o no las mismas en la estructura real y en la estructura con las cargas de nudo combinadas, depende de la situación particular. Si la acción redundante es una reacción para la estructura, será la misma en los dos casos. Si es una acción de extremo, debe tratarse del modo descrito anteriormente para las acciones de extremo.

En el Art. 3-9 se dan ejemplos que ilustran las ideas mencionadas antes. Sin embargo, en los siguientes artículos (Arts. 3.3 a 3.7), que tratan acerca de la determinación de los desplazamientos de nudo, generalmente se supone que la estructura está sujeta a cargas de nudo combinadas.

3.3. Desplazamiento de nudos en armaduras. Las armaduras que se considerarán en este artículo pueden ser planas o en el espacio; cada armadura se supone ser estáticamente determinada y sujeta a cargas que actúan únicamente en los nudos. Los métodos para calcular desplazamientos que se desarrollen en la siguiente discusión se incorporarán posteriormente (véase el Art. 3.8) en el análisis de armaduras estáticamente indeterminadas.

El método de la carga unitaria puede utilizarse convenientemente para encontrar desplazamientos de armaduras y constituye el método básico que se utilizará. La fórmula de la carga unitaria para un desplazamiento D en un nudo particular de una armadura es (véase la Ec. A-32, Apéndice A):

$$D = \sum \frac{N_U N_L L}{EA} \quad (a)$$

En esta ecuación, D representa el desplazamiento que debe calcularse; N_U representa la fuerza axial en cualquier barra de la armadura debida a una carga unitaria correspondiente al desplazamiento; N_L representa la fuerza axial en la misma barra debida a las cargas que causan el desplazamiento; L es la longitud del miembro; y EA es la rigidez axial del miembro. El signo de suma en la ecuación anterior indica que la expresión en el miembro de la derecha debe evaluarse para cada miembro de la estructura y los resultados sumarse para obtener el desplazamiento D .

Las convenciones de signos que se utilizan en conexión con la Ec. (a) son las siguientes: las fuerzas axiales N_U y N_L deben

evaluarse de acuerdo con la misma convención de signos para cualquier miembro en particular; en este libro tanto N_U como N_L se consideran positivas cuando el miembro está en tensión. También el sentido positivo para el desplazamiento D será el mismo que el sentido positivo de la carga unitaria. Por lo tanto, la carga unitaria es una acción correspondiente al desplazamiento D . Para conveniencia, se supondrá que la carga unitaria y el desplazamiento D son positivos cuando tienen las direcciones positivas de los ejes coordenados utilizados como una referencia para la estructura.

La Ec. (a) está expresada en términos de las fuerzas axiales N_U y N_L en los miembros, tal como mencionamos anteriormente. Sin embargo, para hacer que las ecuaciones que se derivan en este artículo sean consistentes con las derivadas posteriormente para otros tipos de estructuras, es deseable escribir nuevamente la Ec. (a) en términos de acciones de extremo. En el caso de un miembro de una armadura plana o en el espacio, sólo son posibles dos acciones de extremo, a saber, las fuerzas axiales que actúan en los dos extremos del miembro. Para los fines del desarrollo siguiente, se puede utilizar cualquiera de las dos acciones de extremo. Sin embargo, es deseable por uniformidad adoptar una convención específica que pueda seguirse consistentemente.

Las convenciones que se utilizan en este capítulo se muestran en las Figs. 3-2a y 3-2b, las que muestran a un miembro típico i de una armadura plana y en el espacio, respectivamente. El miembro de la armadura plana está localizado en el plano x - y , donde se supone que está la armadura, en tanto que el miembro de la armadura en el espacio puede tener cualquier dirección con respecto a los ejes x , y , z . En cada caso, el miembro se supone que está conectado en sus extremos a nudos de la armadura que se denominan como nudos j y k . Los ejes x , y , z de las figuras se suponen ser *ejes orientados con la estructura*, esto es, ejes orientados de un modo conveniente para tomar a toda la estructura. Por otra parte, los ejes x_M , y_M , z_M están asociados con el miembro en particular i bajo consideración, y se llaman *ejes orientados con el miembro*. Los ejes del miembro siempre tendrán su origen en el extremo j del miembro, con el eje x_M considerado siempre a lo largo del eje del miembro, y del extremo j al extremo k . La posición de los ejes y_M y z_M en el extremo j no son de importancia en un análisis de armadura, ya que todas las acciones de extremo están en la dirección x_M . Sin embargo, para otros tipos de estructuras los ejes y_M y z_M deben seleccionarse igual que los ejes principales de la sección transversal del miembro.

La acción de extremo que debe utilizarse en cálculos subsecuentes para armaduras es la fuerza axial en el extremo k del miembro,

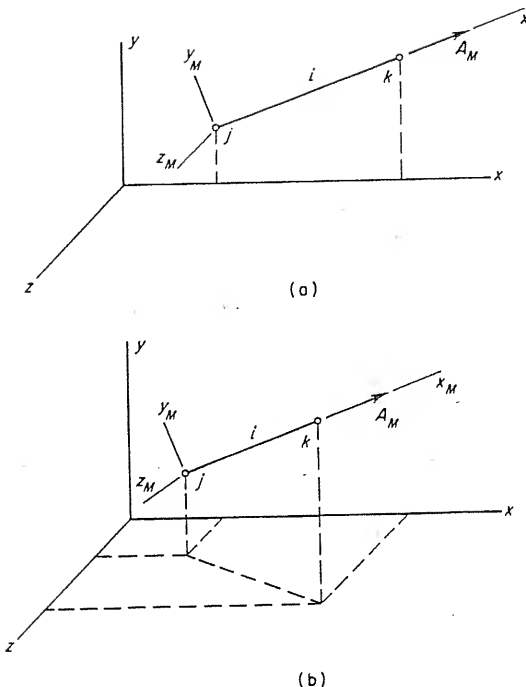


FIG. 3-2. Acciones de extremo para (a) miembro de una armadura plana y (b) miembro de una armadura en el espacio

bro, denominado A_M en la Fig. 3-2. Nótese que a un valor positivo de la acción de extremo en el extremo k corresponde una fuerza de tensión en el miembro. La acción de extremo, en el extremo j del miembro, se omite en la figura, ya que no se utiliza en el análisis. Si la acción de extremo A_M está causada por la carga unitaria que actúa sobre la estructura, se denomina A_{MU} ; si está causada por las cargas reales, se denomina A_{ML} . Por lo tanto, cuando la Ec. (a) para el desplazamiento D se escribe en términos de acciones de extremo, queda

$$D = \sum \frac{A_{MU} A_{ML} L}{EA} \quad (b)$$

Más tarde daremos un ejemplo para ilustrar el cálculo de las acciones de extremo A_{ML} y A_{MU} para una armadura.

Se puede efectuar otro cambio en la Ec. (b) introduciendo la noción de *flexibilidad de miembro*, denominada F_M . En el caso de un miembro cargado axialmente, la flexibilidad F_M puede visualizarse como el desplazamiento del extremo del miembro causado por una

fuerza axial unitaria, como se muestra para el miembro i en la Fig. 3-3. Por lo tanto, la flexibilidad para un miembro de armadura se define como

$$F_M = \frac{L}{EA} \quad (3-1)$$

suponiendo que el miembro es prismático. Cuando la Ec. (3-1) se sustituye en la Ec. (b) y el orden de los términos se cambia ligeramente, la ecuación para el desplazamiento D queda

$$D = \sum A_{MU} F_M A_{ML} \quad (c)$$

La ecuación anterior para el desplazamiento en una armadura puede expresarse en forma matricial introduciendo tres matrices. Una de éstas es un vector columna A_{MU} formado por las acciones

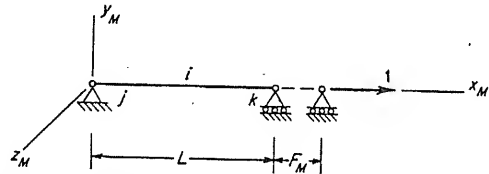


FIG. 3-3. Flexibilidad F_M para un miembro de armadura

de extremo A_{MU} debidas a la carga unitaria, y otra es un vector columna A_{ML} formado por las acciones de miembro A_{ML} debidas a las cargas reales. Cada uno de estos vectores columna tiene tantos elementos como miembros hay en la armadura. Por lo tanto, suponiendo que existen m miembros en la armadura, tienen la siguiente forma:*

$$A_{MU} = \{A_{MU1}, A_{MU2}, \dots, A_{MU_m}\} \quad (3-2)$$

$$A_{ML} = \{A_{ML1}, A_{ML2}, \dots, A_{ML_m}\} \quad (3-3)$$

Los subíndices numéricos de estas expresiones identifican los miembros de la armadura.

La tercera matriz que debe introducirse es una matriz diagonal de las flexibilidades de miembro, denominada como F_M :

$$F_M = \begin{bmatrix} F_{M1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_{M2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_{Mm} \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

Esta matriz cuadrada es de orden $m \times m$ y contiene las flexibilidades de miembro a lo largo de su diagonal principal.

* En este libro, siempre que un vector columna se escribe en un renglón se utilizan paréntesis $\{ \}$ para encerrar al vector.

Para expresar la Ec. (c) en forma matricial, sólo es necesario observar el resultado de efectuar el producto matricial $A'_{MU} F_M A_{ML}$, donde A'_{MU} es el vector A_{MU} invertido. Si evaluamos este producto se encuentra que obtenemos la misma expresión que la obtenida desarrollando el miembro de la derecha de la Ec. (c), o sea,

$$A_{MU1} F_{M1} A_{ML1} + A_{MU2} F_{M2} A_{ML2} + \dots + A_{MU_m} F_{Mm} A_{MLm}$$

Por lo tanto, la ecuación matricial del desplazamiento D queda

$$D = A'_{MU} F_M A_{ML} \quad (3-5)$$

La Ec. (3-5) puede utilizarse para encontrar cualquier desplazamiento de nudo D en una armadura plana o en el espacio.

Las matrices A_{MU} y A_{ML} que aparecen en la Ec. (3-5) representan acciones de extremo debidas a la carga unitaria y a las cargas reales, respectivamente. Todas estas acciones se obtienen mediante análisis de equilibrio estático de la armadura. Las matrices A_{MU} y A_{ML} se llaman *matrices de cambio*, porque representan el resultado de un cambio (mediante relaciones de equilibrio estático) de un juego de acciones a otro.

EJEMPLO 1. Como una ilustración del uso de la Ec. (3-5) para encontrar desplazamientos, consideremos la armadura plana mostrada en la Fig. 3-4a y supongamos que el desplazamiento vertical del nudo B debe ser determinado. Este desplazamiento se considera positivo cuando tiene la dirección positiva del eje y . Nótese que la armadura es estáticamente determinada y que está sujeta a una carga P en la dirección negativa y en el nudo D .

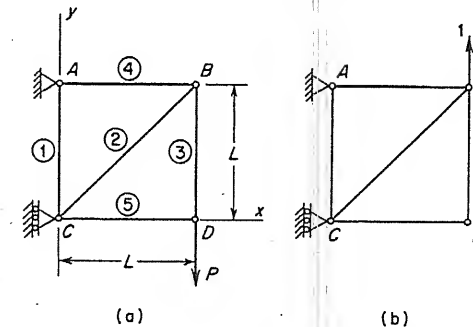


FIG. 3-4. Ej. 1: Desplazamientos en una armadura plana

Todos los miembros de la armadura se consideran con la misma rigidez axial EA . Los miembros están numerados consecutivamente del 1 al 5, según se muestra por los números encerrados en círculos; el orden en el cual se numeraron los miembros se escogió arbitrariamente.

La matriz F_M de flexibilidades de miembro puede construirse sin dificultad de la manera siguiente:

$$F_M = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Las matrices de cambio A_{ML} y A_{MU} deben obtenerse a continuación. La primera de estas matrices está formada por las acciones de extremo debidas a la carga P (véase la Fig. 3-4a) y cada término en la matriz puede encontrarse rápidamente por estática; por lo tanto, la matriz A_{ML} es

$$A_{ML} = P\{1, -\sqrt{2}, 1, 1, 0\} \quad (e)$$

La matriz de cambio A_{MU} está formada por las acciones de extremo debidas a una carga que corresponde al desplazamiento deseado D , lo que significa que la carga unitaria debe tomarse en la dirección positiva y en el nudo B (véase la Fig. 3-4b). Las acciones de extremo causadas por la carga unitaria también pueden encontrarse por estática y los resultados son los siguientes:

$$A_{MU} = \{-1, \sqrt{2}, 0, -1, 0\} \quad (f)$$

El desplazamiento vertical D en el nudo B se encuentra sustituyendo las matrices A'_{ML} , F_M , y A_{ML} en la Ec. (3-5) y desarrollando la multiplicación matricial; el resultado es

$$D = -2(1 + \sqrt{2}) \frac{PL}{EA} = -4.83 \frac{PL}{EA}$$

El signo menos en este resultado significa que el desplazamiento tiene la dirección y negativa (hacia abajo).

Cálculo de varios desplazamientos. Normalmente es necesario, en el método de la flexibilidad, calcular varios desplazamientos de nudo en la estructura; por lo tanto, es deseable extender las técnicas ilustradas en el ejemplo anterior para incluir esta posibilidad. Todo lo que es necesario se reduce a generalizar la definición de la matriz de cambio A_{MU} . En la discusión anterior, la matriz se supuso como formada por una columna que representa las acciones de miembro causadas por la carga unitaria (véase la Ec. 3-2). Si existen varios desplazamientos que deben calcularse, se tendrá una carga unitaria para cada desplazamiento y un juego de acciones de extremo para cada carga unitaria. Cada uno de estos juegos de acciones de extremo puede representarse como una columna en la matriz A_{MU} ; por lo tanto, A_{ML} se vuelve una matriz rectangular de orden $m \times n$, en donde m es el número de miembros en la armadura y n es el número de desplazamientos que deben calcularse. Por lo tanto, la forma general de esta matriz es:

$$A_{MU} = \begin{bmatrix} A_{MU11} & A_{MU12} & \cdots & A_{MU1n} \\ A_{MU21} & A_{MU22} & \cdots & A_{MU2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{MU m1} & A_{MU m2} & \cdots & A_{MU mn} \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

Cada elemento de la matriz A_{MU} tiene dos subíndices, el primero identifica el miembro de la armadura y el segundo la carga unitaria. En otras palabras, el elemento A_{MUij} es la fuerza en la barra i ésima debida a la j ésima carga unitaria. En general, la matriz A_{MU} puede describirse como la matriz de cambio que da las acciones de extremo causadas por las cargas unitarias.

Los diferentes desplazamientos en la armadura pueden colocarse en un vector desplazamiento D , de la manera siguiente:

$$D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\} \quad (3-7)$$

Cuando las matrices A_{MU} y D quedan definidas de acuerdo con las Ecs. (3-6) y (3-7), la ecuación para los desplazamientos toma la siguiente forma:

$$D = A'_{MU} F_M A_{ML} \quad (3-8)$$

que puede considerarse como una forma generalizada de la Ec. (3-5). En la Ec. (3-8), los significados anteriores de las matrices A_{ML} y F_M no se alteran en ningún modo (véanse las Ecs. 3-3 y 3-4) y son de orden $m \times 1$ y $m \times m$, respectivamente. Nótese, sin embargo, que A_{MU} es ahora de orden $m \times n$; A'_{MU} es de orden $n \times m$; y D es de orden $n \times 1$. El uso de la Ec. (3-8) en el cálculo de desplazamiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2. La armadura plana mostrada en la Fig. 3-5a es la misma del ejemplo de la Fig. 3-4. Sin embargo, el objeto de este análisis es calcular las componentes horizontal y vertical de los desplazamientos de los nudos B y D . Estos desplazamientos se denominan D_1 , D_2 , D_3 y D_4 (véase la Fig. 3-5a), y sus direcciones positivas corresponden a las direcciones positivas de los ejes x y y mostrados en la figura.

La matriz F_M de las flexibilidades de miembro y la matriz de cambio A_{ML} de las acciones de extremo causadas por la carga P son las mismas que en el ejemplo precedente (véanse las Ecs. d y e). Sin embargo, la matriz

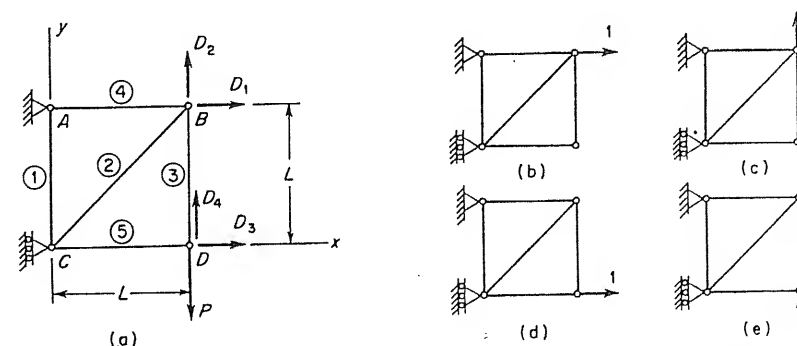


FIG. 3-5. Ej. 2: Desplazamientos en una armadura plana

de cambio A_{MU} debe determinarse de nuevo. La primera columna de A_{MU} representa las acciones de extremo debidas a una carga unitaria correspondiente a D_1 (Fig. 3-5b), la segunda columna representa acciones de extremo debidas a una carga unitaria correspondiente a D_2 (Fig. 3-5c), y así sucesivamente, para las cargas unitarias restantes mostradas en las Figs. 3-5d y 3-5e. Por lo tanto, la matriz A_{MU} es como sigue:

$$A_{MU} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (g)$$

Cambiando a la matriz A_{MU} al otro lado del signo igual y después sustituyendo A'_{MU} , F_M , y A_{ML} en la Ec. (3-8) tenemos el siguiente resultado para el vector desplazamiento D :

$$D = \frac{PL}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ -2(1 + \sqrt{2}) \\ 0 \\ -3 - 2\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{PL}{EA} \begin{bmatrix} 1 \\ -4.83 \\ 0 \\ -5.83 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el desplazamiento horizontal D_1 del nudo B es igual a PL/EA ; el desplazamiento vertical D_2 del nudo B es $-4.83 PL/EA$; el desplazamiento horizontal D_3 del nudo D es cero; y el desplazamiento vertical D_4 del nudo D es $-5.83 PL/EA$. Los signos negativos de D_2 y D_4 indican que estos desplazamientos tienen la dirección y negativa (hacia abajo).

Este ejemplo ilustra cómo los desplazamientos de nudo de una armadura pueden calcularse mediante las operaciones matriciales mostradas en la Ec. (3-8). La ecuación es apropiada sólo cuando se considera un sistema. Sin embargo, el procedimiento puede generalizarse para incluir más de un sistema de cargas, según se describe en la siguiente discusión.

Varios sistemas de cargas. Cuando se va a analizar una estructura considerando varios sistemas de cargas, es necesario tener columnas adicionales en la matriz de cambio A_{ML} . Cada columna de la matriz contiene a las acciones de miembro debidas a uno de los sistemas de carga. Por ejemplo, si se tienen p sistemas de carga, la matriz A_{ML} será de orden $m \times p$, en donde (como antes) m es el número de miembros; por lo tanto:

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} A_{ML11} & A_{ML12} & \cdots & A_{ML1p} \\ A_{ML21} & A_{ML22} & \cdots & A_{ML2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{MLm1} & A_{MLm2} & \cdots & A_{MLmp} \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

La matriz F_M de las flexibilidades de miembro y la matriz de cambio A_{MU} permanecen sin cambiar (véanse las Ecs. 3-4 y 3-6). Sin embargo, la matriz de desplazamiento D tiene ahora una columna que corresponde a cada sistema de cargas y, por lo tanto, es de orden $n \times p$:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1p} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & D_{np} \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

Finalmente, la ecuación para los desplazamientos tiene la misma forma que en las ecuaciones primeras, a saber:

$$D = A'_{MU} F_M A_{ML} \quad (3-8)$$

repetida

excepto que las matrices A_{ML} y D están dadas ahora por las Ecs. (3-9) y (3-10), respectivamente.

La Ec. (3-8) puede utilizarse para calcular cualquier número de desplazamientos de nudo en cualquier armadura del espacio o plana, debidos a diferentes sistemas de cargas. El Ej. 3 ilustra el uso de la ecuación.

EJEMPLO 3. La armadura mostrada en la Fig. 3-6 es la misma armadura considerada en los ejemplos anteriores, excepto que está sujeta a dos sistemas de cargas. El primer sistema de cargas está formado por la fuerza P_1 que actúa en el nudo D (Fig. 3-6a), en tanto que el segundo sistema está formado por las tres fuerzas P_2 que actúan en los nudos B y D (Fig. 3-6b). Los desplazamientos que deben calcularse son los desplazamientos horizontal y vertical en los nudos B y D, como se muestra en la Fig. 3-5a.

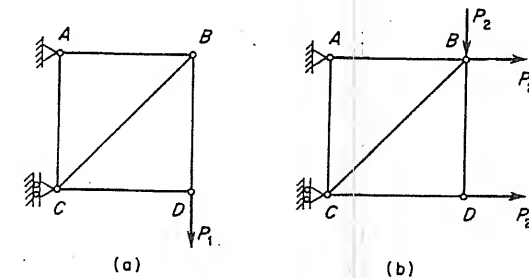


FIG. 3-6. Ej. 3: Armadura con dos sistemas de cargas

Las matrices A'_{MU} y F_M que deben sustituirse en la Ec. (3-8) son las mismas que las utilizadas en el Ej. 2 (véanse las Ecs. g y d). La matriz de cambio A_{ML} está formada por las acciones de extremo causadas por los dos sistemas de carga:

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ -\sqrt{2}P_1 & -\sqrt{2}P_2 \\ P_1 & 0 \\ P_1 & 2P_2 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

Cuando las tres matrices A'_{MU} , F_M y A_{ML} se sustituyen en la Ec. (3-8), el resultado es

$$D = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} P_1 & 2P_2 \\ -2(1 + \sqrt{2})P_1 & -(3 + 2\sqrt{2})P_2 \\ 0 & P_2 \\ -(3 + 2\sqrt{2})P_1 & -(3 + 2\sqrt{2})P_2 \end{bmatrix}$$

y de este modo se han determinado los desplazamientos deseados para los dos sistemas de carga.

3.4. Desplazamiento de nudo en vigas. El análisis de una viga continua por el método de la flexibilidad requiere el cálculo de los desplazamientos de nudo en la estructura libre. Por lo tanto, en este artículo se desarrollan las ecuaciones matriciales que se necesitan para encontrar desplazamientos de nudo en una viga estáticamente determinada. Por razones que se explicaron en el Art. 3.2, se supone que todas las cargas en la viga tienen la forma de cargas de nudo combinadas.

La ecuación básica para encontrar desplazamientos de viga es la ecuación de la carga unitaria mostrada en el Apéndice A (véase la Ec. A-33):

$$D = \int \frac{M_U M_L dx}{EI} \quad (a)$$

en donde D es el desplazamiento que va a calcularse, M_U es el momento flexionante en cualquier sección transversal de la viga debida a una carga unitaria correspondiente al desplazamiento, M_L es el momento flexionante debido a las cargas reales que causan el desplazamiento, y EI es la rigidez a la flexión de la sección transversal de la viga. Debe notarse que todos los miembros de la estructura deben incluirse en la integración de la Ec. (a).

Para poner la Ec. (a) en forma matricial, es deseable expresar el desplazamiento D como la suma de términos separados que están valuados para cada miembro de la estructura. Por lo tanto, la Ec. (a) puede escribirse nuevamente en la forma más explícita

$$D = \sum \int \frac{M_U M_L dx}{EI} \quad (b)$$

en donde el signo de suma se utiliza para indicar que la integral se suma para todos los miembros de la estructura a fin de obtener el desplazamiento. Para cualquier miembro en particular es necesario evaluar tanto a M_U como a M_L , de acuerdo con la misma convención de signos que la del momento flexionante.

Consideremos ahora la evaluación de la integral de la Ec. (b) para un miembro típico i de una viga (véase la Fig. 3-7). Los nudos en los extremos izquierdo y derecho se denominan nudos j y k , respectivamente. Los ejes orientados con el miembro tienen su origen en el extremo j , y el eje x_M está dirigido del extremo j al k . El eje y_M está escogido de modo que el plano x_M - y_M quede en el plano de flexión de la viga. El miembro está sujeto a fuerzas y pares úni-

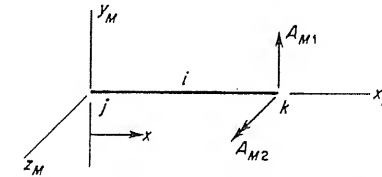


FIG. 3-7. Acciones de extremo para un miembro de una viga

camente en sus extremos, ya que todas las fuerzas actúan en los nudos. En el extremo k del miembro las acciones de extremo serán una fuerza cortante A_{M1} (positiva en el sentido y_M) y un momento flexionante A_{M2} (positivo en el sentido z_M). También puede existir una fuerza axial en el miembro, pero ésta se omite cuando sólo se toman en consideración los efectos de las deformaciones por flexión. Las acciones de extremo causadas por las cargas se denominarán A_{ML1} y A_{ML2} para la fuerza cortante y el momento flexionante, respectivamente, y las acciones de extremo debidas a la carga unitaria se denominarán A_{MU1} y A_{MU2} .

Los momentos M_U y M_L (véase la Ec. b), en cualquier sección de un miembro pueden expresarse rápidamente en términos de las acciones de extremo. Tomando una distancia coordinada x a partir del extremo izquierdo del miembro (véase la Fig. 3-7) y suponiendo también que la compresión en la parte superior de la viga representa un momento flexionante positivo, las ecuaciones para M_U y M_L quedan

$$M_U = A_{MU1}(L - x) + A_{MU2}$$

$$M_L = A_{ML1}(L - x) + A_{ML2}$$

en donde L es la longitud de la viga. Estas expresiones para M_U y M_L pueden sustituirse en la integral de la Ec. (b). Luego, cuando la integral se determina entre los límites 0 y L , y si suponemos que EI es constante, la expresión resultante puede escribirse en la forma

$$\int \frac{M_U M_L dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left[A_{MU1} A_{ML1} \frac{L^3}{3} + A_{MU1} A_{ML2} \frac{L^2}{2} + A_{MU2} A_{ML1} \frac{L^2}{2} + A_{MU2} A_{ML2} L \right] \quad (c)$$

La expresión que aparece en el miembro de la derecha de la Ec. (c) puede escribirse en forma matricial. Para hacer esto, se introducen dos vectores de acciones de extremo para el miembro i :

$$\mathbf{A}_{MU_i} = \{A_{MU1}, A_{MU2}\} \quad (3-11)$$

$$\mathbf{A}_{ML_i} = \{A_{ML1}, A_{ML2}\} \quad (3-12)$$

El primero de estos vectores contiene a la fuerza cortante A_{MU1} y al momento flexionante A_{MU2} en el extremo k del miembro i debidos a la carga unitaria; similarmente, el segundo vector contiene las acciones de extremo debidas a las cargas de nudo. Finalmente, se define una matriz de flexibilidad de miembro \mathbf{F}_{Mi} :

$$\mathbf{F}_{Mi} = \begin{bmatrix} F_{M11} & F_{M12} \\ F_{M21} & F_{M22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

Los elementos de esta matriz de flexibilidad de miembro pueden visualizarse como los desplazamientos en una viga en voladizo causados por valores unitarios de las acciones de miembro (véanse las Figs. 3-8b y 3-8c). La ecuación (c) puede expresarse ahora en forma matricial del modo siguiente:

$$\int \frac{M_U M_L dx}{EI} = \mathbf{A}'_{MU_i} \mathbf{F}_{Mi} \mathbf{A}_{ML_i} \quad (d)$$

La validez de esta expresión puede comprobarse rápidamente desarrollando las multiplicaciones matriciales indicadas.

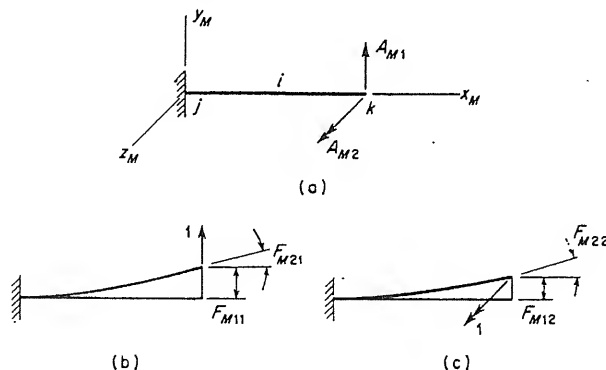


FIG. 3-8. Flexibilidades para un miembro de una viga

Debemos sumar ahora expresiones de la forma dada en la Ec. (d) para todos los miembros de la estructura para poder obtener el

desplazamiento D (véase la Ec. b). Por lo tanto, el desplazamiento D está dado por la siguiente ecuación:

$$D = \sum (\mathbf{A}'_{MU_i} \mathbf{F}_{Mi} \mathbf{A}_{ML_i}) = \mathbf{A}'_{MU1} \mathbf{F}_{M1} \mathbf{A}_{ML1} + \mathbf{A}'_{MU2} \mathbf{F}_{M2} \mathbf{A}_{ML2} + \dots + \mathbf{A}'_{MU_m} \mathbf{F}_{Mm} \mathbf{A}_{MLm} \quad (e)$$

Esta suma también puede expresarse en forma matricial. Para hacer esto necesitamos la introducción de matrices de cambio de acciones de extremo para todos los miembros, así como una matriz de flexibilidades para todos los miembros. Las matrices de acciones de extremo son

$$\mathbf{A}_{MU} = \{A_{MU1}, A_{MU2}, \dots, A_{MU_m}\} \quad (3-14)$$

$$\mathbf{A}_{ML} = \{A_{ML1}, A_{ML2}, \dots, A_{MLm}\} \quad (3-15)$$

Cada una de estas matrices es de orden $2m \times 1$ y está formada por submatrices que contienen las acciones de extremo para los miembros individuales. En el caso de la matriz \mathbf{A}_{MU} las acciones de extremo son debidas a la carga unitaria en la estructura, en tanto que en el caso de \mathbf{A}_{ML} son debidas a las cargas de nudo.

La matriz \mathbf{F}_M de las flexibilidades de miembro se forma colocando las matrices de flexibilidad individuales (véase la Ec. 3-13) en la diagonal principal:

$$\mathbf{F}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{M1} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_{M2} & \dots & \mathbf{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{F}_{Mm} \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

Por lo tanto, la matriz \mathbf{F}_M es de orden $2m \times 2m$, ya que está formada por submatrices de orden 2×2 . Una vez que se han definido las matrices de cambio \mathbf{A}_{MU} y \mathbf{A}_{ML} (Ecs. 3-14 y 3-15) y la matriz \mathbf{F}_M de flexibilidades de miembro (Ec. 3-16), es posible escribir la Ec. (e) en la forma de la Ec. (3-5):

$$D = \mathbf{A}'_{MU} \mathbf{F}_M \mathbf{A}_{ML} \quad (3-5)$$

repetida

Por lo tanto, esta ecuación puede utilizarse para calcular un desplazamiento de viga así como un desplazamiento de armadura, siempre que las matrices en el miembro de la derecha de la ecuación estén formuladas de modo adecuado.

Cuando se utiliza la Ec. (3-5) para calcular un desplazamiento en una viga, el procedimiento es comenzar obteniendo las matrices de flexibilidad para cada miembro (véase la Ec. 3-13). Estas matrices pueden colocarse en la diagonal principal de la matriz \mathbf{F}_M (Ec. 3-16). A continuación, se calculan por estática las acciones

de extremo en los extremos k de todos los miembros debidas a la carga unitaria y a las cargas reales. Estas acciones de extremo se acomodan en submatrices, tales como A_{MU_i} y A_{ML_i} (Ecs. 3-11 y 3-12), y luego en las matrices de cambio A_{MU} y A_{ML} (Ecs. 3-14 y 3-15). Finalmente, la ejecución de las operaciones matriciales indicadas en la Ec. (3-5) nos da el valor del desplazamiento D . Estas etapas son análogas a las desarrolladas previamente cuando se encontraron los desplazamientos de armaduras. Daremos a continuación un ejemplo del uso de la Ec. (3-5) para encontrar desplazamientos de viga.

EJEMPLO 1. La viga mostrada en la Fig. 3-9a está sujeta a un par M que actúa en el nudo B y a una fuerza concentrada P que actúa en el nudo C . Los miembros AB y BC tienen longitudes L y $L/2$, respectivamente, y los dos miembros tienen la misma rigidez a la flexión EI . El desplazamiento vertical del nudo C (positivo en la dirección positiva del eje y) debe calcularse.

Con los miembros AB y BC , llamados miembros 1 y 2, respectivamente, las matrices de flexibilidad de miembro F_{M1} y F_{M2} son como sigue:

$$F_{M1} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad F_{M2} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{24EI} & \frac{L^2}{8EI} \\ \frac{L^2}{8EI} & \frac{L}{2EI} \end{bmatrix}$$

A continuación, la matriz F_M se forma como se indicó en la Ec. (3-16):

$$F_M = \frac{L}{24EI} \begin{bmatrix} 8L^2 & 12L & 0 & 0 \\ 12L & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 & 3L \\ 0 & 0 & 3L & 12 \end{bmatrix}$$

Con las cargas M y P (Fig. 3-9a), actuando sobre la viga, los vectores de acciones de extremo pueden calcularse por estática. Los vectores se denominan A_{ML1} y A_{ML2} para los miembros 1 y 2, respectivamente, y son:

$$A_{ML1} = \begin{bmatrix} -\frac{M}{L} + \frac{P}{2} \\ M - \frac{PL}{2} \end{bmatrix} \quad A_{ML2} = \begin{bmatrix} -P \\ 0 \end{bmatrix}$$

El primer elemento en cada uno de estos vectores representa la fuerza cortante en el extremo de la derecha del miembro; y el segundo, al momento flexionante. Las direcciones positivas de estas cantidades son las mostradas en la Fig. 3-7. Las matrices A_{MU1} y A_{MU2} se encuentran del mismo modo, excepto que la fuerza cortante y el momento flexionante están causados

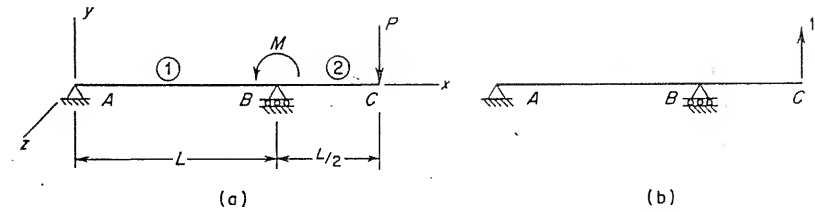


FIG. 3-9. Ej. 1: Desplazamientos en una viga

por la carga unitaria correspondiente al desplazamiento deseado (véase la Fig. 3-9b):

$$A_{MU1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix} \quad A_{MU2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, las matrices de cambio A_{ML} y A_{MU} se arreglan utilizando las matrices de extremo como submatrices:

$$A_{ML} = \left\{ -\frac{M}{L} + \frac{P}{2}, \quad M - \frac{PL}{2}, \quad -P, \quad 0 \right\}$$

$$A_{MU} = \left\{ -\frac{1}{2}, \quad \frac{L}{2}, \quad 1, \quad 0 \right\}$$

El último paso en el cálculo del desplazamiento D es sustituir los vectores A_{ML} y A_{MU} en la Ec. (3-5) y desarrollar las multiplicaciones matriciales. Cuando se ha hecho esto, el resultado es

$$D = \frac{ML^2}{6EI} - \frac{PL^3}{8EI}$$

Por lo tanto, el desplazamiento vertical en el nudo C ha sido determinado.

Determinación de varios desplazamientos. Si se desea calcular varios desplazamientos en la estructura, debe usarse una forma generalizada de la matriz dada por la Ec. (3-5). En la nueva ecuación la matriz de cambio A_{ML} de acciones de extremo no debe ser cambiada, ni tampoco la matriz F_M de flexibilidades de miembro. Sin embargo, unas columnas adicionales deben ser añadidas a la matriz A_{MU} . Habrá una columna de submatrices de acciones de extremo de miembro para cada carga unitaria que debe ser considerada. Si hay n desplazamientos de nudo por ser calculados, habrá n columnas de submatrices en la matriz A_{MU} , según se muestra:

$$A_{MU} = \begin{bmatrix} A_{MU11} & A_{MU12} & \cdots & A_{MU1n} \\ A_{MU21} & A_{MU22} & \cdots & A_{MU2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{MUm1} & A_{MUm2} & \cdots & A_{MUmn} \end{bmatrix} \quad (3-17)$$

La primera columna de esta matriz contiene submatrices de acciones de extremo de miembro debidas a la primera carga unitaria, la segunda columna contiene acciones de extremo debidas a la segunda carga unitaria, y así, sucesivamente, para las n cargas unitarias correspondientes a los n desplazamientos por ser calculados. En general, la submatriz A_{MUij} representa las acciones de extremo para el miembro i ésimo debidas a una carga unitaria correspondiente al desplazamiento j ésimo. Como cada submatriz es del orden de 2×1 , el orden de la matriz de cambio A_{MU} es $2m \times n$.

Los n desplazamientos de nudo que han sido calculados se representan D_1, D_2, \dots, D_n , y son los elementos de un vector desplazamiento D que tiene la forma mostrada en la Ec. (3-7). Este vector desplazamiento está dado por la ecuación matricial (3-8):

$$D = A'_{MU} F_M A_{ML} \quad (3-8)$$

repetida

en la que la matriz A_{MU} está ahora definida por la Ec. (3-17). Los tamaños de estas matrices en esta ecuación son como sigue: D que es del orden $n \times 1$, A'_{MU} que es del orden $n \times 2m$; F_M que es del orden $2m \times 2m$, y A_{ML} que es del orden $2m \times 1$.

Un ejemplo ilustrativo del cálculo de varios desplazamientos se dará más adelante.

Sistemas de varias cargas. Si los desplazamientos en una estructura van a determinarse para más de un sistema de carga, es necesario tener columnas adicionales en la matriz A_{ML} . La primera columna de A_{ML} contiene acciones de extremo de miembro debidas al primer sistema de carga; la segunda columna contiene acciones de extremo de miembro debidas al segundo sistema de carga, y así, sucesivamente, para muchos sistemas de carga según sea necesario. Si hay p sistemas de carga, la matriz A_{ML} será como sigue:

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} A_{ML11} & A_{ML12} & \cdots & A_{ML1p} \\ A_{ML21} & A_{ML22} & \cdots & A_{ML2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{MLm1} & A_{MLm2} & \cdots & A_{MLmp} \end{bmatrix} \quad (3-18)$$

La matriz D de desplazamientos tendrá también columnas adicionales, una de las cuales corresponde a cada sistema de carga (véase la Ec. 3-10).

Por lo tanto, si hay varios sistemas de carga así como también varios desplazamientos por ser encontrados, la ecuación matricial para los desplazamientos tiene la misma forma que la Ec. (3-8), pero las matrices A_{MU} , F_M y A_{ML} tienen las formas dadas por las Ecs. (3-17), (3-16) y (3-18), respectivamente.

El siguiente ejemplo ilustra el uso de la Ec. (3-8) para determinar los desplazamientos de vigas.

EJEMPLO 2. La Fig. 3-10a muestra la viga del Ej. 1, y la Fig. 3-10b muestra la misma viga sujeta a un segundo sistema de cargas. Supongamos que todos los desplazamientos de los nudos de la viga han de ser determinados para ambos sistemas de carga. Los desplazamientos de nudo están indicados en la Fig. 3-10c con translaciones positivas en la dirección positiva del eje y , así como giros positivos en la dirección positiva del eje z .

En este ejemplo la matriz de cambio A_{ML} tiene dos columnas, una para cada sistema de carga. Por ejemplo, bajo el primer sistema de carga (Fig. 3-10a); las acciones de extremo para los miembros 1 y 2 están dadas por los siguientes vectores:

$$A_{ML11} = \begin{bmatrix} -\frac{M}{L} + \frac{P}{2} \\ M - \frac{PL}{2} \end{bmatrix} \quad A_{ML21} = \begin{bmatrix} -P \\ 0 \end{bmatrix}$$

Similarmente, las acciones de extremo para el segundo sistema de carga (Fig. 3-10b) son:

$$A_{ML12} = \begin{bmatrix} \frac{P}{2} \\ 2M - \frac{PL}{2} \end{bmatrix} \quad A_{ML22} = \begin{bmatrix} -P \\ 0 \end{bmatrix}$$

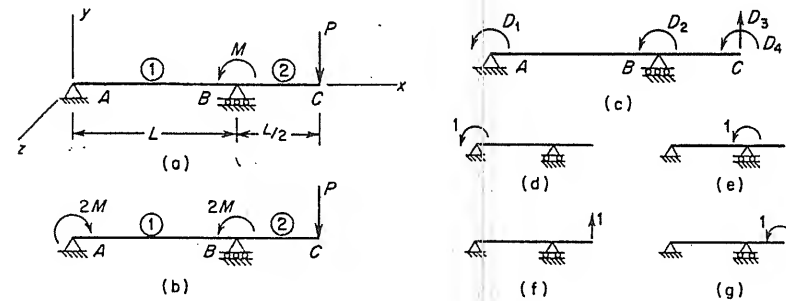


FIG. 3-10. Ej. 2: Viga con dos sistemas de carga

Así pues, la matriz de cambio A_{ML} se convierte en

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} -\frac{M}{L} + \frac{P}{2} & \frac{P}{2} \\ M - \frac{PL}{2} & 2M - \frac{PL}{2} \\ -P & -P \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las cuatro cargas unitarias que corresponden a los cuatro desplazamientos que han de ser calculados se muestran en las Figs. 3-10d, 3-10e, 3-10f y 3-10g. La matriz de cambio A_{MU} está formada de varias submatrices que representan las acciones de extremo debidas a las cargas unitarias. Por ejemplo, las acciones de extremo para los miembros 1 y 2, respectivamente, debidas a la primer carga unitaria, son

$$A_{MU11} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_{MU21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estas submatrices constituyen la primera columna de la matriz A_{MU} (véase la Ec. 3-17). Las submatrices para la segunda columna de A_{MU} se obtienen por determinación de las acciones de extremo de la viga de la Fig. 3-10e:

$$A_{MU12} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} \\ 1 \end{bmatrix} \quad A_{MU22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Similarmenete, las submatrices para la tercera y cuarta columnas de A_{MU} se obtienen de las Figs. 3-10f y 3-10g, respectivamente. Cuando todas las submatrices han sido calculadas, se utilizan para formar la matriz de cambio de acciones de extremo:

$$A_{MU} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & \frac{L}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz F_M de flexibilidades de miembro es la misma del Ej. 1, el cual trata de la misma viga.

El paso que resta para la solución consiste en sustituir A'_{MU} , F_M y A_{MI} en la Ec. (3-8), lo que da como resultado a la matriz D :

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \\ D_{31} & D_{32} \\ D_{41} & D_{42} \end{bmatrix} = \frac{L}{24EI} \begin{bmatrix} -4M + 2PL & -24M + 2PL \\ 8M - 4PL & 24M - 4PL \\ 4ML - 3PL^2 & 12ML - 3PL^2 \\ 8M - 7PL & 24M - 7PL \end{bmatrix}$$

Así pues, los cuatro desplazamientos de nudo debidos a cada uno de los dos sistemas de carga han sido calculados por medio de una ecuación matricial.

Efectos de deformaciones por cortante. Si se desea, los efectos de deformaciones por cortante pueden ser, por lo pronto, incluidos en la determinación de los desplazamientos de la viga. Todo lo que se requiere es incorporar efectos por cortante en la determinación de la matriz de flexibilidad de miembro F_{Mi} (Ec. 3-13). El único

elemento en esta matriz que es afectado es F_{M11} (véase la Fig. 3-8b), que se convierte en

$$F_{M11} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{Lf}{GA} \quad (3-19)$$

en la que GA/f es la rigidez al cortante para la viga (véase el Art. A.1, Apéndice A). Una vez hecho este cambio en la matriz F_{Mi} , todos los cálculos restantes seguirán como previamente se describió. Los desplazamientos resultantes incluirán los efectos de deformaciones por flexión y cortante.

3.5. Desplazamientos de nudos en marcos planos. Un miembro típico i de un marco plano se muestra en la Fig. 3-11. Los nudos en los extremos del miembro son llamados nudos j y k , y los ejes de miembro x_M , y_M y z_M tienen su origen en el extremo j . El plano x_M - y_M se supone debe ser el plano de flexión del miembro. Normalmente, los efectos de deformación por carga axial en el plano del marco son despreciables en comparación con los efectos de deformaciones por flexión. Como resultado, las únicas acciones de extremo que deben ser consideradas en el extremo k son la fuerza cortante A_{M1} y el momento flexionante A_{M2} que se muestran en la Fig. 3-11. Si las deformaciones por carga axial van a ser incluidas en el análisis, una tercera acción de extremo (la fuerza axial) también debe tomarse en cuenta, como se describirá más adelante.

Las acciones de extremo, mostradas en la Fig. 3-11 para un miembro de marco plano, son las mismas descritas en el artículo

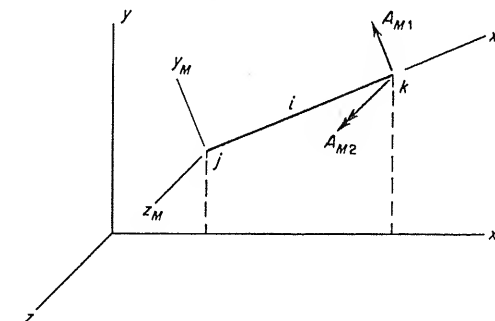


FIG. 3-11. Acciones de extremo para un miembro de un marco plano

anterior para una viga (véase la Fig. 3-7). Por lo tanto, la matriz de flexibilidad de miembro para un miembro de marco plano (cuando las deformaciones por carga axial se desprecian) en la misma que

la de una viga (véase la Ec. 3-13). Además, sabemos que todas las ecuaciones matriciales dadas en el artículo anterior pueden ser usadas para determinar los desplazamientos de marcos planos. El siguiente ejemplo muestra el procedimiento.

EJEMPLO 1. El marco isostático mostrado en la Fig. 3-12a soporta cargas en los nudos B y C. Los miembros del marco están numerados, según se muestra en la figura, y ambos tienen la misma rigidez a la flexión EI . El desplazamiento D_1 del nudo C en la dirección del eje x será determinado (véase la Fig. 3-12b, que muestra la carga unitaria correspondiente a D_1).

Los nudos j y k deben ser especificados de manera que las posiciones de sus ejes y acciones de extremo puedan establecerse de acuerdo con la convención mostrada en la Fig. 3-11. En este ejemplo se supone que los nudos j y k del miembro 1 son A y B, respectivamente, y del miembro 2 son B y C, respectivamente.

Las matrices de flexibilidad de miembro pueden ser encontradas fácilmente (véase la Ec. 3-13):

$$F_{M1} = F_{M2} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix}$$

después de la cual la matriz F_M puede ser formada utilizando F_{M1} y F_{M2} como submatrices (véase la Ec. 3-16).

Las acciones de extremo para los miembros 1 y 2, debidas a las cargas pueden ser determinadas por el análisis estático de la estructura mostrada en la Fig. 3-12a; así pues, los vectores A_{ML1} y A_{ML2} son

$$A_{ML1} = \frac{3P}{8} \begin{bmatrix} -1 \\ L \end{bmatrix} \quad A_{ML2} = \frac{P}{24} \begin{bmatrix} 9 \\ -4L \end{bmatrix}$$

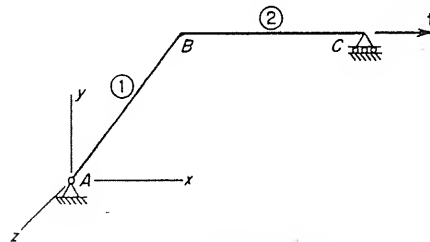
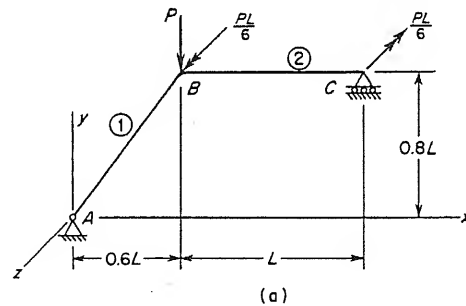


FIG. 3-12. Ej. 1: Desplazamientos en un marco plano

En cada uno de estos vectores el primer elemento representa la fuerza cortante en el nudo k , y el segundo elemento representa el momento flexionante. La matriz de cambio de acciones de extremo es

$$A_{ML} = \frac{P}{24} \{-9, 9L, 9, -4L\}$$

La carga unitaria correspondiente al desplazamiento D_1 es una fuerza en la dirección del eje x en el nudo C, según muestra la Fig. 3-12b. Esta carga unitaria produce acciones de extremo para los dos miembros como sigue:

$$A_{MU1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ L \end{bmatrix} \quad A_{MU2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De estos resultados la matriz de cambio A_{MU} puede ser escrita:

$$A_{MU} = \frac{1}{2} \{-1, L, 1, 0\}$$

El desplazamiento D_1 se puede encontrar por sustitución en la Ec. (3-5), y resolviendo:

$$D_1 = A'_{MU} F_M A_{ML} = \frac{PL^3}{12EI}$$

Así pues, el desplazamiento en el nudo C es en la dirección positiva del eje x .

Si la estructura de este ejemplo estuviese sujeta a varios sistemas de carga, la matriz A_{ML} se convertiría en una matriz rectangular con varias columnas. Además, si más de un desplazamiento se calculase, la matriz A_{MU} tendría una columna correspondiente a cada desplazamiento. La matriz D para los desplazamientos entonces tendría tantos renglones como desplazamientos por encontrar y tantas columnas como sistemas de carga. Por lo tanto, el ejemplo se puede extender sin ninguna dificultad para incluir en general estas posibilidades, como se ilustró en el Art. 3.4 para una viga.

Efectos de deformaciones por carga axial. El ejemplo anterior mostraba la técnica para calcular desplazamientos en un marco plano cuando únicamente se tomaban en cuenta consideraciones de flexión. La solución era muy similar a la de una viga, porque los términos de las matrices de flexibilidad para una viga y para un marco plano tienen la misma forma. Sin embargo, se dan casos, en el análisis de un marco plano, en que llega a ser necesario tomar en cuenta los efectos de deformaciones por carga axial. Estos efectos pueden ser tomados en cuenta en el análisis añadiendo términos adecuados en las matrices de flexibilidad de miembro e incluyendo las fuerzas axiales en las matrices de cambio de acciones de extremo. Específicamente, las acciones de extremo para un miembro típico i son la fuerza axial A_{M1} , la fuerza cortante A_{M2} , y el momento flexionante A_{M3} , mostradas en la Fig. 3-13. Estas tres acciones

de extremo siempre serán tomadas en el orden mencionado. La matriz de flexibilidad de miembro correspondiente es

$$F_{Mi} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (3-20)$$

como puede ser ahora deducida de las expresiones para las flexibilidades de miembro dadas previamente en las Ecs. (3-1) y (3-13).

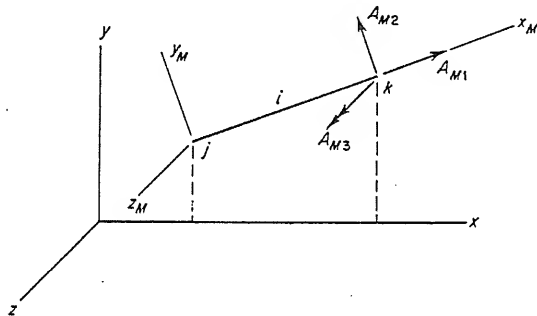


FIG. 3-13. Acciones de extremo para un miembro de un marco plano cuando las deformaciones por carga axial son tomadas en consideración

Debido a que hay tres acciones de extremo para cada miembro cuando los efectos por carga axial son incluidos en el análisis, los tamaños de las diversas matrices en las ecuaciones para los desplazamientos serán aumentados. La matriz F_M de las flexibilidades de miembro es ahora del orden de $3m \times 3m$, mientras que los tamaños de las matrices de cambio A_{MU} y A_{ML} (véanse las Ecs. 3-17 y 3-18) son de $3m \times n$ y $3m \times p$, respectivamente, en donde n es el número de desplazamiento de nudos y p es el número de sistemas de carga.

El siguiente ejemplo muestra el cálculo de desplazamientos en un marco plano cuando los efectos de deformaciones axial y por flexión son tomados en consideración.

EJEMPLO 2. El desplazamiento D_1 del nudo C del marco, descrito en el Ej. 1, será de nuevo calculado incluyendo los efectos de deformación por carga axial. La rigidez axial EA se supone es la misma para ambos miembros.

Las matrices de flexibilidad de miembro tienen ahora la forma mostrada por la Ec. (3-20) y son las siguientes:

$$F_{M1} = F_{M2} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 6L^2\psi & 0 & 0 \\ 0 & 2L^2 & 3L \\ 0 & 3L & 6 \end{bmatrix}$$

en donde

$$\psi = \frac{I}{AL^2}$$

La matriz F_M de flexibilidades de miembro (véase la Ec. 3-16) será del orden de 6×6 .

Los vectores de acciones de extremo son aumentados por la adición de fuerzas axiales en el miembro; por ejemplo, A_{ML1} y A_{MU1} se convierten en

$$A_{ML1} = \frac{P}{8} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 3L \end{bmatrix} \quad A_{MU1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ L \end{bmatrix}$$

El primer elemento de cada uno de estos vectores es la fuerza axial en el extremo k del miembro, mientras que los dos elementos restantes son la fuerza cortante y el momento flexionante, respectivamente, y son los mismos que los del Ej. 1. De una forma similar, los vectores A_{ML2} y A_{MU2} pueden ser obtenidos, y entonces las matrices de cambio están formadas:

$$A_{ML} = \frac{P}{24} \{-12, -9, 9L, 0, 9, -4L\}$$

$$A_{MU} = \frac{1}{2}\{2, -1, L, 2, 1, 0\}$$

Finalmente, el desplazamiento D_1 es calculado por producto de matrices:

$$D_1 = A'_{MU} F_M A_{ML} = \frac{PL^3}{12EI} (1 - 6\psi)$$

Nótese que esta expresión para D_1 se reduce al valor dado en el Ej. 1 si las deformaciones por carga axial son despreciadas (el resultado que se puede obtener haciendo que el área A tienda al infinito, y así ψ tienda a cero).

3.6. Desplazamiento de nudos en parrillas. El modelo general de los cálculos para encontrar desplazamiento de nudos en parrillas es el mismo que el descrito en los artículos anteriores para armaduras, vigas y estructuras planas. Sin embargo, las acciones de extremo para miembros de parrillas son diferentes de aquellas para los otros tipos de estructuras, y por lo tanto, la matriz de flexibilidad de miembro tiene forma diferente. Para identificar las acciones de extremo para una parrilla, considérese el miembro típico i mostrado en la Fig. 3-14. En la figura se muestran miembros orientados con los ejes, que tienen su origen en el extremo j del miembro. Se supone que la parrilla está en el plano xz , mientras que todas las

cargas concentradas que actúan en la parrilla tienen sus vectores paralelos al eje y ; todos los pares actuando como cargas en la parrilla tienen sus vectores en el plano x - z .

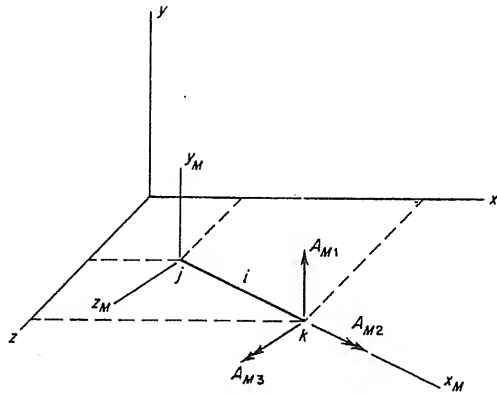


FIG. 3-14. Acciones de extremo para un miembro de una parrilla

Las acciones de extremo para un miembro de una parrilla son la fuerza cortante en la dirección de y_M , el par de torsión en el sentido de x_M y el momento flexionante en el sentido de z_M . Estas tres acciones de extremo están mostradas en la Fig. 3-14 como A_{M1} , A_{M2} y A_{M3} , respectivamente. Los elementos de la matriz de flexibilidad de miembro pueden ser interpretados como los desplazamientos de una pieza en voladizo debidos a los valores unitarios de las acciones de extremo, según se muestra en la Fig. 3-15. Así pues, la matriz de flexibilidad de miembro se convierte en

$$F_{Mi} = \begin{bmatrix} F_{M11} & F_{M12} & F_{M13} \\ F_{M21} & F_{M22} & F_{M23} \\ F_{M31} & F_{M32} & F_{M33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & 0 & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L}{GJ} & 0 \\ \frac{L^2}{2EI} & 0 & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

donde GJ representa la rigidez torsional del miembro. Cuando las flexibilidades de miembro son obtenidas para todas las partes de la parrilla, la matriz F_M puede ser construida como anteriormente se describió (véase la Ec. 3-16).

Las matrices de cambio A_{MU} y A_{ML} para una parrilla están formadas de submatrices que se valúan para cada miembro, según se muestra en las Ecs. (3-17) y (3-18). Cada submatriz es del orden 3×1 , ya que hay tres acciones de extremo por miembro.

Cuando las matrices de cambio han sido determinadas, así como también la matriz F_M de flexibilidades de miembro, los desplazamientos pueden ser calculados por una de las ecuaciones matriciales que han sido ya discutidas (véanse las Ecs. 3-5 y 3-8).

En algunas estructuras de parrilla los efectos de deformaciones torsionales no son importantes en la determinación del comportamiento de la estructura. Esta situación se presenta ya sea cuando los miembros de la parrilla son muy débiles para resistir la torsión

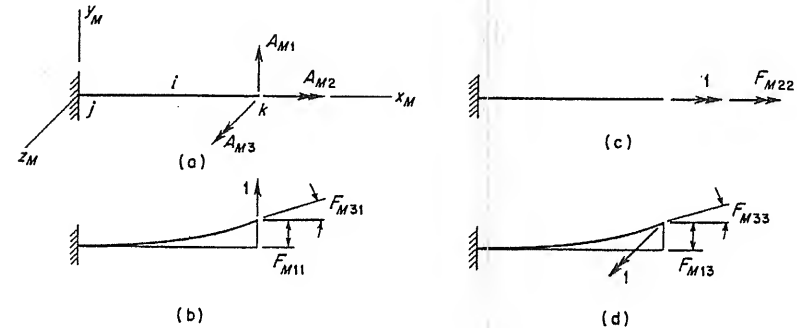


FIG. 3-15. Flexibilidades para un miembro de parrilla

o cuando sus nudos están contruidos de tal manera que los pares de torsión no se han desarrollado en los miembros. Un ejemplo del último tipo de estructura es una parrilla que consiste de varias vigas que se cruzan unas con otras, y que tiene una conexión entre las vigas que transmite una fuerza pero no un momento. La estructura libre para una parrilla de este tipo consiste de vigas únicamente.

En cualquiera de las situaciones arriba descritas, los efectos de torsión pueden ser omitidos del análisis. Por lo tanto, las únicas acciones de extremo para un miembro son la fuerza cortante en la dirección y_M y el momento flexionante en el sentido de z_M . Estas acciones de extremo son las mismas que para una viga (véase la Fig. 3-7) y, por lo tanto, en tal caso, la matriz de flexibilidad para un miembro de viga (Ec. 3-13) puede ser usada para un miembro de parrilla.

EJEMPLO. La estructura de una parrilla mostrada en la Fig. 3-16 consiste de dos miembros (AB y BC) normales entre sí contenidos en el plano x - z . Cada miembro tiene una longitud L , una rigidez a la flexión EI y una rigidez a la torsión GJ . Los extremos j y k de los dos miembros están localizados en A y B, y B y C, respectivamente. Las cargas en la parrilla consisten de pares y fuerzas que actúan en los nudos B y C. Supongamos que los desplazamientos del nudo C (Fig. 3-16b) van a ser encontrados.

Las matrices de flexibilidad de miembro, dadas por la Ec. (3-21), son

$$\mathbf{F}_{M1} = \mathbf{F}_{M2} = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 0 & 3L \\ 0 & 6\rho & 0 \\ 3L & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

en donde

$$\rho = \frac{EI}{GJ}$$

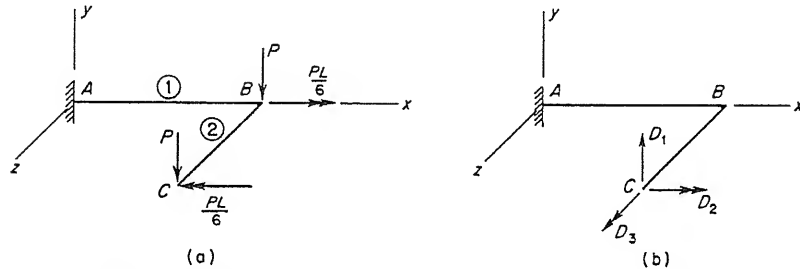


FIG. 3-16. Ejemplo: Desplazamientos en una parrilla

Las acciones de extremo causadas por las cargas son

$$\mathbf{A}_{ML1} = P \begin{bmatrix} -2 \\ L \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{ML2} = \frac{P}{6} \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ L \end{bmatrix}$$

de donde la matriz de cambio \mathbf{A}_{ML} es

$$\mathbf{A}_{ML} = \frac{P}{6} \{-12, 6L, 0, -6, 0, L\}$$

Los tres desplazamientos por ser calculados están mostrados en la Fig. 3-16b. Para obtener la matriz de cambio \mathbf{A}_{MU} , las cargas unitarias que corresponden a cada uno de estos desplazamientos debe suponerse que actúan sobre la estructura. Bajo la acción de la primer carga unitaria, las siguientes acciones de extremo son desarrolladas

$$\mathbf{A}_{MU11} = \begin{bmatrix} 1 \\ -L \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{MU21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

como se puede verificar por estática. Similarmente, las acciones de extremo debidas a las otras dos cargas unitarias se pueden obtener; entonces la matriz de cambio \mathbf{A}_{MU} está compuesta:

$$\mathbf{A}_{MU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

El último paso en el análisis es resolver para los desplazamientos por medio de la Ec. (3-8):

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}'_{MU} \mathbf{F}_M \mathbf{A}_{ML} = \frac{PL^2}{12EI} \begin{bmatrix} -L(11 + 12\rho) \\ 4(1 + 3\rho) \\ -12 \end{bmatrix}$$

3.7. Desplazamiento de nudo en marcos en el espacio. Un marco en el espacio es el tipo más generalizado de una estructura reticular, y un miembro típico puede tener cuando mucho seis acciones de extremo en cada nudo. Las seis posibles acciones de extremo en el nudo k de un miembro están identificadas en la Fig. 3-17, que muestra un miembro i orientado de una manera arbitraria en el espacio. La orientación de sus ejes es de tal forma que los planos x_M-y_M y x_M-z_M son planos principales de flexión. Las acciones de extremo están numeradas en el orden x , y y z , tomando las fuerzas antes de los pares.

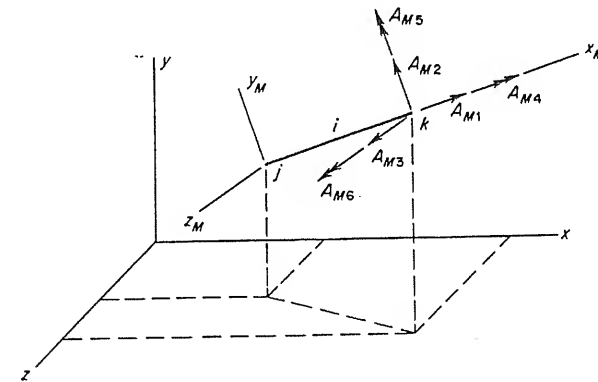


FIG. 3-17. Acciones de extremo para un miembro de un marco en el espacio

Los elementos de la matriz de flexibilidad de miembro están mostrados en la Fig. 3-18 como los desplazamientos de una pieza en voladizo debidos a los valores unitarios de las seis posibles acciones de extremo. Los diferentes desplazamientos indicados en la figura pueden ser rápidamente determinados para un miembro prismático y colocados en una matriz de flexibilidad de miembro de orden 6×6 como sigue:

$$F_{Mi} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2EI_z} \\ 0 & 0 & \frac{L^3}{3EI_y} & 0 & \frac{-L^2}{2EI_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-L^2}{2EI_y} & 0 & \frac{L}{EI_y} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EI_z} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{EI_z} \end{bmatrix} \quad (3-22)$$

En la matriz anterior los momentos de inercia de una sección transversal del miembro, con respecto a los ejes y_M y z_M , son llamados I_y e I_z , respectivamente.

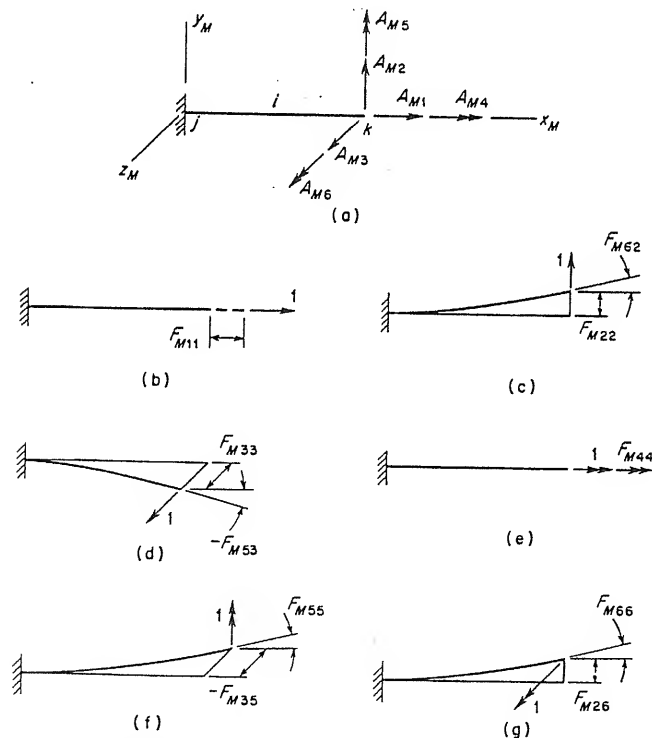


FIG. 3-18. Flexibilidades para un miembro de un marco en el espacio

Las matrices de cambio A_{ML} y A_{MU} , en el análisis de un marco en el espacio, están constituidas de submatrices del orden de 6×1 , ya que hay seis acciones de extremo para cada miembro. Así pues, los tamaños de las matrices que aparecen en la ecuación para los desplazamientos (Ec. 3-8) son como sigue: D que es del orden de $n \times p$ (véase la Ec. 3-10); A_{MU} que es del orden de $6m \times n$ (véase la Ec. 3-17); F_M que es del orden de $6m \times 6m$ (véase la Ec. 3-16); y A_{ML} que es del orden $6m \times p$ (véase la Ec. 3-18).

En general, la determinación de las acciones de extremo en las matrices de cambio para un marco en el espacio será más complicada que para una estructura plana, principalmente debido a la necesidad de tratar con direcciones arbitrarias en el espacio. Un acercamiento sistemático para el manejo de los aspectos tridimensionales del análisis puede desarrollarse utilizando técnicas que involucren giro de ejes, como se describe en el Cap. 4 para el método de la rigidez.

3.8. Ecuaciones del método de la flexibilidad. Los artículos anteriores trataron de determinar, por métodos matriciales, los desplazamientos en estructuras en marco estáticamente determinadas, porque la determinación de desplazamientos en la estructura libre es una parte importante del método de la flexibilidad. En este artículo las ecuaciones básicas de este método se revisan para mostrar cómo los términos de desplazamiento en esas ecuaciones pueden ser expresados en forma matricial. El resultado da un método muy sistemático para analizar estructuras estáticamente indeterminadas.

Cuando una estructura va a ser analizada únicamente por los efectos de cargas, las ecuaciones del método de la flexibilidad son (véanse las Ecs. 2-8, 2-15, 2-16 y 2-14):

$$D_Q = D_{QL} + FQ \quad \text{o} \quad Q = F^{-1}(D_Q - D_{QL}) \quad (3-23a)$$

$$A_M = A_{ML} + A_{MQ}Q \quad (3-23b)$$

$$A_R = A_{RL} + A_{RQ}Q \quad (3-23c)$$

$$D_J = D_{JL} + D_{JQ}Q \quad (3-23d)$$

Se asume en este capítulo que antes de usar las ecuaciones anteriores, las cargas reales en la estructura se reemplazan por cargas de nudo combinadas. Por lo tanto, todas las cantidades que aparecen en las Ecs. (3-23) se supone que de aquí en adelante se referirán a la estructura con cargas combinadas, y estas cantidades no son necesariamente las mismas que las cantidades correspondientes para la estructura con las cargas reales. En particular, las acciones de

extremo A_M encontradas para la estructura con cargas combinadas deben ser añadidas a las correspondientes acciones de extremo en la estructura fija para obtener las acciones de extremo debidas a las cargas reales (véase el Art. 3.2). Expresada en términos simbólicos, esta relación se convierte en

$$(A_M)_A = A_M + (A_M)_R \quad (3-24)$$

en la que las matrices $(A_M)_A$ y $(A_M)_R$ representan las acciones de extremo en la estructura real y en la estructura fija, respectivamente. El uso de la Ec. (3-24) será ilustrado más adelante por medio de ejemplos.

Las reacciones A_R y los desplazamientos de los nudos D_J son las mismas tanto para las cargas reales como para las cargas combinadas, como se explicó en el Art. 3.2. Por lo tanto, las matrices, A_R y D_J , como fueron calculadas de las Ecs. (3-23c) y (3-23d), se aplican sin ninguna modificación en la estructura con las cargas reales.

El que las redundantes Q que se obtienen de la Ec. (3-23a) sean o no válidas para las cargas reales en la estructura, depende de la naturaleza misma de las redundantes. Una redundante que es una reacción para la estructura será válida, en tanto que una redundante que es una acción de extremo de miembro debe tratarse de la misma forma que las acciones de extremo A_M (véase la Ec. 3-24).

Regresando ahora a las Ecs. (3-23), consideremos cómo las diferentes matrices en esas ecuaciones pueden ser calculadas con la ayuda de las ecuaciones de desplazamiento discutidas en los Arts. 3.3 al 3.7. El vector D_{QL} , en la Ec. (3-23a), representa los desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las acciones redundantes Q y debidos por las cargas de nudo combinadas, y pueden ser calculados por medio de la ecuación matricial (3-8). La Ec. (3-8) puede ser usada para cualquier tipo de estructura reticular, como anteriormente se mostró, siempre y cuando las matrices de flexibilidad y de cambio (F_M , A_{MU} , A_{ML}) tengan la forma correcta. La matriz F_M puede ser obtenida sin ninguna dificultad; todo lo que se requiere es colocar las matrices de flexibilidad de miembro a lo largo de la diagonal principal de F_M (véanse las Ecs. 3-4 y 3-16).

La matriz de cambio A_{MU} , que aparece en la Ec. (3-8), representa (en general) las acciones de extremo de miembro debidas a las cargas unitarias correspondientes a los desplazamientos deseados. En el caso de los desplazamientos D_{QL} , las cargas unitarias son valores unitarios de las redundantes Q . Así pues, la matriz A_{MU}

es la misma que la matriz A_{MQ} (véase la Ec. 3-23b), que está formada de las acciones de extremo de miembro en la estructura libre debidas a los valores unitarios de las redundantes. [Al usar la Ec. (3-23b), se supone que la matriz A_M está formada por las acciones de extremo en los nudos k de todos los miembros; así pues, la matriz A_{MQ} también incluye todos los miembros de la estructura.]

La matriz de cambio A_{ML} que aparece en la Ec. (3-8) representa (en general) las acciones de extremo de miembro debidas a las cargas que causan los desplazamientos. Así pues, en el caso de los desplazamientos D_{QL} , la matriz A_{ML} está formada por las acciones de extremo de miembro en la estructura libre debidas a las cargas combinadas. Esta definición para la matriz A_{ML} es enteramente congruente con el significado de la matriz A_{ML} que aparece en la Ec. (3-23b). Entonces, el vector D_{QL} puede ser expresado:

$$D_{QL} = A'_{MQ} F_M A_{ML} \quad (3-25)$$

La Ec. (3-25) proporciona un método formal para calcular los desplazamientos D_{QL} . Para usar la ecuación debemos obtener primero las matrices de cambio de acciones de extremo (A_{MQ} y A_{ML}) y la matriz F_M . La determinación de las matrices de cambio requiere que la estructura libre sea analizada por estática para valores unitarios de las redundantes y también para las cargas de nudo combinadas.

En seguida considérese el cálculo de la matriz de flexibilidad F para la estructura. Esta matriz está formada por desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las redundantes y causados por valores unitarios de las redundantes, y también pueden ser determinados a partir de la Ec. (3-8). La matriz de cambio A_{MU} en la Ec. (3-8) se convierte en la matriz A_{MQ} , ya que las cargas unitarias son valores unitarios de las redundantes. Además, la matriz A_{ML} , en la Ec. (3-8), es la misma, porque las cargas que causan los desplazamientos son también valores unitarios de las redundantes. Así, la expresión para F , que también puede ser denominada D_{QQ} , es

$$F = D_{QQ} = A'_{MQ} F_M A_{MQ} \quad (3-26)$$

La matriz de flexibilidad F es una propiedad de toda la estructura libre y depende del arreglo de los miembros de la misma, en tanto que la matriz F_M de flexibilidades de miembro depende únicamente de las propiedades de los miembros aislados, sin tomar en consideración cómo están unidos en la estructura. Por este motivo, la matriz F_M es, en algunas ocasiones, llamada la matriz de flexibilidad de la *estructura desunida*, en tanto que F es llamada la

matriz de flexibilidad de la *estructura unida*. El uso de las Ecs. (3-25) y (3-26) hace posible encontrar las matrices D_{QL} y F en una forma correcta. Como el vector D_Q se conoce por las condiciones dadas de la estructura, se pueden obtener las redundantes Q resolviendo la Ec. (3-23a).

Después de determinar el vector Q de redundantes, el siguiente paso en el análisis es calcular las acciones de extremo de miembro A_M de la Ec. (3-23b). Se puede seguir este paso sin ninguna dificultad, porque las matrices de cambio A_{ML} y A_{MQ} ya han sido determinadas por medio de las Ecs. (3-25) y (3-26).

Para encontrar las reacciones A_R de la Ec. (3-23c) se requiere determinar las matrices de cambio A_{RL} y A_{RQ} . Estas matrices representan las reacciones en la estructura libre debidas a las cargas combinadas y a los valores unitarios de las redundantes, respectivamente. Ambas matrices se determinan por análisis estático de la estructura libre.

Finalmente, considérense las matrices que aparecen en la ecuación para los desplazamientos de nudo (véase la Ec. 3-23d). Las matrices D_{JL} y D_{JQ} representan desplazamientos en la estructura libre y pueden ser calculadas por operaciones matriciales. Para este fin es necesario introducir otra matriz de cambio, denominada A_{MJ} , formada por acciones de extremo de miembro debidas a las cargas unitarias que corresponden a los desplazamientos deseados de nudo D_J . La primera columna de A_{MJ} contiene las acciones de extremo de miembro debidas a una carga unitaria correspondiente a D_{J1} , la segunda columna contiene acciones de extremo debidas a una carga unitaria correspondiente a D_{J2} , etc. Al usar la Ec. (3-8) para calcular a D_{JL} , la matriz A_{MJ} se convierte en A_{MJ} y la matriz A_{ML} permanece inalterada. Así, la ecuación para D_{JL} es

$$D_{JL} = A'_{MJ} F_M A_{ML} \quad (3-27)$$

En una forma similar, la matriz D_{JQ} puede determinarse por medio de la Ec. (3-8), como sigue:

$$D_{JQ} = A'_{MJ} F_M A_{MQ} \quad (3-28)$$

En estas ecuaciones, las matrices D_{JL} y D_{JQ} son del orden de $j \times 1$ y $j \times q$, respectivamente.

Cuando las dos ecuaciones anteriores se sustituyen en la Ec. (3-23d), la ecuación para D_J se convierte en

$$D_J = D_{JL} + D_{JQ} = A'_{MJ} F_M (A_{ML} + A_{MQ} Q)$$

El término entre paréntesis representa al vector A_M de acciones de

extremo de miembro (véase la Ec. 3-23b) y, por lo tanto, otra expresión para el vector desplazamiento de nudo es

$$D_J = A'_{MJ} F_M A_M \quad (3-29)$$

Tanto la Ec. (3-23d) como la Ec. (3-29) pueden usarse para encontrar los desplazamientos de nudo. La última ecuación es más sencilla de usarse, siempre y cuando las acciones de extremo A_M hayan sido determinadas previamente.

Las matrices de cambio que aparecen en las Ecs. (3-23) a (3-29) están resumidas en la Tabla 3-1. Las primeras tres matrices (A_{ML} , A_{MQ} , A_{MJ}) están formadas por acciones de extremo de miembro en la estructura libre debidas a varias causas, y las últimas dos matrices (A_{RL} y A_{RQ}) están formadas por reacciones en la estructura libre debidas a las cargas combinadas y a valores unitarios de las redundantes.

TABLA 3-1. MATRICES DE CAMBIO PARA EL METODO DE LA FLEXIBILIDAD

Matriz	Orden	Definición
A_{ML}	$m \times 1$	Acciones de extremo de miembro en la estructura libre debidas a las cargas combinadas (m = número de miembros)
A_{MQ}	$m \times q$	Acciones de extremo de miembro en la estructura libre debidas a los valores unitarios de los redundantes (q = número de redundantes)
A_{MJ}	$m \times j$	Acciones de extremo de miembro en la estructura libre debidas a cargas unitarias correspondientes a los desplazamientos del nudo (j = número de desplazamientos de nudo por encontrar)
A_{RL}	$r \times 1$	Reacciones en la estructura libre debidas a las cargas combinadas (r = número de reacciones por encontrar)
A_{RQ}	$r \times q$	Reacciones en la estructura libre debidas a los valores unitarios de las redundantes

NOTA: Los tamaños de las matrices de cambio A_{ML} , A_{MQ} y A_{MJ} dadas arriba son para una armadura plana o en el espacio, teniendo ambas una acción de extremo por miembro. En el caso de una viga, el número m debe ser reemplazado por $2m$; para un marco plano y una parrilla, el número se convierte ya sea en $2m$ o en $3m$, dependiendo sobre el número de acciones de extremo que son consideradas; y, para un marco en el espacio, el número es $6m$.

El procedimiento a seguir en el análisis de una estructura por el método de la flexibilidad puede ser ahora resumido. El proceso que sigue es análogo al presentado en el Art. 2.7, excepto que ha sido modificado para tomar en consideración el uso de matrices de cambio. Los pasos que se deben seguir son:

1. Reemplazar las cargas reales en la estructura por cargas combinadas (véase el Art. 3.2).
2. Seleccionar las redundantes Q .
3. Obtener el vector D_Q si hay desplazamientos de soporte correspondientes a uno o más de las redundantes; de lo contrario, D_Q es nula.
4. Obtener las matrices de flexibilidad y construir la matriz F_M .
5. Analizar la estructura libre por equilibrio estático para obtener las matrices de cambio A_{ML} , A_{MQ} , A_{MJ} , A_{RL} y A_{RQ} (véase la Tabla 3-1).
6. Calcular el vector D_{QL} y la matriz F por medio de las Ecs. (3-25) y (3-26).
7. Resolver para el vector Q de redundantes a partir de la Ec. (3-23a).
8. Resolver para el vector A_M de acciones de extremo de miembro a partir de la Ec. (3-23b).
9. Resolver para el vector A_R de reacciones de la Ec. (3-23c).
10. Resolver para el vector D_J de desplazamientos de nudo a partir de la Ec. (3-29). [Alternativamente, el vector D_J puede obtenerse utilizando las Ecs. (3-27), (3-28) y (3-23d)].
11. Calcular las acciones de extremo de miembro debidas a las cargas reales en la estructura por medio de la Ec. (3-24).

Los pasos anteriores pueden dividirse en dos fases principales. La primera consiste en "formar" los cálculos e incluye la determinación de las matrices de cambio y flexibilidades de miembro (pasos del 1 al 5). Estos pasos normalmente deben ser ejecutados por el analista estructural. La segunda fase (pasos del 6 al 11) involucra cálculos matriciales basados en las ecuaciones dadas en este artículo. Esta fase prosigue en una forma sistemática y puede ser ejecutada automáticamente.

Los ejemplos del método de la flexibilidad que ilustran los pasos anteriores están dados en el siguiente artículo. En cada caso se supone que la estructura está sujeta a un solo sistema de

carga. Sin embargo, múltiples sistemas de carga pueden manejarse fácilmente mediante columnas adicionales en las matrices de cambio A_{MT} y A_{RL} (véase la Tabla 3-1). Por supuesto, tendría que añadirse un número correspondiente de columnas a las matrices Q , A_M , A_R , D_{JL} y D_J .

3.9. Ejemplos. Los ejemplos dados en este artículo ilustran el análisis de varios tipos diferentes de estructuras por el método de la flexibilidad. Las soluciones se obtienen siguiendo el procedimiento descrito en el artículo anterior (véanse los pasos del 1 al 11) y únicamente los efectos de carga en la estructura están considerados. Otros efectos se describen en el siguiente artículo (Art. 3.10).

EJEMPLO 1. El primer ejemplo se refiere al análisis de la armadura estáticamente indeterminada mostrada en la Fig. 3-19. La armadura tiene seis miembros, numerados según muestra la figura, y se supone que todos los miembros tienen la misma rigidez axial EA . Hay dos cargas actuando en el nudo A de la armadura, y los apoyos B , C y D están restringidos. (La misma armadura se resolvió previamente en el Ej. 3 del Art. 2.3.)

En este problema todas las cargas sobre la armadura actúan en los nudos; así pues, no hay necesidad de reemplazar cargas de miembros por cargas equivalentes en los nudos. Sin embargo, si existen cargas de miembros la determinación de cargas equivalentes en los nudos es bastante sencilla. Pueden encontrarse a partir de las fórmulas para acciones de extremo para miembros articulados de armaduras, las cuales están dadas en la Tabla B-5 del Apéndice B. Las cargas equivalentes están únicamente en la forma de fuerzas, porque no hay momentos flexionantes producidos en los extremos de un miembro de la armadura.

Las acciones redundantes Q_1 y Q_2 para la armadura están seleccionadas como la reacción horizontal en el apoyo B y la fuerza axial en la barra AD , respectivamente. Se presume que la primera de estas redundantes es positiva cuando tiene la dirección positiva del eje x , y la segunda es positiva cuando el miembro trabaja a tensión.

Además, para encontrar las redundantes, se supone, en este ejemplo, que todas las acciones de extremo de los miembros, reacciones y desplazamientos de los nudos se deberán determinar. Las acciones de extremo de los miembros son fuerzas axiales en los nudos k de todos los miembros, según se muestra en la Fig. 3-2 para un miembro típico. Mientras que las acciones de extremo de los miembros deben en general ser tomadas a un nudo k , designado para cada miembro, se podrá ver que, en el caso de una armadura con cargas únicamente en sus nudos, las acciones de extremo son las mismas para ambos nudos. Por eso, en este ejemplo no es necesario designar específicamente el nudo de cada miembro al cual se le determinarán sus acciones de extremo; en lugar de ello, cualquier nudo puede ser usado.

La armadura tiene cuatro reacciones por determinar; las reacciones en los nudos C y D se denominan A_{R1} , A_{R2} y A'_{R3} (véase la Fig. 3-19a), mientras que la reacción restante es la redundante Q_1 . También, los cuatro desplazamientos de nudo desconocidos (llamados D_{J1} , ..., D_{J4}) están mostrados en la Fig. 3-19b. Se supone que las reacciones y los desplazamientos de los nudos son positivos cuando son en la dirección de los ejes x y y .

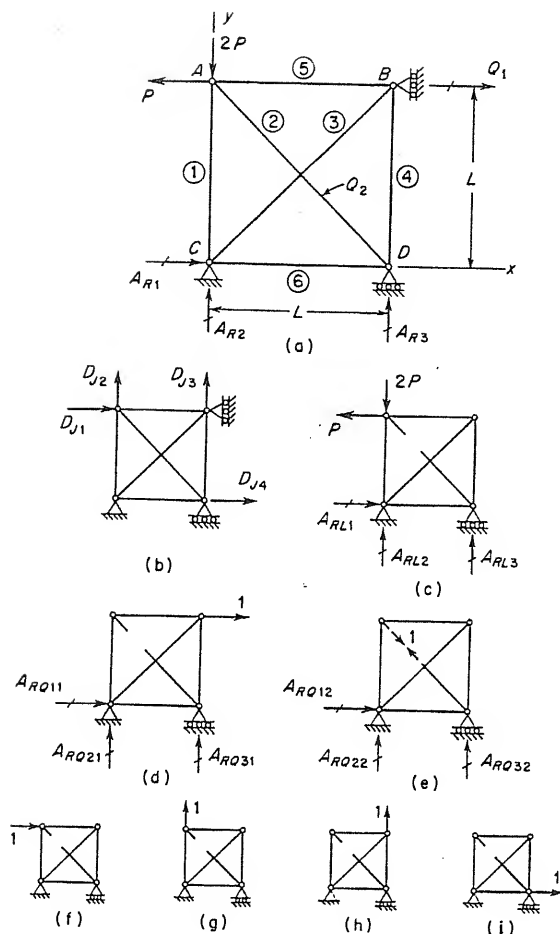


FIG. 3-19. Ej. 1: Armadura plana

El siguiente paso en la solución es determinar el vector D_Q de los desplazamientos reales correspondientes a las redundantes. Sin embargo, el vector D_Q en este ejemplo es nulo porque se supone que no hay desplazamiento del apoyo B en la dirección del eje x.

Las flexibilidades de miembro individuales (véase la Ec. 3-1) se usan para formar la matriz F_M , la que es como sigue (véase la Ec. 3-4):

$$F_M = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.414 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La determinación de las matrices de cambio enumeradas en la Tabla 3-1 es el siguiente paso. Todas las matrices de cambio son encontradas por análisis de equilibrio estático de la estructura libre. Principiando con los efectos de las cargas, se puede ver que la estructura libre, mostrada en la Fig. 3-19c, debe ser analizada por estática para obtener las matrices de cambio A_{ML} y A_{RL} . Estas dos matrices consisten de 6 acciones de extremo de miembro y tres reacciones, respectivamente, como sigue:

$$A_{ML} = P\{-2, 0, -1.414, 1, 1, 0\}$$

$$A_{RL} = P\{1, 3, -1\}$$

Los efectos de los valores unitarios de las dos redundantes que actúan en la estructura libre deben ser calculados para obtener las matrices de cambio A_{MQ} y A_{RQ} . Un valor de Q_1 igual a la unidad se muestra actuando en la estructura libre en la Fig. 3-19d, y las acciones de extremo de miembro resultantes constituyen las primeras columnas de las matrices A_{MQ} y A_{RQ} , respectivamente. Del mismo modo, la estructura libre cargada por un valor unitario de Q_2 está mostrada en la Fig. 3-19e, y las acciones de extremo y reacciones resultantes constituyen las segundas columnas de A_{MQ} y A_{RQ} ; por lo tanto:

$$A_{MQ} = \begin{bmatrix} 0 & -.707 \\ 0 & 1 \\ 1.414 & 1 \\ -1 & -.707 \\ 0 & -.707 \\ 0 & -.707 \end{bmatrix} \quad A_{RQ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La última matriz de cambios por calcularse es A_{MJ} , la matriz de acciones de extremo debidas a las cargas unitarias correspondientes a los desplazamientos de los nudos D_J . Una carga unitaria correspondiente a D_{J1} está mostrada en la Fig. 3-19f, y las acciones de extremo resultantes aparecen en la primera columna de la matriz A_{MJ} que se da abajo. Las cargas unitarias correspondientes a D_{J2} , D_{J3} y D_{J4} están mostradas en las Figs. 3-19g, 3-19h y 3-19i y las acciones de extremo resultantes están dadas en las últimas tres columnas de A_{MJ} . Por lo tanto,

$$A_{MJ} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.414 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Habiendo encontrado la matriz F_M y las cinco matrices de cambio, el resto de la solución puede efectuarse usando únicamente operaciones matriciales rutinarias. Las Ecs. (3-25) y (3-26) dan las matrices D_{QL} y F :

$$D_{QL} = A'_{MQ} F_M A_{ML} = \frac{PL}{EA} \begin{bmatrix} -3.828 \\ -2.000 \end{bmatrix}$$

$$F = A'_{MQ} F_M A_{MQ} = \frac{L}{EA} \begin{bmatrix} 3.828 & 2.707 \\ 2.707 & 4.828 \end{bmatrix}$$

A continuación se obtienen las redundantes Q resolviendo la Ec. (3-23a):

$$Q = F^{-1}(D_Q - D_{QL}) = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0.4328 & -0.2426 \\ -0.2426 & 0.3431 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.828 \\ 2.000 \end{bmatrix} \frac{PL}{EA} = P \begin{bmatrix} 1.172 \\ -0.243 \end{bmatrix}$$

Estos resultados para las redundantes están de acuerdo con los antes encontrados en el Ej. 3 del Art. 2.3. Los siguientes pasos en la solución consisten en determinar las acciones de extremo de miembro y las reacciones de las Ecs. (3-23b) y (3-23c), respectivamente. Estas ecuaciones dan los resultados siguientes:

$$A_M = A_{ML} + A_{MQ}Q = P\{-1.828, -0.243, 0, 0, 1.172, 0.172\}$$

$$A_R = A_{RL} + A_{RQ}Q = P\{-0.172, 1.828, 0.172\}$$

Finalmente, el vector de los desplazamientos de nudo D_J se calcula por medio de la Ec. (3-29):

$$D_J = A'_{MJ} F_M A_M = \frac{PL}{EA} \{-1.172, -1.828, 0, 0.172\}$$

Por lo tanto, el análisis completo de la armadura se ha logrado, incluyendo la determinación de todas las acciones de extremo, reacciones y desplazamientos de los nudos.

EJEMPLO 2. La viga continua de dos claros mostrada en la Fig. 3-20a está sujeta a una carga uniforme w (igual a $4P/L$) en el claro AB y dos fuerzas concentradas P en el claro BC. Ambas partes tienen la misma longitud L , pero la rigidez a la flexión del AB es la doble que la de BC. El objeto del análisis es determinar las acciones de extremo, reacciones y los desplazamientos de los nudos para la viga.

Los miembros AB y BC están denominados como miembros 1 y 2, respectivamente, y los nudos k de los miembros están tomados, también respectivamente, como nudos B y C. Por lo tanto, las cuatro acciones de extremo utilizadas en el análisis son las fuerzas cortantes y momentos flexionantes al lado derecho de los nudos de los miembros. Estas acciones de extremo serán numeradas del 1 al 4 y sus direcciones positivas están de acuerdo con los ejes mostrados en la figura (véase la Fig. 3-7 para la convención de signos para las acciones de extremo).

Las acciones redundantes seleccionadas, son el momento reactivo en A y el momento flexionante en B (véase la Fig. 3-20b). Debido a que hay un par aplicado como carga en el nudo B cuando las cargas reales son reemplazadas por cargas combinadas en los nudos, se evitará la ambigüedad si Q_2 es tomado a una distancia pequeña a un lado del mismo nudo. Por eso, se asume en este ejemplo que Q_2 es el momento flexionante a la derecha del nudo B. La estructura libre que resulta de la selección de estas redundantes está mostrada en la Fig. 3-20b. Nótese que se supone que ambas redundantes son positivas cuando causan compresión en la parte superior de la viga.

Las fuerzas reactivas en la dirección y en los apoyos, así como los dos desplazamientos de nudo (giros en B y C), están identificadas en la Fig. 3-20c. Una cuarta acción reactiva es un par en el apoyo A, pero como esta reacción se escogió como una de las redundantes no es necesario incluirla en el vector A_R .

La determinación de las cargas combinadas en los nudos, se indica en la Fig. 3-20d, que muestra las dos vigas empotradas obtenidas por restricción de los nudos contra los desplazamientos. Los valores negativos de las acciones de empotramiento para estas vigas constituyen las cargas equivalentes en los nudos. Entonces, las cargas equivalentes se suman a cualquier carga real

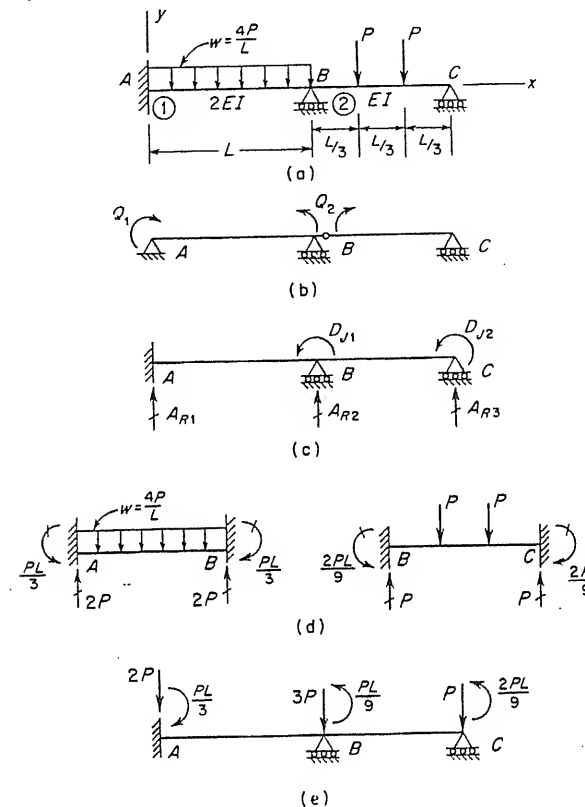


FIG. 3-20. Ej. 2: Viga continua

(ninguna en este ejemplo) para obtener las cargas combinadas en los nudos, los cuales están mostrados en la Fig. 3-20e.

Las matrices de flexibilidad para los miembros individuales pueden ser rápidamente encontradas (véase la Ec. 3-13):

$$F_{M2} = 2F_{M1} = \frac{L}{12EI} \begin{bmatrix} 4L^2 & 6L \\ 6L & 12 \end{bmatrix}$$

y, así pues, la matriz F_M es

$$F_M = \frac{L}{12EI} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L & 0 & 0 \\ 3L & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4L^2 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 12 \end{bmatrix}$$

dada por la Ec. (3-16).

Considérense ahora los cálculos de las varias matrices de cambio para la estructura libre. Las matrices A_{ML} y A_{RL} , que consisten de acciones de extremo y reacciones debidas a las cargas combinadas en los nudos, son encontradas por análisis de equilibrio estático de la estructura libre mostrada en la Fig. 3-21a. El vector A_{ML} está compuesto de cuatro reacciones de extremo para los miembros, como sigue:

$$A_{ML} = \frac{P}{9} \{2, L, -2, 2L\}$$

y el vector A_{RL} consiste de las reacciones:

$$A_{RL} = \frac{P}{9} \{16, 31, 7\}$$

Las matrices de cambio A_{MQ} y A_{RQ} representan las acciones de extremo y las reacciones en los apoyos debidas a los valores unitarios de las redundantes. Por lo tanto, la primera columna de cada una de estas matrices se encuentra a partir de un análisis de equilibrio de la estructura libre mostrada en la Fig.

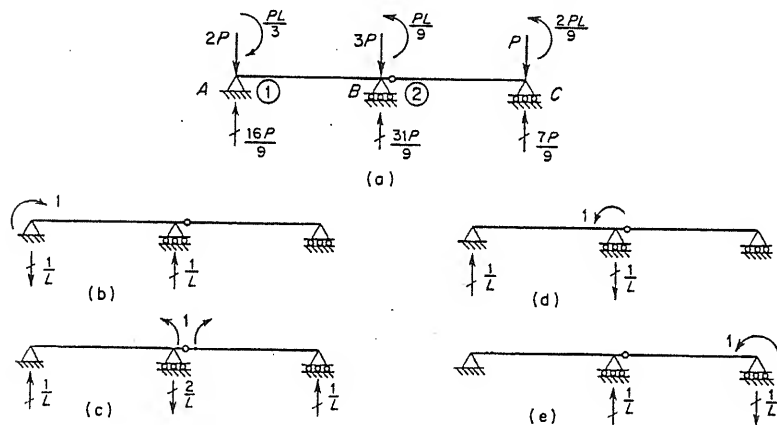


FIG. 3-21. Ej. 2 (continúa): Viga continua

3-21b, mientras que la segunda columna se obtiene de una manera similar a la de la Fig. 3-21c. Así pues, estas matrices son

$$A_{MQ} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & L \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{RQ} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de cambio A_{MJ} consiste de acciones de extremo de miembro debidas a las cargas unitarias correspondientes a los desplazamientos D_{J1} y D_{J2} . Por lo que las columnas primera y segunda de A_{MJ} se encuentran del análisis de las vigas dibujadas en las Figs. 3-21d y 3-21e, respectivamente. La matriz es

$$A_{MJ} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ L & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

Después de haber sido establecidas las matrices de cambio y la matriz de flexibilidad F_M , los cálculos restantes se efectúan de un modo rutinario. Por lo tanto, al seguir los pasos del 6 al 10 del Art. 3.8, uno obtiene:

$$D_{QL} = A'_{MQ} F_M A_{ML} = \frac{PL^2}{108EI} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$F = A'_{MQ} F_M A_{MQ} = \frac{L}{12EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{12EI}{11L} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = F^{-1}(D_Q - D_{QL}) = -\frac{PL}{9} \{3, 1\}$$

$$A_M = A_{ML} + A_{MQ}Q = \frac{P}{9} \{0, 0, -3, 2L\}$$

$$A_R = A_{RL} + A_{RQ}Q = \frac{P}{3} \{6, 10, 2\}$$

$$D_J = A'_{MJ} F_M A_M = \frac{PL^2}{18EI} \{0, 1\}$$

Todos los resultados anteriores pertenecen a la viga con cargas combinadas en sus nudos (Fig. 3-20e). Además, los vectores A_R y D_J también son válidos para la viga con las cargas reales (Fig. 3-20a). Para obtener las acciones de extremo de miembro debidas a las cargas reales, se usa la Ec. (3-24). Los cálculos son como sigue:

$$(A_M)_R = \frac{P}{9} \{18, -3L, 9, -2L\}$$

$$(A_M)_A = A_M + (A_M)_R = \frac{P}{9} \{18, -3L, 6, 0\}$$

La redundante Q_1 , que es una reacción, es válida para la viga de la Fig. 3-20a. Sin embargo, esta conclusión no es verdadera para la segunda redundante, debido a que Q_2 es un momento flexionante interno. Si desea obtener el valor de Q_2 para las cargas reales, se hace necesario hacer un cálculo análogo al hecho para las acciones de extremo, por lo tanto,

$$(Q_2)_A = Q_2 + (Q_2)_R = -\frac{PL}{9} - \frac{2PL}{9} = -\frac{PL}{3}$$

El signo negativo de este resultado muestra que hay tensión en la parte superior de la viga en el nudo B.

EjemPlo 3. La estructura plana mostrada en la Fig. 3-22a tiene un claro de longitud L , una altura H igual a $L/2$ y un valor constante de EI

para todos los miembros, y está sujeto a dos cargas concentradas. Los números de los miembros están indicados en la figura. Se considerarán en el análisis únicamente los efectos de flexión y será escogida la reacción en el apoyo D en la dirección del eje x como la acción redundante.

Los nudos j y k de los tres miembros son seleccionados arbitrariamente como sigue: para el miembro 1, los nudos j y k están en A y B , respectivamente; para el miembro 2, en los nudos B y C , respectivamente; y para el miembro 3, en los nudos D y C , respectivamente. De acuerdo con esta selección, las acciones de extremo de miembro son las fuerzas cortantes y los momentos flexionantes mostrados en la Fig. 3-22b.

Los desplazamientos de los nudos para la estructura están mostrados también en la Fig. 3-22b. Estos son los giros en el nudo A , la translación y giro en B , el giro en C y el giro en D . Debido a que las deformaciones axiales son despreciadas en este ejemplo, sólo hay una translación independiente del nudo (D_{j2}). Las reacciones para la estructura también están identificadas en la Fig. 3-22b; sólo se necesita considerar tres reacciones, ya que la cuarta reacción es la redundante Q .

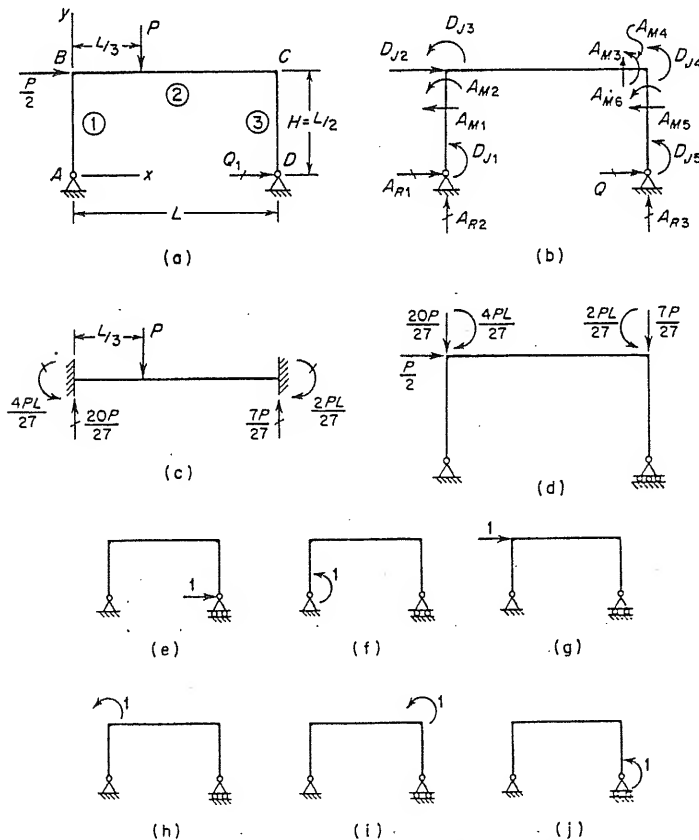


FIG. 3-22. Ej. 3: Estructura plana (únicamente efectos de flexión)

Si no se desean todas las reacciones y desplazamientos de los nudos mostrados en la Fig. 3-22b, algunos de ellos pueden ser omitidos del análisis. Sin embargo, todas las acciones de extremo de miembro deberán ser incluidas, ya que se requieren en las fases intermedias del análisis.

Las cargas equivalentes en los nudos se encuentran restringiendo todos los nudos de la estructura, calculando las acciones de empotramiento causadas por las cargas de los miembros, y luego invirtiendo sus direcciones. En este ejemplo, la única carga de miembro es la fuerza P actuando en el miembro BC ; por lo tanto, cuando los nudos B y C están restringidos, las acciones de empotramiento son aquellas mostradas en la Fig. 3-22c. Las acciones negativas de estos empotramientos se suman a las cargas reales de nudo para dar las cargas combinadas mostradas en la Fig. 3-22d.

Las matrices de flexibilidad de miembro son obtenidas aplicando la Ec. (3-13) a cada miembro de la estructura:

$$F_{M1} = F_{M3} = \begin{bmatrix} \frac{H^3}{3EI} & \frac{H^2}{2EI} \\ \frac{H^2}{2EI} & \frac{H}{EI} \end{bmatrix} \quad F_{M2} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad F_M se compone colocando las matrices anteriores en la diagonal principal (véase la Ec. 3-16). Como $H = L/2$, esta matriz se convierte en

$$F_M = \frac{L}{24EI} \begin{bmatrix} L^2 & 3L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3L & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8L^2 & 12L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12L & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L^2 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3L & 12 \end{bmatrix}$$

Las matrices de cambio A_{ML} y A_{RL} pueden ser obtenidas por análisis estático de la estructura libre sujeta a cargas combinadas en sus nudos (véase la Fig. 3-22d). La primera de estas matrices consiste de seis acciones de extremo de miembro, mientras que la segunda consiste de tres reacciones. Por lo tanto, estos vectores son como sigue:

$$A_{ML} = \frac{P}{108} \{-54, 27L, 35, 8L, 0, 0\}$$

$$A_{RL} = \frac{P}{12} \{-6, 5, 7\}$$

El cálculo de las matrices de cambio A_{MQ} y A_{RQ} requiere que la estructura libre sea analizada para un valor unitario de la redundante Q (véase la Fig. 3-22e). Las acciones de extremo de miembro y reacciones causadas por este valor unitario de la carga también se pueden determinar por estática, dando así los siguientes vectores:

$$A_{MQ} = \frac{1}{2} \{-2, L, 0, L, 2, -L\}$$

$$A_{RQ} = \{-1, 0, 0\}$$

La matriz de cambio A_{MJ} está compuesta de acciones de extremo debidas a cargas unitarias correspondientes a los desplazamientos de nudo D_j . Como

se deben obtener cinco desplazamientos, deben haber cinco cargas unitarias, como muestran las Figs. 3-22f a 3-22j. De cada una de estas cargas resulta una serie de seis acciones de extremo de miembro que constituyen la correspondiente columna de A_{MJ} ; por lo tanto:

$$A_{MJ} = \frac{1}{2L} \begin{bmatrix} 0 & -2L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2L & L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & L & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 2L & 2L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2L & 0 \end{bmatrix}$$

En seguida se obtienen las cantidades D_{QL} y F de las Ecs. (3-25) y (3-26):

$$D_{QL} = A'_{MQ} F_M A_{ML} = \frac{5PL^3}{36EI}$$

$$F = A'_{MQ} F_M A_{MQ} = \frac{L^3}{3EI}$$

y la redundante Q se encuentra de la Ec. (3-23a):

$$Q = F^{-1}(D_Q - D_{QL}) = -\frac{5P}{12}$$

Los vectores de acciones de extremo de miembro A_M , las reacciones A_R , y los desplazamientos de nudo D_J son (véanse las Ecs. 3-23b, 3-23c y 3-29):

$$A_M = A_{ML} + A_{MQ}Q = \frac{P}{216} \{-18, 9L, 70, -29L, -90, 45L\}$$

$$A_R = A_{RL} + A_{RQ}Q = \frac{P}{12} \{-1, 5, 7\}$$

$$D_J = A'_{MJ} F_M A_M = \frac{PL^2}{2592EI} \{-133, 62L, -106, -34, -169\}$$

Todos los resultados anteriores son válidos para la estructura con cargas combinadas en sus nudos (Fig. 3-22d); además, los vectores Q , A_R y D_J también son válidos para la estructura con las cargas reales. Sin embargo, las acciones de extremo de miembro A_M deben sumarse a las acciones de extremo $(A_M)_R$ en la estructura que tiene nudos restringidos (véase la Fig. 3-22c), a fin de obtener las acciones de extremo $(A_M)_A$ debidas a las cargas reales (véase la Ec. 3-24). Las acciones de extremo para la estructura restringida son

$$(A_M)_R = \frac{P}{27} \{0, 0, 7, -2L, 0, 0\}$$

y cuando este vector se suma al vector A_M previamente dado, las acciones de extremo para la estructura real (Fig. 3-22a) se encuentra que son:

$$(A_M)_A = A_M + (A_M)_R = \frac{P}{27} \{-2, L, 14, -5L, -10, 5L\}$$

Así pues, todas las acciones importantes y desplazamientos para la estructura plana de la Fig. 3-22a han sido encontradas y por eso se puede considerar como completa la solución.

EJEMPLO 4. La estructura plana por analizar en este ejemplo está mostrada en la Fig. 3-23a y es la misma previamente discutida en el Ej. 4 del Art. 2.3. Los efectos de las deformaciones por flexión y carga axial serán incluidos en el análisis, siendo las rigideces de los miembros EI y EA .

Las acciones redundantes Q_1 , Q_2 y Q_3 se obtienen soltando la estructura en el nudo B , como muestra la Fig. 3-23b. Las acciones de extremo de los miembros, reacciones y desplazamientos de los nudos están identificados en la Fig. 3-23c. Nótese que hay tres acciones de extremo para cada miembro (fuerza axial, fuerza cortante, y momento flexionante, en ese orden) y que están tomadas en el nudo B del miembro AB y en el nudo C del miembro BC . Por lo tanto, estos nudos han sido seleccionados como los nudos k del miembro (compare con la Fig. 3-13).

Las cargas combinadas en los nudos pueden ser encontradas sin ninguna dificultad (véase la Fig. 3-23d) y se muestran actuando en la estructura libre de la Fig. 3-23e. Debido a que hay tres series de acciones en el nudo B , a saber, las acciones de extremo para el miembro 1, las cargas combinadas en los nudos y las acciones redundantes, es importante evitar ambigüedades decidiendo arbitrariamente sobre las posiciones relativas de estas acciones en el nudo. En este ejemplo, se decide que las redundantes son tomadas precisamente abajo del nudo B .

La matriz de flexibilidad de miembro se obtiene por medio de las Ecs. (3-16) y (3.20):

$$F_M = \begin{bmatrix} F_{M1} & 0 \\ 0 & F_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{H}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H^3}{3EI} & \frac{H^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{H^2}{2EI} & \frac{H}{EI} \end{bmatrix}$$

La estructura libre, con las cargas combinadas actuando sobre los nudos, está dibujada en la Fig. 3-23e, debido a que las redundantes son tomadas precisamente abajo del nudo B , según se explicó arriba, se considera que las cargas en el nudo B actúan en el miembro 1 y no en el miembro 2. Las acciones de extremo de los miembros y reacciones en los apoyos producidas por estas cargas se usan para formar las matrices de cambio A_{ML} y A_{RL} :

$$A_{ML} = \left\{ 0, -\frac{P}{2}, \frac{PL}{8}, 0, 0, 0 \right\}$$

$$A_{RL} = \left\{ 0, P, \frac{PL}{2}, 0, 0, 0 \right\}$$

Las cargas unitarias correspondientes a las tres redundantes están mostradas en las Figs. 3-23f, 3-23g y 3-23h. Las acciones de extremo de miembro y reacciones en los apoyos para cada una de estas estructuras libres están colocadas en las columnas apropiadas de las matrices de cambio A_{MQ} y A_{RQ} , como sigue:

$$A_{MQ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -H & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{RQ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -H & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La carga unitaria correspondiente a D_{J1} está mostrada en la Fig. 3-23i. Se puede considerar que esta carga actúa sobre el miembro 1, como se muestra en la figura, o alternativamente podría ser colocada sobre el miembro 2,

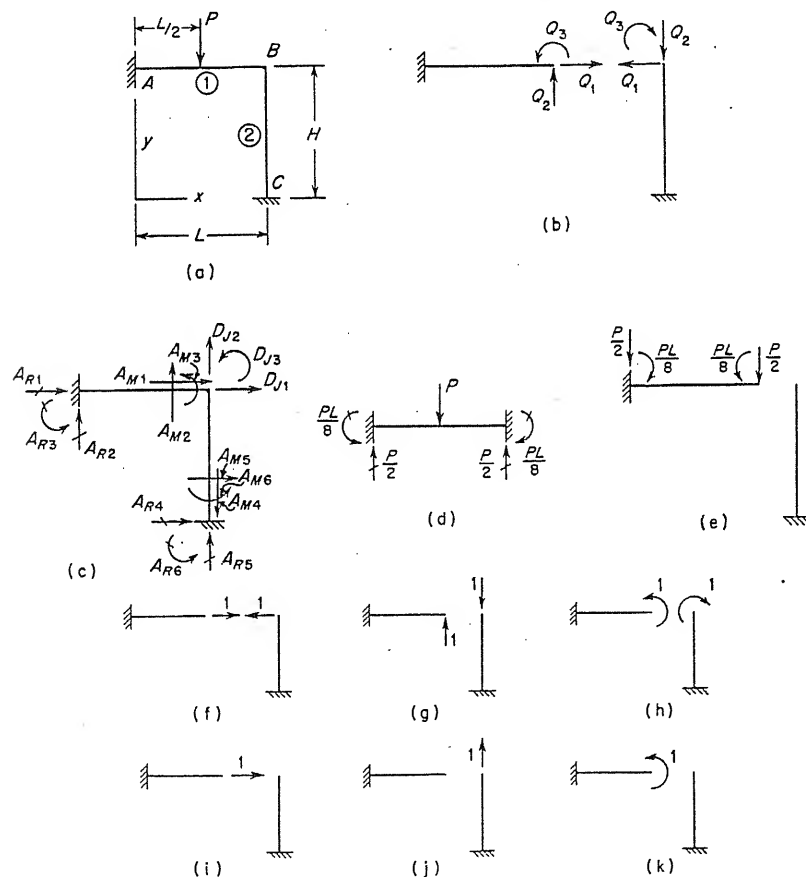


FIG. 3-23. Ej. 4: Estructura plana (efectos de flexión y carga axial)

ya que el desplazamiento horizontal de ambos miembros en el nudo B debe ser el mismo. Similarmente, las cargas unitarias correspondientes a D_{J2} y a D_{J3} están mostradas en las Figs. 3-23j y 3-23k. La matriz A_{MJ} , construida de estas figuras, toma una forma muy simple:

$$A_{MJ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como en los ejemplos anteriores, las matrices D_{QL} y F se encuentran sustituyendo F_M , A_{ML} y A_{MQ} en las Ecs. (3-25) y (3-26). Los resultados son:

$$D_{QL} = \frac{PL^2}{48EI} \{0, -5L, -6\}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} + \frac{H^3}{3EI} & 0 & -\frac{H^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} + \frac{H}{EA} & \frac{L^2}{2EI} \\ -\frac{H^2}{2EI} & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} + \frac{H}{EI} \end{bmatrix}$$

Estas matrices son las mismas que las obtenidas en la anterior solución de esta estructura (véase el Ej. 4, Art. 2.3).

El resto de la solución puede efectuarse más satisfactoriamente si se usan valores numéricos; por lo tanto, se suponen los siguientes datos (los mismos que en la solución anterior):

$$P = 10 \text{ kips}^* \quad L = H = 12 \text{ pies} = 144 \text{ plg} \\ E = 30\,000 \text{ ksi}^\dagger \quad I = 200 \text{ plg}^4 \quad A = 10 \text{ plg}^2$$

Sustituyendo los valores de arriba en las matrices D_{QL} y F se obtienen las matrices en términos numéricos. Estas matrices, así como F^{-1} y Q , están dadas en la anterior solución y no las volveremos a repetir aquí. Los vectores A_M , A_R y D_J se encuentran, como siempre, de las Ecs. (3-23b), (3-23c) y (3-29); los resultados son

$$A_M = \{-0.913, -0.97, 92.1, -4.03, -0.913, 43.6\}$$

$$A_R = \{0.913, 5.97, 227.6, -0.913, 4.03, 43.6\}$$

$$D_J = \{-0.000438, -0.00193, 0.00053\}$$

Todos los resultados numéricos en esta solución están basados sobre las unidades de kips (kilolibras), pulgadas y radianes.

* Kip (kilopound) = 1 000 lb. (N. del T.)

† Ksi (kilopound per square inch) = 1 klb/plg² = 1 000 lb/plg². (N. del T.)

Las acciones de extremo de los miembros debidas a las cargas reales (Fig. 3-23a) se encuentran sumando el vector $(A_M)_R$ de acciones de extremo en la estructura restringida al vector A_M arriba dado, de acuerdo con la Ec. (3-24). Las acciones de extremo en la estructura restringida (véase la Fig. 3-23d) son

$$(A_M)_R = \left\{ 0, \frac{P}{2}, -\frac{PL}{8}, 0, 0, 0 \right\} = \{0, 5, -180, 0, 0, 0\}$$

y, por lo tanto,

$$(A_M)_A = A_M + (A_M)_R = \{-0.913, 4.03, -87.9, -4.03, -0.913, 43.6\}$$

Todos los resultados están de acuerdo con los encontrados en la solución anterior de la misma estructura.

El vector Q de redundantes que fue determinado arriba para la estructura con cargas combinadas en los nudos es válido también para la estructura real. Se podrá notar esta conclusión con el hecho de que no hay acciones en la estructura restringida correspondientes a las redundantes (véase la Fig. 3-23d).

Las técnicas ilustradas en los ejemplos anteriores se pueden extender fácilmente a otros tipos de estructuras reticulares. Sin embargo, la dificultad del uso del método de la flexibilidad por cálculos manuales estriba en lo tedioso de ello, especialmente si existen muchos miembros en la estructura. Esta dificultad se puede evitar haciendo todos los cálculos matriciales (pasos del 6 al 11 en el bosquejo dado al final del Art. 3.8) por computadoras digitales.

3.10. Efectos de temperatura, deformaciones previas y desplazamiento de apoyos. El énfasis principal en los artículos anteriores de este capítulo ha sido sobre los efectos de las cargas que actúan sobre estructuras. Sin embargo, los efectos de cambios de temperatura, deformaciones previas en los miembros y desplazamiento de los apoyos pueden ser también tomados en consideración. Estos efectos fueron previamente discutidos para el método de la flexibilidad en el Art. 2.4, donde se explicó un método para incorporarlos a las ecuaciones de superposición básica. Se puede recordar de esa discusión que los desplazamientos de apoyos son de dos tipos: aquellos que corresponden a las redundantes y los que no corresponden. Los primeros son fácilmente manejados incluyéndolos en el vector D_Q de desplazamientos reales correspondientes a las redundantes. Los otros desplazamientos de apoyo requieren más consideraciones y en la siguiente discusión se entenderá que cualquier mención a los desplazamientos de apoyo se refiere a aquellos del último tipo.

Existen dos caminos generales que se pueden seguir al tratar con la temperatura, deformaciones previas, y desplazamiento de apoyos. El primer camino se basa sobre el uso de cargas equivalentes en los nudos y es el más simple y directo de los dos métodos.

En este método el análisis principia imponiendo el efecto bajo consideración sobre la estructura restringida. De las acciones de empotramiento resultantes se pueden encontrar una serie de cargas de nudos equivalentes. En seguida, la estructura puede ser analizada según se describió en el Art. 3.8 para una estructura sujeta únicamente a cargas de nudo. El último paso en el análisis es modificar las acciones de extremo de los miembros de acuerdo con la Ec. (3-24). La única diferencia de las soluciones anteriores es que las acciones de extremo $(A_M)_R$ en la estructura restringida se deben al efecto particular bajo consideración, más que debido a las cargas en los miembros.

El segundo camino hace uso de las ecuaciones más generales del método de la flexibilidad (véanse las Ecs. 2-13 y 2-17). El uso de estas ecuaciones requiere la determinación de varios desplazamientos en la estructura libre debidos a temperatura, deformaciones previas y desplazamiento de los apoyos. Específicamente, deben encontrarse los vectores desplazamiento D_{QT} , D_{QP} , D_{QR} , D_{JT} , D_{JP} , y D_{JR} (véanse las Ecs. 2-11 y 2-18). Cada uno de estos vectores de desplazamiento pueden ser formulados en términos matriciales, iguales a la expresión de D_{QL} y D_{JL} , por las multiplicaciones matriciales indicadas en las Ecs. (3-25) y (3-27). Sin embargo, ya que las matrices que se requieren no son de un interés general, porque son diferentes para cada tipo de efectos, no se darán aquí. Por el contrario, se sugiere que el método de cargas en los nudos es el camino más conveniente.

El método de la flexibilidad puede desarrollarse mucho más de lo explicado en este capítulo, y el lector interesado debe consultar las referencias dadas al final del libro.

3.11. Miembros con secciones transversales simétricas y asimétricas. Se ha supuesto en las discusiones anteriores que las formas de las secciones transversales de los miembros reúnen ciertos requisitos de simetría. Por ejemplo, se ha supuesto que el plano de flexión de un miembro de viga (el plano x_M - y_M en la Fig. 3-7) es un plano de simetría. Así pues, mientras que tanto el eje y_M como el z_M deben ser los ejes principales del área de la sección transversal, el eje y_M debe ser también un eje de simetría. Bajo estas condiciones la viga se flexionará únicamente en el plano x_M - y_M , suponiendo, por supuesto, que todas las fuerzas actúan en ese plano y que todos los pares tienen sus vectores paralelos al eje z_M . Se requieren las mismas condiciones para un miembro de una estructura plana.

En el caso del miembro de una parrilla sujeto a torsión así como a flexión, se ha supuesto que tanto el eje y_M como el z_M (véase la Fig. 3-14) son ejes de simetría. Si este es el caso, todas las deflexio-

nes de un miembro de una parrilla serán en el plano x_M-y_M , porque la torsión del miembro producirá giro respecto al eje x_M , pero no flexión. Similarmente, también se ha supuesto que el miembro de una estructura en el espacio (Fig. 3-17) tiene dos ejes de simetría en su sección transversal, por lo que la torsión y la flexión ocurren en forma independiente. En el Apéndice C están dados varios ejemplos de secciones que tienen dos ejes de simetría.

En el caso de un miembro de armadura no hay requisitos de simetría en las secciones transversales. Se hace necesario, sin embargo, que la fuerza axial en el miembro actúe a través del centroide del área de la sección transversal; de lo contrario se producirán momentos flexionantes en el miembro.

Regresando ahora al caso del miembro de una viga, considérese cómo se altera su comportamiento si el eje y_M (Fig. 3-7) no es eje de simetría. Un ejemplo de este tipo de miembros es la sección canal (véase la Fig. 3-24a). En la figura, los puntos C y O representan el centroide y el centro de cortantes, respectivamente. Si las cargas sobre el miembro actúan a través de cualquier punto que no sea el centro de cortantes, la viga se torcerá al flexionarse. Sin embargo, si las cargas actúan a través del punto O, la viga se flexionará en el plano x_M-y_M sin torcerse. Por lo tanto, se puede llegar a la conclusión de que una viga para la que el plano x_M-y_M no es un plano de simetría puede ser analizada de la misma forma que aquella para la cual sí existe un plano de simetría, siempre y

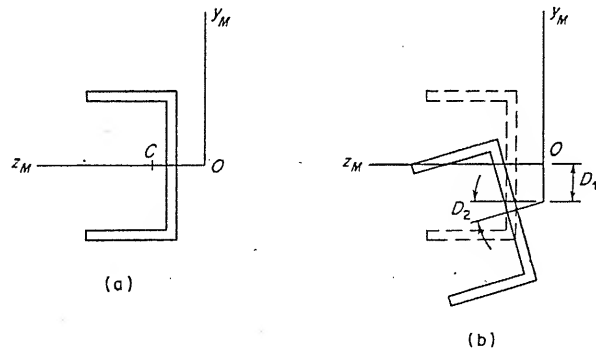


FIG. 3-24. Miembro de una viga con sección transversal canal

cuando el plano x_M-y_M se tome a través del centro de cortantes. Tal requerimiento significa que los nudos entre los miembros deben estar localizados en las intersecciones de los ejes de centros de cortante, y esos puntos de apoyo deben estar en los ejes de centros de cortante.

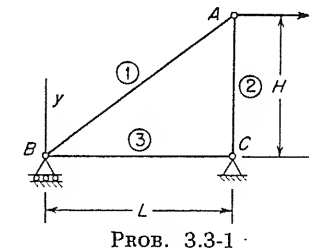
Para una estructura plana, una parrilla y una estructura en el espacio se puede hacer el mismo comentario general como en el caso de una viga, o sea, que el eje de centro de cortantes debe tomarse como el eje del miembro. Los desplazamientos que se determinan en el análisis serán entonces los desplazamientos del eje de centro de cortantes, y no son necesariamente los mismos que los del miembro mismo. Un caso de este tipo se muestra en la Fig. 3-24b, donde se supone que la sección canal ha sufrido una translación D_1 del centro de cortantes en la dirección negativa de y_M y una rotación D_2 respecto al eje x_M . Se podrá ver que la translación de cualquier punto en el miembro mismo está compuesta de dos partes: la translación del centro de cortantes, más una translación adicional producida por el giro respecto del centro de cortantes.*

Cuando se ha discutido la torsión de un miembro, se ha supuesto en este libro que el efecto de alabeo de la sección transversal es insignificante. Como resultado, la rigidez torsional GJ ha sido usada en todas las fórmulas y cálculos que involucran la torsión. En algunos casos, una teoría más exacta de una torsión no uniforme, que considere los efectos de alabeo deberá ser usada. En tales casos, las relaciones entre cargas y desplazamientos se hacen más complicadas que las dadas en el Apéndice A y consideran una propiedad adicional de la sección transversal (a saber, la constante de alabeo). El lector interesado deberá consultar otras referencias para la discusión de torsión no uniforme.**

PROBLEMAS

En los siguientes problemas, supóngase que todos los desplazamientos son positivos cuando son en los sentidos positivos de los ejes coordenados mostrados en las figuras. Utilícese el sistema de numeración para los miembros según se muestra en las figuras.

3.3-1. Determine los desplazamientos en las direcciones de x y y del nudo A de la armadura plana mostrada en la figura. Suponga que $H = 3L/4$ y que EA es constante para todos los miembros.

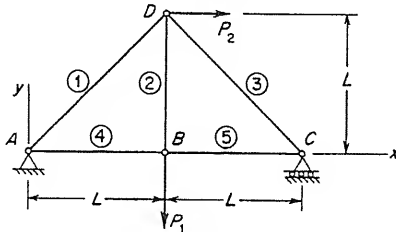


PROB. 3.3-1

* Para una discusión sobre flexión en vigas no simétricas, véase S. P. Timoshenko, "Strength of Materials", 3a. Ed., Parte I, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1955, Págs. 235-244.

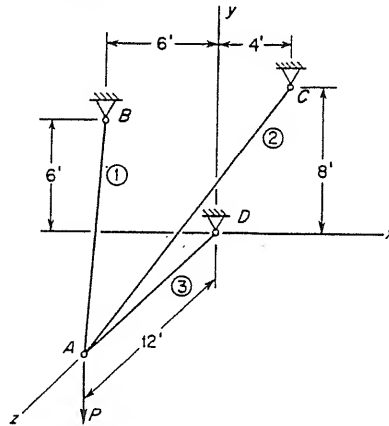
** Véase, por ejemplo, S. P. Timoshenko, *ibid.*, Parte II, 1956, Págs. 255-273.

3.3-2. La armadura plana mostrada en la figura está sujeta a dos sistemas de cargas: (1) carga aislada P_1 y (2) carga aislada P_2 . La rigidez axial EA es la misma para todos los miembros. Encontrar las translaciones del nudo D en la dirección de x y del nudo B en la dirección de y para cada sistema de carga.



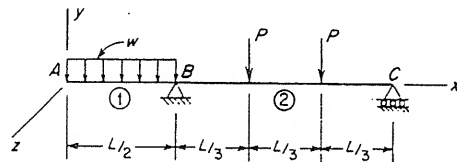
PROB. 3.3-2

3.3-3. Encuentre las translaciones del nudo A en las direcciones de x , y y z para la armadura en el espacio (véase la figura). Los apoyos B , C y D están en el plano x - y . Tome en consideración los siguientes datos: las áreas de los miembros 1 y 2 son 1.0 plg^2 , el área del miembro 3 es 3.0 plg^2 , $P = 6 \text{ kips}$, y $30\,000 \text{ kips/plg}^2$.



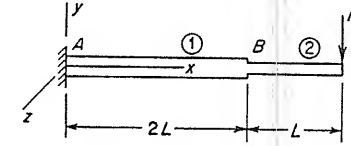
PROB. 3.3-3

3.4-1. Determine los desplazamientos del nudo A para una viga con un voladizo (véase la figura). Los desplazamientos se deben tomar en el siguiente orden: translación en la dirección y y giro en el sentido de z . Suponga que hay dos sistemas de carga (únicamente la carga uniforme w , y sólo las fuerzas concentradas P) y que EI es constante en la viga.



PROB. 3.4-1

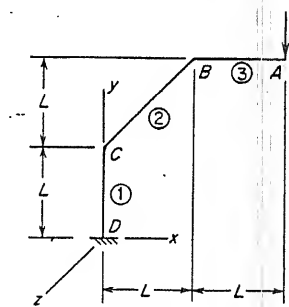
3.4-2. La viga en voladizo ABC mostrada en la figura está reforzada a lo largo de la región AB , por lo que el momento de inercia de AB es $3I$, mientras que el de BC es I . Encuentre los desplazamientos en los puntos B y C (translación en la dirección de y y giro en el sentido de z) debidos a la carga P .



PROB. 3.4-2 y PROB. 3.4-3

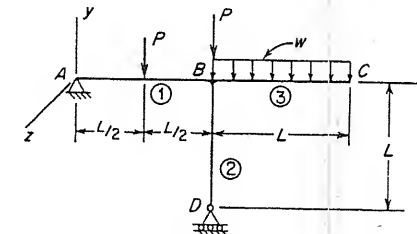
3.4-3. Resuelva el problema anterior incluyendo los efectos de deformaciones por cortante, así como deformaciones por flexión. Suponga que la rigidez al cortante de ambos miembros de la viga es GA/f .

3.5-1. Determine la translación del nudo B en la dirección de y y la translación del nudo A en la dirección de x para el marco plano mostrado en la figura. Considere únicamente los efectos de deformaciones por flexión y suponga que EI es constante para todos los miembros.



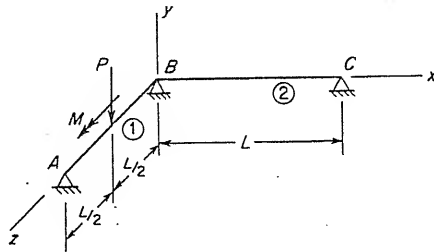
PROB. 3.5-1

3.5-2. Encuentre la translación del punto C en la dirección de y del marco plano (vea la figura). Tome en cuenta ambas deformaciones, axial y por flexión, y suponga que E , I y A son los mismos para todos los miembros. También suponga que $w = P/L$.



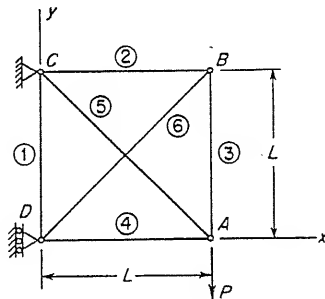
PROB. 3.5-2

3.6-1. La parrilla mostrada en la figura descansa en el plano x - z y está libremente apoyada en A , B y C . Las cargas en la parrilla consisten en una fuerza concentrada P y un par de torsión M actuando en el punto medio del miembro AB . (Tal juego de cargas es el equivalente estático de una fuerza P aplicada excéntricamente). El nudo en B es una conexión rígida entre los dos miembros. Cada miembro tiene una rigidez a la flexión EI y una rigidez a la torsión GJ . Encuentre los giros en los sentidos de x y z en los puntos A y C .



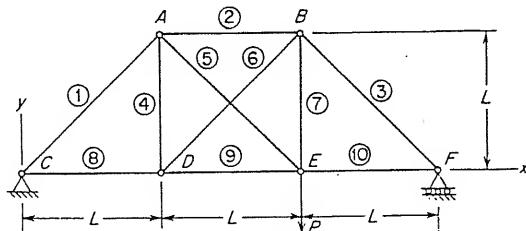
PROB. 3.6-1

3.9-1. La armadura plana mostrada en la figura soporta una carga P en el nudo A . La rigidez axial de todos los miembros es EA . Encuentre el vector A_M de fuerzas axiales en todos los miembros, y encuentre los desplazamientos del nudo A (translationes en las direcciones de y y x).



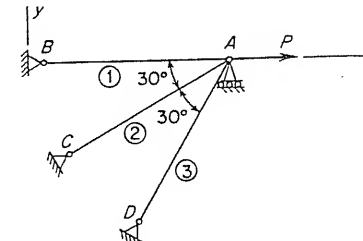
PROB. 3.9-1

3.9-2. Determine todas las fuerzas axiales de la armadura (véase la figura). Suponga que $L = 20$ pies, E es constante para todos los miembros, el área de los miembros 1, 2 y 3 es 4.0 plg^2 , el área de los otros miembros es 2.0 plg^2 y $P = 30$ kips.



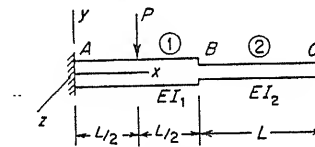
PROB. 3.9-2

3.9-3. En la armadura plana mostrada en la figura encuentre las fuerzas axiales en las barras y la translación del punto A . Suponga que L , E y A son las mismas para las tres barras.



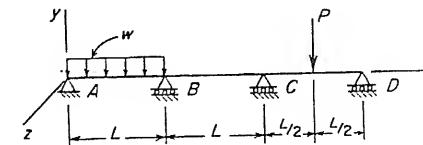
PROB. 3.9-3

3.9-4. Determine las reacciones (esto es, la fuerza en la dirección de y y el par en el sentido de z en los nudos A y C) para la viga con extremos empotrados (vea la figura). Suponga que $EI_1 = 2EI$ y $EI_2 = EI$. Considérese AB y BC como los miembros 1 y 2, respectivamente.



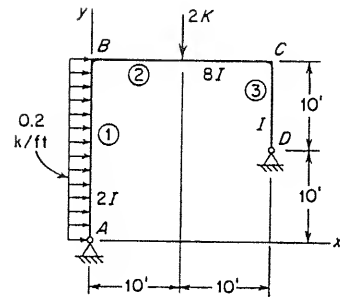
PROB. 3.9-4

3.9-5. Calcule el giro en el sentido de z del apoyo A de la viga continua mostrada en la figura. Suponga que EI es constante para todos los claros y que $P = wL$. Numere los miembros de izquierda a derecha a lo largo de la viga.



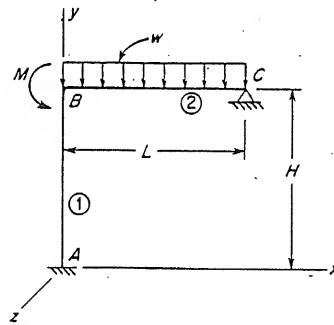
PROB. 3.9-5

3.9-6. Encuentre la fuerza cortante y el momento flexionante en el nudo B del miembro AB en la estructura plana mostrada en la figura. Note que los momentos de inercia de los miembros 1, 2 y 3 son $2I$, $8I$ e I , respectivamente. También, calcule la translación del nudo C en la dirección de x , si $E = 30\,000 \text{ kips/plg}^2$ e $I = 200 \text{ plg}^4$. Considérense únicamente los efectos de deformaciones por flexión.



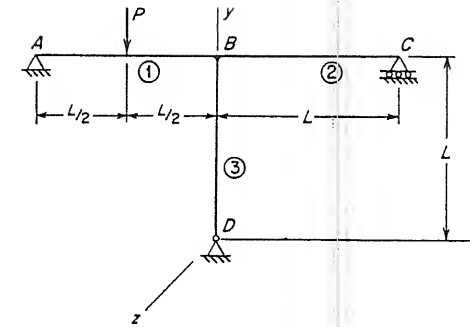
PROB. 3.9-6

3.9-7. La estructura plana mostrada en la figura está sujeta a una carga uniforme w a lo largo del claro BC y un momento M actuando en el nudo B. Determine las reacciones en el apoyo A (fuerzas en las direcciones de y y x , y momento en el sentido de z) y los giros en los nudos B y C. Seleccione las reacciones en el apoyo C como las redundantes y únicamente considere los efectos de deformaciones por flexión. Suponga que $M = 2wL^2$, $H = L$ y que EI es constante.



PROB. 3.9-7

3.9-8. La estructura plana mostrada en la figura debe ser analizada utilizando las siguientes redundantes: Q_1 es el momento flexionante a una distancia pequeña a la izquierda del nudo B (positivo cuando la parte de arriba del miembro está en compresión) y Q_2 es la fuerza de reacción en el apoyo C. Determine las reacciones en los apoyos A y D, y el giro en el nudo B. Considere únicamente los efectos de flexión y suponga que EI es constante para todos los miembros.



PROB. 3.9-8

3.9-9. Determine los giros en el nudo C en los sentidos de x y z para la parrilla del Prob. 2.3-18. Suponga que los miembros AB, BC y CD son los miembros 1, 2 y 3, respectivamente. Cada miembro tiene una rigidez a la flexión EI , una rigidez a la torsión GJ y una longitud L . Las cargas P actúan en los puntos medios de AB y BC.

CAPITULO 4

METODO DE LA RIGIDEZ

4.1. Introducción. La teoría de análisis por el método de la rigidez fue desarrollada y aplicada de una manera apropiada para cálculos a mano en el Cap. 2. En los siguientes artículos el método es desarrollado ampliamente y aplicado en una manera mejor formalizada. El objetivo es introducir el análisis a una forma que fácilmente pueda ser programada en una computadora digital. De hecho, las soluciones descritas en este capítulo para los seis tipos básicos de estructuras reticulares tienen sus partes correspondientes en la forma de diagramas de flujo para programas de computadoras en el siguiente capítulo. Por lo tanto, el acercamiento detallado de este capítulo constituye el paso intermedio entre los cálculos a mano y programas para computadoras.

En el Art. 4.2 se presenta un resumen con el propósito de orientar el análisis por el método de la rigidez hacia los programas para las computadoras. Como las rigideces de los miembros tienen un papel esencial en los análisis de todos los tipos de estructuras reticulares este tópico será tratado en el Art. 4.3. Así pues, esta información estará disponible para su uso en el capítulo. Entonces, de los Arts. 4.4 al 4.7, ciertos aspectos del análisis por el método de la rigidez son reorganizados en un formato que es apropiado para propósitos de programación. La reorganización necesaria se explica junto con un ejemplo familiar que ha sido previamente resuelto. Los artículos restantes del capítulo tratan de las aplicaciones de los diferentes tipos de estructuras reticulares. Por simplicidad, únicamente se considerarán en este capítulo los efectos de las cargas sobre la estructura. Los métodos que tratan cambios de temperatura, deformaciones previas, desplazamiento de apoyos, y otros efectos, se describen en el Cap. 6.

4.2. Principales características del método de la rigidez. Las ecuaciones básicas del análisis por el método de la rigidez fueron previamente discutidas en el Cap. 2. Cuando únicamente se toman en cuenta los efectos de las cargas sobre la estructura, las ecuaciones para los desplazamientos de nudo, acciones de extremo de los miembros y reacciones, son:

$$A_D = A_{DL} + SD \quad (2-23)$$

repetida

$$A_M = A_{ML} + A_{MD}D \quad (2-25)$$

repetida

$$A_R = A_{RL} + A_{RD}D \quad (2-26)$$

repetida

En la primera de estas ecuaciones, el vector A_D consiste de cargas correspondientes a los desplazamientos desconocidos D , el vector A_{DL} está compuesto de acciones artificiales de restricción en la estructura fija correspondiente a los desplazamientos D y causadas por otras cargas que no sean las de A_D , y la matriz de rigidez S corresponde a los desplazamientos D . En la segunda ecuación, el vector A_M está formado por las acciones de extremo de los miembros en la estructura real, A_{ML} es un vector de acciones de extremo de miembro en la estructura fija debidas a las cargas, y A_{MD} es una matriz de acciones de extremo debidas a los valores unitarios de los desplazamientos de nudo. En la tercera ecuación, el vector A_R representa las reacciones en los apoyos de la estructura real, A_{RL} es el vector de las cantidades correspondientes en la estructura fija sujeta a las cargas, y A_{RD} es una matriz de reacciones de apoyo debidas a los valores unitarios de los desplazamientos de nudo D .

Cuando se resuelven problemas a mano, uno puede generar las matrices en las ecuaciones de arriba en cualquier forma conveniente sin pérdida de eficiencia, como se hizo en el Cap. 2. Las ecuaciones son apropiadas para calcular ciertas acciones de extremo y reacciones de un miembro seleccionado en estructuras relativamente simples. Sin embargo, si la estructura por analizar es grande y complicada y todas las acciones de extremo de los miembros y reacciones van a ser determinadas, las ecuaciones anteriores no son eficientes. Además, las estructuras grandes y complicadas no pueden ser analizadas directamente a mano, por lo que los cálculos deben ser llevados por una computadora digital. En un programa de computación se hace necesario manejar toda la información acerca de las estructuras y las cargas en una forma altamente organizada. Así, debe seguirse un camino seguro que permita a la computadora procesar un gran número de información por un procedimiento rutinario.

Un programa de computación para el análisis de una estructura por el método de la rigidez se divide convenientemente en varias fases. Estas fases no son iguales a las del Cap. 2 para cálculos a mano. La diferencia estriba en el hecho de que cuando se usa una computadora se desea trabajar con todos los datos pertenecientes a la estructura desde un principio. Estos pasos incluyen la formación

de la matriz de rigidez, que es una propiedad de la estructura. Subsecuentemente, se manipulan los datos de carga, después de lo cual se calculan los resultados finales del análisis. Esta secuencia es particularmente eficiente si se considera más de un sistema de carga, ya que las fases iniciales de los cálculos no necesitan repetirse. Las fases a considerar en las discusiones subsecuentes son las que siguen:

(1) *Ordenar los datos de la estructura.* La información que se refiere a la estructura debe ser ordenada y registrada. Esta información incluye el número de miembros, el número de nudos, el número de grados de libertad y las propiedades elásticas del material. La localización de los nudos de la estructura está especificada por medio de coordenadas geométricas. Además, se deben dar las propiedades de las acciones de cada miembro de la estructura. Finalmente, las condiciones de restricción en los apoyos de la estructura deben identificarse. En un programa de computación, toda información es codificada en una forma conveniente, como se mostrará subsecuentemente en este capítulo y también en el Cap. 5.

(2) *Generación e inversión de la matriz de rigidez.* La matriz de rigidez es una propiedad inherente de la estructura y está basada únicamente en los datos de la misma. En un programa de computación es conveniente obtener la matriz de rigidez de nudo, sumando las contribuciones de las matrices de rigidez de miembros individual (una discusión de las rigideces de miembros prismáticos se da en el Art. 4.3). El cambio esencial del camino previo consiste en generalizar la matriz de rigidez de nudo a partir de una que se relaciona únicamente a los grados de libertad en la estructura a una que se refiere a todos los desplazamientos posibles de los nudos, incluyendo los desplazamientos de los apoyos. Esta matriz de rigidez generalizada deberá ser llamada *la matriz de rigidez de nudo total*, y se describe en el Art. 4.4.

(3) *Ordenar los datos de carga.* Se deben especificar, de una manera tal, todas las cargas que actúan en la estructura, y que sean propias para un programa de computación. Se deben dar tanto las cargas en los nudos como las cargas en los miembros. Las primeras se pueden manejar directamente, pero las últimas se manejan indirectamente dando como datos las acciones de empotramiento causadas por las cargas en los miembros.

(4) *Generación de vectores asociados con cargas.* Las acciones de empotramiento debidas a las cargas en los miembros se pueden convertir en *cargas equivalentes de nudo*, como previamente se describió en el Art. 3.2. Estas cargas equivalentes de nudo se pueden sumar a las cargas reales de nudo para producir un problema en el

que la estructura está imaginariamente cargada tan sólo en sus nudos. Esta manipulación de los datos de carga se describe en el Art. 4.5.

(5) *Cálculo de resultados.* En la fase final del análisis son calculados todos los desplazamientos de nudo, reacciones y acciones de extremo de miembro. En esta fase hay también ciertas modificaciones al acercamiento previo. En particular, uno ejecuta el cálculo de las acciones de extremo de miembro, miembro por miembro, en vez de considerar la estructura como un todo. Tales cálculos requieren el uso de las matrices de rigidez de miembro, tema que se resume en el siguiente artículo. Un cálculo simple de este tipo se demuestra con propósitos de ilustración en el Art. 4.6.

Se debe notar que hay muchas posibles variaciones en la organización del método de la rigidez para programas de computación. Las fases de análisis enumeradas arriba constituyen un acercamiento ordenado que tiene ciertos rasgos esenciales que son ventajosos al tratar con estructuras grandes y complicadas. Cada una de estas fases será discutida e ilustrada por medio de un ejemplo conocido en los siguientes artículos.

4.3. Rigidez de miembro prismático. Un coeficiente de rigidez en cualquier nudo de una estructura está compuesto por la suma de las rigideces de los miembros que concurren a ese nudo, como se ilustró en los ejemplos resueltos en el Art. 2.9. Por eso, al generar la matriz de rigidez de nudo para una estructura, es conveniente sumar las *rigideces de miembro* en alguna forma sistemática. También es conveniente hacer uso de la matriz de rigidez de miembro al calcular las acciones finales A_M en los extremos de un miembro después de haber sido encontrados los desplazamientos del nudo.

Ciertas rigideces de miembro ya han sido usadas en problemas anteriores. Por ejemplo, las cantidades $4EI/L$ y $2EI/L$ han sido usadas repetidamente en análisis de vigas (véase la Fig. 2-15), y el término EA/L ha aparecido en análisis de armaduras (véase el Ej. 3 del Art. 2.9). En general, se requieren las rigideces de miembro de todos los tipos cuando se analizan estructuras por el método de la rigidez. Por lo tanto, todas las rigideces de un miembro prismático se dar en este artículo para tenerlas a la mano en las siguientes discusiones.

Para principiar la discusión, considérese el miembro prismático mostrado en la Fig. 4-1. Se supone que el miembro está totalmente empotrado en ambos extremos, los que son llamados extremos j y k . Es conveniente desarrollar las rigideces de miembro junto con un juego de ejes ortogonales que estén orientados con el eje del miembro.

Tal juego de *ejes orientados con el miembro* aparece en la Fig. 4-1. El eje x_M coincide con el eje centroidal del miembro y es positivo en el sentido de j a k . Los ejes y_M y z_M son los ejes principales para el

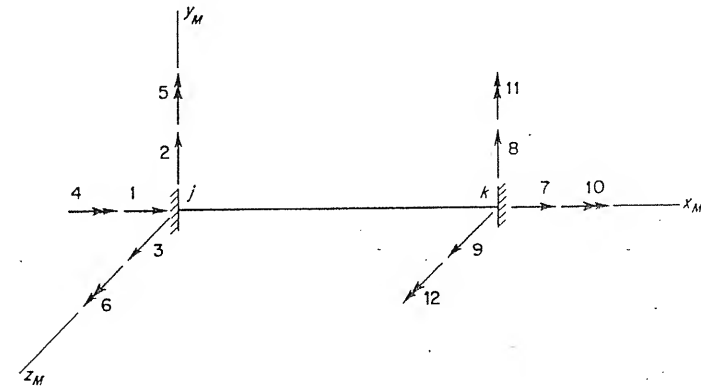


FIG. 4-1. Miembro restringido

miembro, o sea, los planos x_M - y_M y x_M - z_M son los planos principales de flexión. Se presume que coinciden el centro de cortantes y el centroide del miembro, por lo que la torsión y la flexión del miembro no se mezclan, pero pueden suceder independientemente una de otra. Esta restricción normalmente se satisface en estructuras reticulares; sin embargo, es posible hacer un análisis más general si es necesario (véase el Art. 3.11).

En este punto del análisis de armaduras, estructuras planas, parrillas y estructuras en el espacio se debe mencionar que se requiere el uso de un juego de ejes de referencia orientados en alguna forma para la estructura en su totalidad. Tales ejes son conocidos como *ejes de orientación con la estructura* y, en general, los ejes de los miembros son oblicuos con respecto a los ejes de la estructura. Sin embargo, siempre es posible obtener las rigideces de los miembros con respecto a sus mismos ejes, como se hace en este artículo, y entonces transformar estas rigideces a los ejes de la estructura. El procedimiento para llevar a cabo esta transformación está descrito más adelante en este capítulo para cada tipo de estructura.

Las propiedades del miembro mostrado en la Fig. 4-1 serán definidas en una forma sistemática* con el propósito de programar para estructuras complejas. Hágase que L sea la longitud del miembro y A_x el área de la sección transversal. (El símbolo A sin el subíndice es usado más adelante como un identificador para las acciones.) Los

* Este sistema de identificación de propiedades de miembro es usado por A. S. Hall y R. W. Woodhead en *Frame Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1961, Pág. 7.

momentos principales de inercia de la sección transversal del miembro con respecto a los ejes y_M y z_M se denominan I_y e I_z , respectivamente. Hágase también que la constante de torsión para el miembro sea I_x , que es la misma constante J que aparece en el Cap. 2 y en los Apéndices. Como el símbolo J tiene como uso ser índice para los nudos de la estructura en un programa de computación, es conveniente el uso del símbolo I_x para la constante de torsión. La constante de torsión I_x no se debe interpretar como un momento polar de inercia de la sección transversal, excepto en el caso especial de un miembro cilíndrico de sección circular.

Las rigideces de miembro para el miembro empotrado mostrado en la Fig. 4-1, son las acciones ejercidas sobre el miembro por las restricciones cuando se impone a cada extremo del miembro un desplazamiento unitario (traslaciones y giros). Los valores de estas acciones de restricción se pueden obtener de la Tabla B-4 en el Apéndice B. Se considera que los desplazamientos unitarios se inducen uno a la vez, mientras que cualquier otro desplazamiento de extremo está fijo en cero, y se presume que son positivos en las direcciones de x_M , y_M y z_M . Por lo tanto, los sentidos positivos de las tres traslaciones y de las tres rotaciones en cada extremo del miembro están indicados por flechas en la Fig. 4-1. En la figura, las flechas de una punta indican traslaciones mientras que las flechas de doble punta representan giros. En el nudo J las traslaciones están numeradas 1, 2 y 3, y los giros están numerados 4, 5 y 6. Similarmente, en el nudo k del miembro 7, 8 y 9 son traslaciones, y 10, 11 y 12 son rotaciones. En todos los casos los desplazamientos están tomados en el orden de x_M , y_M y z_M , respectivamente. En una estructura en el espacio, que es el tipo más general de estructuras reticulares, los desplazamientos de los nudos de un miembro están numerados exactamente en este orden. Sin embargo, en los miembros de otras estructuras, tales como marcos planos, no se requieren todas las rigideces, por lo que se omiten algunos de los desplazamientos y la numeración se cambia.

Las rigideces de miembro para los posibles doce tipos de desplazamientos de nudo (mostrados en la Fig. 4-1) se resumen en la Fig. 4-2. En cada caso las diferentes acciones de restricción (o rigideces de miembro) están mostradas como vectores. Una flecha con una punta representa un vector fuerza; una flecha con dos puntas representa un vector momento. Todos los vectores están dibujados en los sentidos positivos, pero en las acciones de restricción, que son originalmente negativas, un signo menos debe preceder a la expresión para el coeficiente de rigideces.

Para mostrar cómo se determinan las rigideces de un miembro, considérese el caso (1) en la Fig. 4-2. Las acciones de restricción

mostradas en la figura se presentan debido a un desplazamiento unitario en el extremo j del miembro en la dirección positiva de x_M . Todos los otros desplazamientos valen cero. Este desplazamiento causa una fuerza de compresión pura EA_x/L en el miembro. En el extremo j del miembro esta fuerza de compresión se equilibra por una acción de restricción de EA_x/L en la dirección positiva de x_M , y en el extremo k del miembro la acción de restricción tiene un mismo valor, pero está en la dirección negativa de x_M . Todas las otras acciones de restricción valen cero en este caso.

El caso (2) de la Fig. 4-2 involucra un desplazamiento unitario del extremo j del miembro en la dirección positiva de y_M , mientras que los otros desplazamientos valen cero. Este desplazamiento causa momento y cortante en el miembro. En el extremo j las acciones de restricción necesarias para mantener al miembro en equilibrio son una fuerza lateral de $12EI_z/L^3$ en la dirección positiva de y_M , y un par $6EI_z/L^2$ en la dirección positiva de z_M (véase la Tabla B-4). En el extremo k del miembro las acciones de restricción son las mismas, excepto que la fuerza lateral actúa en la dirección negativa de y_M .

Todas las rigideces de miembro mostradas en la figura se encuentran determinando los valores de las acciones de restricción necesarias para mantener el miembro deformado en equilibrio. El lector debe verificar todas las expresiones antes de seguir más adelante. Estas rigideces se pueden utilizar para formular las matrices de rigidez para los miembros de diferentes tipos de estructuras. En el caso más general (una estructura en el espacio), es posible que el miembro experimente cualquiera de los doce desplazamientos mostrados en la Fig. 4-2. La matriz de rigidez para tal miembro, denominada S_M , es, por lo tanto, del orden de 12×12 , y cada columna en la matriz representa las acciones debidas por uno de los desplazamientos unitarios. La matriz de rigidez de miembro de una estructura en el espacio está mostrada en la Tabla 4-1 y es, por supuesto, simétrica. Los renglones y las columnas de la matriz están numerados hacia abajo en un lado y de izquierda a derecha en la parte de arriba para auxiliar al lector a identificar un elemento particular. Además, la matriz está dividida a fin de delinear las partes que están asociadas con los dos extremos del miembro.

Las matrices de rigidez de miembro requeridas para otras estructuras, tales como vigas continuas y estructuras planas, son de menor orden que la matriz mostrada en la Tabla 4-1. Esto es porque sólo ciertos desplazamientos de extremo mostrados en las Figs. 4-1 y 4-2 se consideran en el análisis de tales estructuras. Como ejemplo de cómo se forma una matriz de rigidez de miembro, será encontrada la matriz de rigidez para un miembro como viga continua.

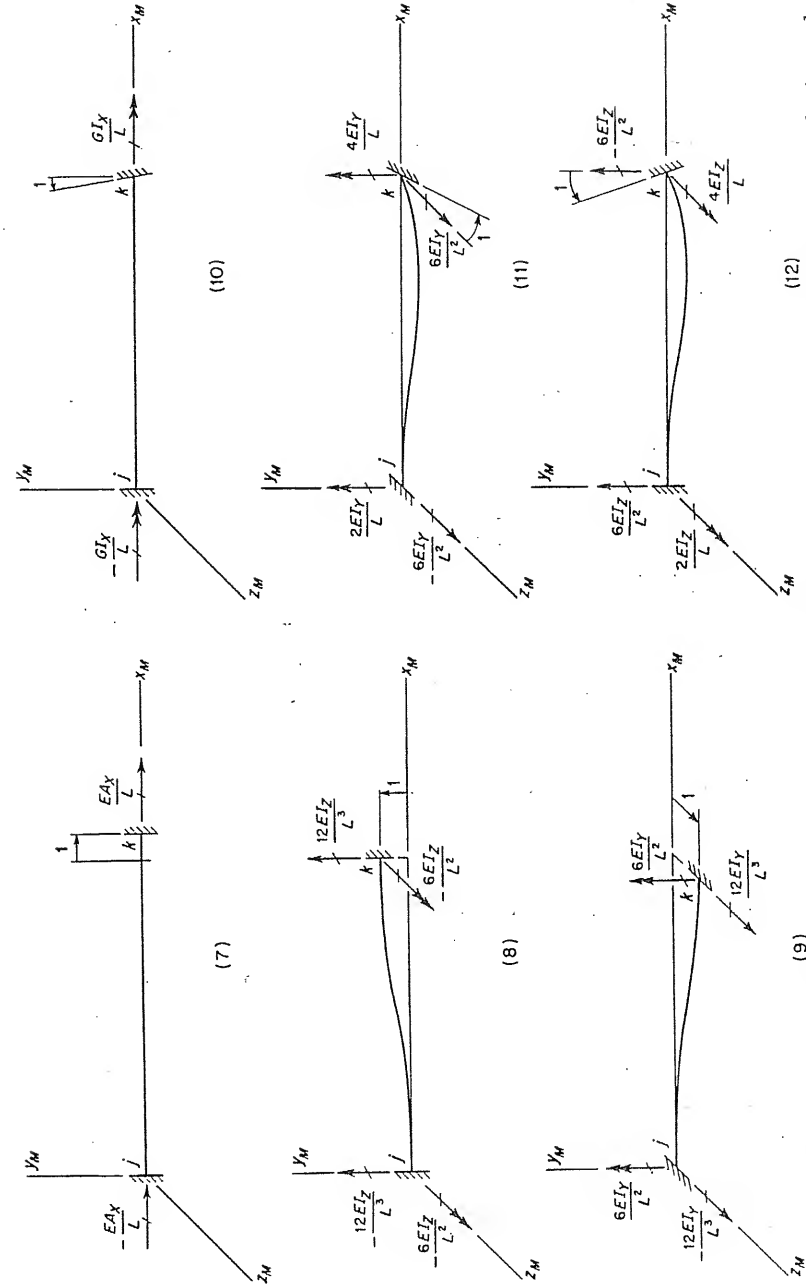
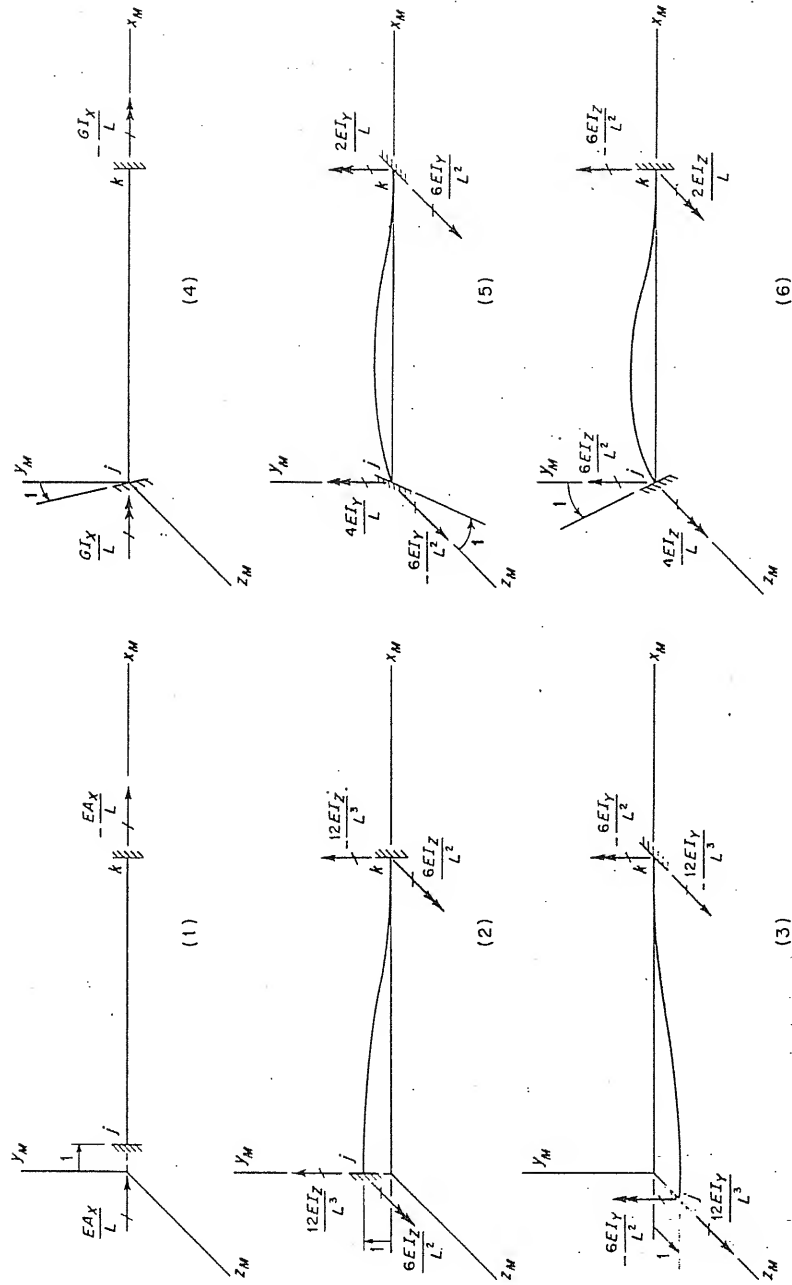


Fig. 4-2.

Rigideces de miembro: (1) translación unitaria de j en el eje x_M ; (2) translación unitaria de j en el eje y_M ; (3) translación unitaria de j en el eje z_M ; (4) giro unitario en j alrededor del eje x_M ; (5) giro unitario en j alrededor del eje y_M ; (6) giro unitario en j alrededor del eje z_M ; (7) translación unitaria de k en el eje x_M ; (8) translación unitaria de k en el eje y_M ; (9) translación unitaria de k en el eje z_M ; (10) giro unitario en k alrededor del eje x_M ; (11) giro unitario en k alrededor del eje y_M ; y (12) giro unitario en k alrededor del eje z_M .

TABLA 4-1
TABLA 4-1. MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO DE UNA ESTRUCTURA EN EL ESPACIO

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{EA_x}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{EA_x}{L}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$
0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0
0	0	0	$\frac{GI_x}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GI_x}{L}$	0	0
0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_y}{L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_y}{L}$	0
0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$
$-\frac{EA_x}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA_x}{L}$	0	0	0	0	0
0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$
0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0
0	0	0	$-\frac{GI_x}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GI_x}{L}$	0	0
0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$-\frac{2EI_y}{L}$	0	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$-\frac{2EI_y}{L}$	0
0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$

$S_M =$

Considérese ahora un miembro de una viga continua entre dos apoyos libres llamados j y k , según se muestra en la Fig. 4-3a. Las direcciones de los ejes x_M , y_M y z_M están tomadas como se muestra en la figura, por lo que el plano x_M - y_M es el plano de flexión de la viga. En un miembro de una viga continua hay cuatro tipos signifi-

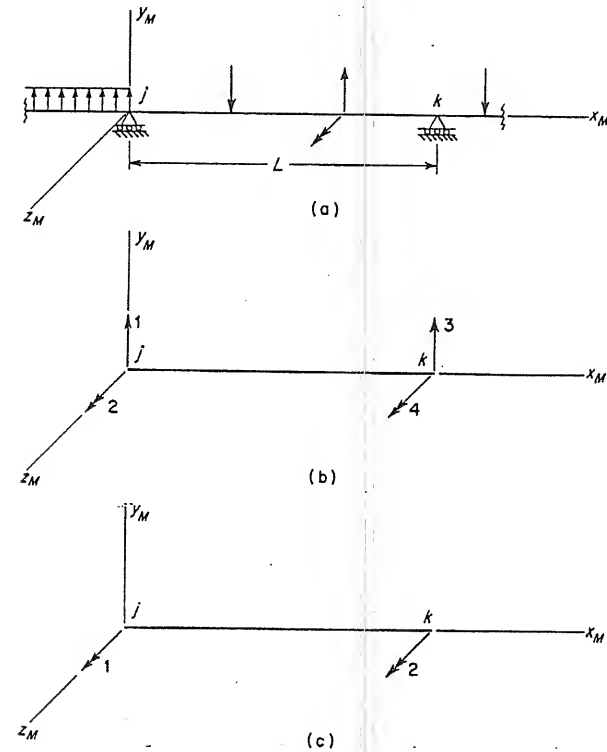


FIG. 4-3. Miembro de una viga continua

cantes de desplazamientos que pueden ocurrir en los extremos del miembro. Estos desplazamientos están indicados en la Fig. 4-3b por los vectores numerados del 1 al 4. La matriz correspondiente a la rigidez del miembro es de orden de 4×4 y está mostrada en la Tabla 4-2. Los elementos de esta matriz se obtienen de los casos (2), (6), (8) y (12) de la Fig. 4-2.

Para problemas de vigas continuas, en las que los apoyos no permiten desplazamientos en los nudos, sólo son posibles los giros mostrados en la Fig. 4-3c. En tal caso se pueden suprimir el primer y tercer renglones y columnas de S_M , y la reducción y la matriz de rigi-

dez de miembro reducida consistiría de los elementos restantes como se muestra en la Tabla 4-3.

La matriz de rigidez de miembro dada en la Tabla 4-2 se utilizará en el análisis de vigas continuas. Las matrices de rigidez de miembro para otros tipos de estructuras reticulares serán discutidas en artículos posteriores.

TABLA 4-2. MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO DE UNA VIGA PRISMÁTICA

$$S_M = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

TABLA 4-3. MATRIZ REDUCIDA DE RIGIDEZ DE MIEMBRO

$$S_M = \begin{bmatrix} \frac{4EI_z}{L} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{2EI_z}{L} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

4.4. Matriz de rigidez de nudo total. El concepto de la matriz de rigidez de nudo total será explicado en la viga de dos claros mostrada en la Fig. 4-4a. Esta viga es la misma previamente analizada en el Cap. 2, excepto que no se indica un sistema particular de carga. Como en el ejemplo anterior, supóngase que la rigidez a la flexión EI_z de la viga es constante a través de toda su longitud. A fin de identificar los diferentes desplazamientos de nudo, considérese que la viga descargada está completamente empotrada en todos sus nudos, como se muestra en la Fig. 4-4b. En esta figura se indica un sistema de numeración para los seis posibles desplazamientos de nudo que podrían ocurrir en la estructura. Los primeros dos (los giros en B y C) pueden ocurrir libremente, pero los últimos cuatro (la translación y giro en A y las translaciones en B y C) están restringidos por los apoyos.

Uno puede pensar en términos de generar para esta estructura una *matriz de la rigidez de nudo total* S_J , que contiene términos para todos los desplazamientos de nudo posibles, incluyendo aquellos res-

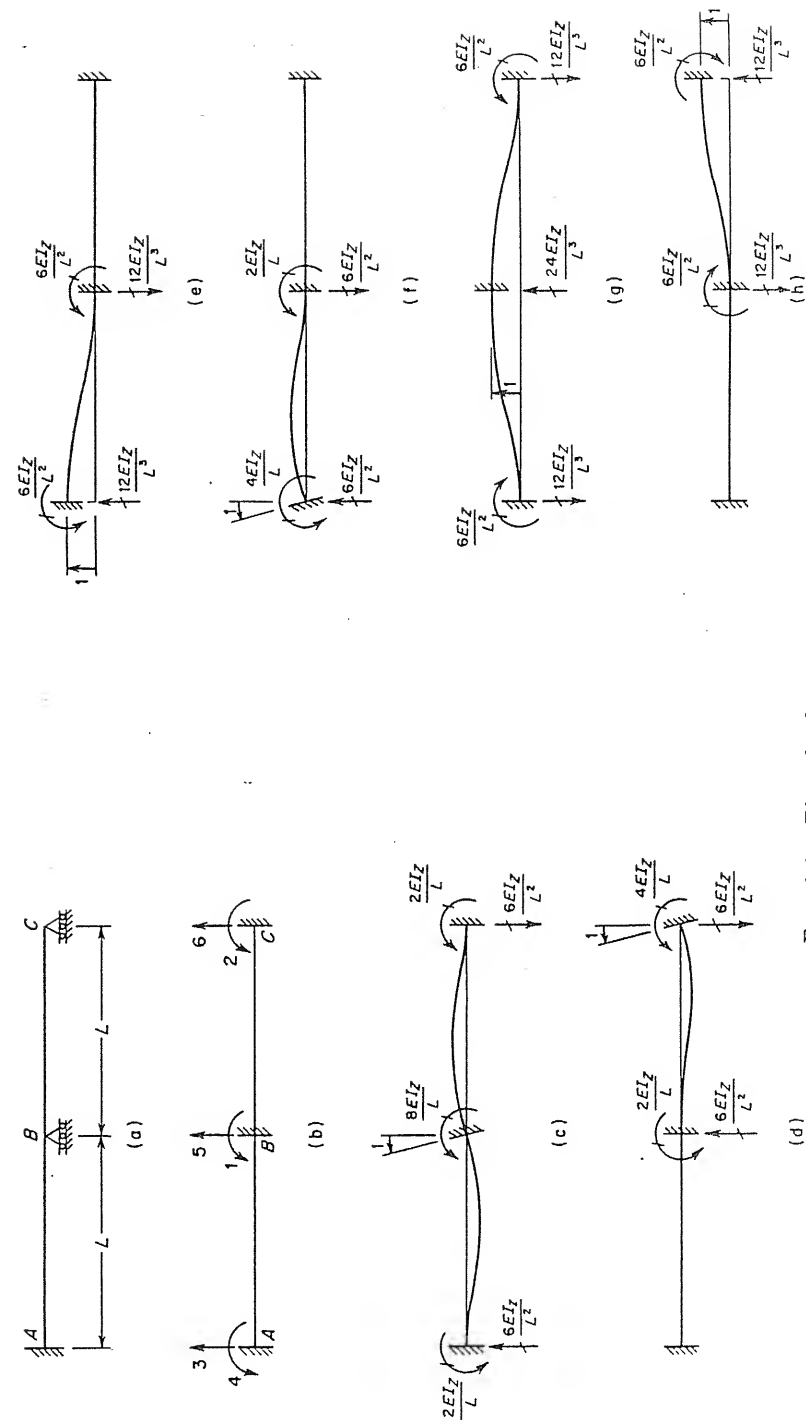


FIG. 4-4. Ejemplo de una viga continua

tringidos por los apoyos. La construcción de una matriz tal para esta viga toma en consideración los seis desplazamientos unitarios mostrados en las Figs. 4-4c a 4-4h. Estas figuras señalan traslaciones unitarias verticales (supóngase que son positivas hacia arriba) y giros unitarios (supóngase que son positivos si son en sentido contrario al de las manecillas del reloj) en la secuencia indicada por el sistema de numeración (Fig. 4-4b). Las acciones de restricción resultantes mostradas en las figuras se convierten en elementos de la matriz de rigidez de nudo (la convención de signos para las acciones de restricción corresponde a la misma de los desplazamientos). Las acciones de restricción en la Fig. 4-4c, por ejemplo, constituyen los elementos de la primera columna en la matriz de rigidez de nudo S_J . El primer elemento es $8EI/L$, el segundo elemento es $2EI/L$, el tercero es $6EI/L^2$, y así, sucesivamente.* De igual modo, las acciones de las Figs. 4-4d hasta 4-4h constituyen los elementos de la segunda a la sexta columnas de la matriz de rigidez de nudo. Por lo tanto, el arreglo total para la viga de dos claros se ve que es la matriz mostrada en la Tabla 4-4. La matriz es del orden de 6×6 debido a que hay por considerar

TABLA 4-4. MATRIZ DE RIGIDEZ DE NUDO PARA UNA VIGA DE DOS CLAROS

$S_J =$	$\frac{8EI}{L}$	$\frac{2EI}{L}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	$-\frac{6EI}{L^2}$	Libre para desplazar
	$\frac{2EI}{L}$	$\frac{4EI}{L}$	0	0	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	
	$\frac{6EI}{L^2}$	0	$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	0	Restricciones de apoyo
	$\frac{2EI}{L}$	0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	
	0	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{24EI}{L^3}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	
	$-\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	0	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{12EI}{L^3}$	
	Libre para desplazar		Restricciones de apoyo				

seis desplazamientos de nudo. Nótese que la matriz es cuadrada y simétrica. El desarrollo de su determinante también mostraría que

* Por conveniencia, se omite el subíndice Z del momento de inercia.

es singular debido al hecho de que ciertos renglones y columnas son combinaciones lineales de otros. Por lo que, las condiciones de frontera en el problema deben ser reconocidas en la forma de los apoyos reales antes de seguir más adelante.

Una división de la matriz de rigidez de nudo S_J , respecto a que si son libres los desplazamientos o están restringidos por apoyos, se indica en la Tabla 4-4. Con esta división se puede considerar que la matriz consiste de cuatro partes, como sigue:

$$S_J = \begin{bmatrix} S & S_{DR} \\ S_{RD} & S_{RR} \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

Cada una de las submatrices en la Ec. (4-1) tiene un significado físico que ahora será explicado.

La matriz de rigidez S en la parte superior izquierda de S_J es una matriz de rigidez, simétrica y cuadrada que corresponde a los desplazamientos desconocidos en la estructura, esto es, a los grados de libertad. Es la misma matriz de rigidez S previamente obtenida para esta estructura (véase el Art. 2.8):

$$S = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

La inversa de S se puede obtener de la manera usual:

$$S^{-1} = \frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

y después sustituirse en la siguiente ecuación (véase la Ec. 2-24):

$$D = S^{-1}(A_D - A_{DL}) \quad (4-2)$$

con el objeto de calcular los desplazamientos desconocidos.

La matriz S_{RD} es una submatriz rectangular de S_J que contiene acciones correspondientes a las restricciones de los apoyos, debidas a los valores unitarios de los desplazamientos correspondientes a los grados de libertad. En otras palabras, esta submatriz da las reacciones para la estructura debidas a los valores unitarios de los desplazamientos desconocidos D . Por lo tanto, la matriz S_{RD} es la matriz que previamente fue llamada A_{RD} en la Ec. (2-26). Por lo tanto,

$$S_{RD} = A_{RD} \quad (4-3)$$

y la Ec. (2-26) puede ser reescrita en términos de S_{RD} , como sigue:

$$A_R = A_{RL} + S_{RD}D \quad (4-4)$$

La submatriz S_{DR} representa las acciones correspondientes a los grados de libertad y causadas por desplazamientos unitarios correspondientes a las restricciones de apoyo. Se puede ver que S_{DR} es el transpuesto de S_{RD} :

$$S_{DR} = S_{RD}'$$

La matriz S_{RR} es una submatriz cuadrada y simétrica de S_j que contiene acciones correspondientes a las restricciones de apoyo debidas a los desplazamientos unitarios correspondientes al mismo grupo de restricciones. Las submatrices S_{DR} y S_{RR} pueden ser usadas en el análisis de estructuras que tienen desplazamientos en sus apoyos (véase el Art. 6.5).

En el ejemplo de la viga de dos claros la matriz S es sólo una pequeña parte de la matriz de rigidez de nudo S_j (véase la Tabla 4-4). Esto se debe al hecho de que la estructura está altamente restringida. En grandes estructuras que tienen muchos nudos y relativamente pocos apoyos, la matriz S constituye la mayor parte de S_j .

4.5. Cargas. Después de encontrar la matriz de rigidez de nudo, el siguiente paso en el análisis es considerar las cargas sobre la estructura, según se mencionó en el resumen del método (véase el Art. 4.2). Es conveniente manejar inicialmente por separado las cargas en los nudos y las cargas en los miembros. El motivo para hacer esto es que las cargas de nudo y las cargas de miembros se tratan en formas diferentes. Las cargas de nudo están listas para colocarlas de inmediato en un vector de acciones que se usará en la solución, pero las cargas sobre los miembros serán tomadas en cuenta calculando las acciones de empotramiento que producen. Estas acciones de empotramiento podrán ser transformadas a cargas equivalentes de nudo y combinadas con las cargas reales de nudo sobre la estructura (véase el Art. 3.2 para una discusión de cargas equivalentes de nudo).

Las cargas aplicadas en los nudos podrán agruparse en un vector A , el cual contiene las cargas aplicadas correspondientes a todos los desplazamientos de nudo posibles, incluyendo aquellos en los apoyos restringidos. Los elementos en A se numeran en la misma forma que los desplazamientos de nudo. Para el ejemplo de la viga de dos claros, el sistema de numeración está mostrado en la Fig. 4-4b. Si la viga está sujeta a las cargas mostradas en la Fig. 4-5a (que muestra las mismas cargas de la Fig. 2-14), las cargas de nudo son el par M en el nudo B y la fuerza P_3 en el nudo C . Por lo tanto, el vector A toma la forma*

* Según se mencionó previamente en el Cap. 3, se usan paréntesis { } para denominar un vector columna que está escrito en un renglón.

$$A = \{M, 0, 0, 0, 0, P_3\}$$

o, sustituyendo para M y para P_3 los valores mostrados en la figura:

$$A = \{PL, 0, 0, 0, 0, P\}$$

El momento M y la fuerza P_3 en el vector A son positivos, debido a que M actúa en sentido contrario al de las manecillas del reloj y P_3 actúa hacia arriba. En general, las cargas de nudo en una viga continua pueden ser una fuerza y un par en todos los nudos.

Las cargas restantes sobre la estructura (P_1 y P_2) actúan directamente sobre los miembros y están mostradas actuando sobre los dos miembros de la estructura fija en la Fig. 4-5b. También se muestran en la figura las acciones de empotramiento en los extremos de los miembros. Estas acciones de empotramiento pueden agruparse en una matriz rectangular A_{ML} en la que cada renglón contiene las acciones de extremo para un miembro dado. Previamente, la matriz A_{ML} se manejó como un vector (véase la Ec. 2-25). Sin embargo, cuando todas las acciones de extremo de todos los miembros se van a considerar en el análisis, se hace más conveniente manejar A_{ML} como una

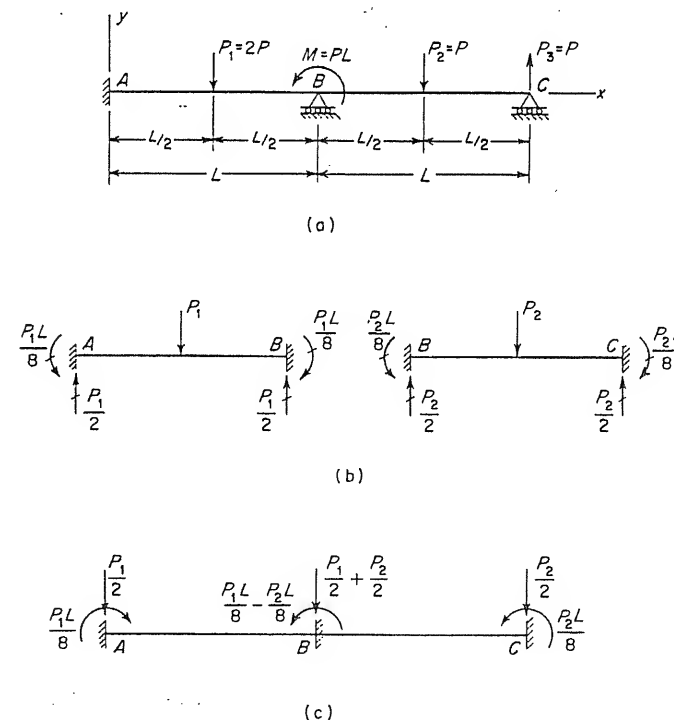


FIG. 4-5. Cargas combinadas de nudo

matriz rectangular. Por lo tanto, la definición del significado de A_{ML} permanece igual, pero su formato cambia. En una viga hay dos tipos importantes de acciones de empotramiento, a saber, las fuerzas cortantes y los momentos. En consecuencia, cada renglón de la matriz A_{ML} contendrá para un miembro la fuerza cortante y el momento en el extremo izquierdo y la fuerza cortante y el momento en el extremo derecho, en ese orden. Como se muestra en la Fig. 4-5b, las acciones de empotramiento sobre el miembro AB son la fuerza cortante $P_1/2$ y el par $P_1L/8$ en el extremo izquierdo, y la fuerza cortante $P_1/2$ y el par $-P_1L/8$ en el extremo derecho. Estas acciones constituyen el primer renglón de la matriz A_{ML} . El segundo renglón se construye en una forma similar aparte de las acciones de extremo para el miembro BC. Por lo tanto, la matriz es

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} \frac{P_1}{2} & \frac{P_1L}{8} & \frac{P_1}{2} & -\frac{P_1L}{8} \\ \frac{P_2}{2} & \frac{P_2L}{8} & \frac{P_2}{2} & -\frac{P_2L}{8} \end{bmatrix}$$

En general, esta matriz tendrá tantos renglones como miembros tenga la estructura. Cuando los valores mostrados en la Fig. 4-5a son sustituidos por las cargas, la matriz A_{ML} se convierte en

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} P & \frac{PL}{4} & P & -\frac{PL}{4} \\ \frac{P}{2} & \frac{PL}{8} & \frac{P}{2} & -\frac{PL}{8} \end{bmatrix}$$

Cuando las acciones de empotramiento de A_{ML} se invierten en dirección, constituyen las cargas equivalentes de nudo, y para la viga de dos claros están mostradas en la Fig. 4-5c. Las cargas en los nudos A y C son, simplemente, la inversa de las acciones en la Fig. 4-5b, mientras que las cargas equivalentes en el nudo B consisten de las sumas de las acciones de los miembros AB y BC. Estas cargas equivalentes de nudo pueden ser colocadas en un vector A_E que tiene la misma forma que el vector A de las cargas reales de nudo:

$$A_E = \left\{ \frac{P_1L}{8} - \frac{P_2L}{8}, \frac{P_2L}{8}, -\frac{P_1}{2}, -\frac{P_1L}{8}, -\frac{P_1}{2} - \frac{P_2}{2}, -\frac{P_2}{2} \right\}$$

o, con los valores apropiados sustituidos por las cargas,

$$A_E = \left\{ \frac{PL}{8}, \frac{PL}{8}, -P, -\frac{PL}{4}, -\frac{3P}{2}, -\frac{P}{2} \right\}$$

Las cargas equivalentes de nudo están colocadas en este vector en la secuencia dada por el sistema de numeración en la Fig. 4-4b, y los signos se determinan por la convención previamente descrita.

Las cargas reales de nudo (vector A) pueden sumarse a las cargas equivalentes de nudo (vector A_E) para producir el vector de cargas combinadas A_C :

$$A_C = A + A_E \quad (4-5)$$

Sustituyendo en la Ec. (4-5) los valores de los vectores A y A_E obtenidos arriba, se tiene:

$$A_C = \left\{ \frac{9PL}{8}, \frac{PL}{8}, -P, -\frac{PL}{4}, -\frac{3P}{2}, \frac{P}{2} \right\}$$

Se puede ver que el vector A_C consiste de dos partes. La primera (los primeros dos elementos en el ejemplo) representa la suma de las cargas reales y equivalentes de nudo correspondientes a los grados de libertad conocidos en el problema. Por lo tanto, esta parte de A_C es realmente el vector A_D (o $A_n - A_{DL}$ con A_{DL} un vector nulo) en las Ecs. (2-23) y (4-2). La segunda parte del vector A_C (los últimos cuatro elementos en el ejemplo) consiste de la suma de las cargas reales y equivalentes de nudo correspondientes a las restricciones de apoyo sobre la estructura. Si los signos de los elementos de esta parte de A_C son invertidos, aparece el vector A_{RL} en la Ec. (4-4). En resumen, el vector de cargas combinadas A_C se ve que está compuesto como sigue:

$$A_C = \begin{bmatrix} A_D \\ \text{-----} \\ -A_{RL} \end{bmatrix} \quad (4-6)$$

En el ejemplo,

$$A_D = \left\{ \frac{9PL}{8}, \frac{PL}{8} \right\}$$

y

$$A_{RL} = \left\{ P, \frac{PL}{4}, \frac{3P}{2}, -\frac{P}{2} \right\}$$

La formación de los vectores A_D y A_{RL} en la forma arriba indicada fija la etapa para la terminación del análisis de la estructura. El hecho de que los efectos de las cargas sobre los miembros se hayan puesto en la forma de cargas equivalentes de nudo, automáticamente implica que el vector A_{DL} es nulo (todos los elementos iguales a cero). Por este acercamiento, las Ecs. (2-23) y (4-2) se pueden simplificar como sigue:

$$A_D = SD \quad (4-7)$$

$$D = S^{-1}A_D \quad (4-8)$$

4.6. Cálculo de resultados. En la fase final del análisis, las matrices generadas en los pasos previos (véanse los Arts. 4.4 y 4.5) se sustituyen en las ecuaciones apropiadas con el propósito de calcular los desplazamientos de nudo desconocidos, D , las reacciones A_R y las acciones de extremo, A_M , de los miembros. Los desplazamientos desconocidos D , se encuentran por sustitución de las matrices S^{-1} y A_D en la Ec. (4-8). Para la viga de dos claros (Figs. 4-5a), la solución se convierte en

$$D = S^{-1}A_D = \frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} PL = \frac{PL^2}{112EI} \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Las reacciones A_R se encuentran sustituyendo las matrices A_{RL} , S_{RD} y D en la Ec. (4-4). Esta sustitución para el ejemplo produce el siguiente resultado:

$$A_R = \begin{bmatrix} P \\ \frac{PL}{4} \\ \frac{3P}{2} \\ -\frac{P}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{112EI} = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 107 \\ 31L \\ 69 \\ -64 \end{bmatrix}$$

Los resultados dados arriba para los vectores D y A_R son los mismos previamente obtenidos en el Art. 2.8.

Las acciones de extremo A_M del miembro podrían ser obtenidas usando la Ec. (2-25), según se hizo en el Cap. 2. Sin embargo, en los ejemplos del Cap. 2 únicamente unas cuantas acciones de extremo seleccionadas fueron calculadas. Si todas las acciones en los extremos de todos los miembros se van a calcular, es más conveniente trabajar con un miembro a la vez en lugar de con toda la estructura. Las acciones de extremo finales en un miembro dado consisten de la superposición de las acciones de empotramiento iniciales y los efectos adicionales causados por los desplazamientos de los extremos del miembro. Esta superposición de acciones está expresada para el i ésimo miembro en una estructura por la siguiente ecuación, la cual tiene una forma similar a la Ec. (2-25).

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [S_M]_i \{D_M\}_i \quad (4-9)$$

En esta expresión $\{A_M\}_i$ es el vector de acciones finales de extremo para el miembro. El primer término en el lado derecho de la ecuación, que es $\{A_{ML}\}_i$, es un vector de acciones de empotramiento para el miembro. En otras palabras, este vector contiene los elementos de el i ésimo renglón de la matriz rectangular A_{ML} descrita en el Art. 4.5. El segundo término en el lado derecho de la Ec. (4-9) consiste del producto de la matriz de rigidez de miembro $[S_M]_i$ y el vector $\{D_M\}_i$. Los elementos del último son los desplazamientos de los extremos del miembro.*

La Ec. (4-9) será ahora aplicada en el ejemplo. Déjese que los miembros AB y BC sean llamados miembros 1 y 2, respectivamente. Entonces $\{A_M\}_1$ consistirá de cuatro elementos, que son el cortante y el momento en el extremo izquierdo del miembro AB y el cortante y el momento en el extremo derecho, tomados en ese orden. Similarmente, $\{A_M\}_2$ está compuesto de las cuatro acciones de extremo para el miembro BC.

En el ejemplo el vector $\{A_{ML}\}_1$, que consiste de las acciones de empotramiento para el miembro AB, sale del primer renglón de la matriz A_{ML} ; por lo tanto:

$$\{A_{ML}\}_1 = \left\{ P, \frac{PL}{4}, P, -\frac{PL}{4} \right\}$$

Similarmente, el vector $\{A_{ML}\}_2$ de acciones de empotramiento para el miembro BC consiste de los elementos del segundo renglón de A_{ML} :

$$\{A_{ML}\}_2 = \left\{ \frac{P}{2}, \frac{PL}{8}, \frac{P}{2}, -\frac{PL}{8} \right\}$$

Considérense ahora los desplazamientos D_M en los extremos de los miembros. El único desplazamiento de extremo que el miembro AB experimenta es el giro de su extremo derecho. La translación y rotación en su extremo izquierdo y la translación en su extremo derecho valen cero debido a las restricciones de apoyo. Por lo tanto, el vector de desplazamientos de extremo para el miembro AB es

$$\{D_M\}_1 = \left\{ 0, 0, 0, \frac{17PL^2}{112EI} \right\}$$

En esta expresión el subíndice 1 denota el hecho que el vector se refiere al primer miembro en la estructura. El orden en que los desplazamientos de extremo están colocados en el vector sigue al modelo dado en la Fig. 4-3b. Similarmente, los desplazamientos de extremo en el miembro BC pueden ser colocados en un segundo vector como sigue:

* La Ec. (4-9) es también análoga a la Ec. (3-24), previamente usada en el método de la flexibilidad.

$$\{D_M\}_2 = \left\{0, \frac{17PL^2}{112EI}, 0, -\frac{5PL^2}{112EI}\right\}$$

Teniendo a la mano los vectores de arriba, uno puede entonces aplicar dos veces la Ec. (4-9) (una vez por cada miembro) a fin de valuar las acciones de extremo finales en los miembros AB y BC. En ambas aplicaciones, la matriz $[S_M]_i$ de rigidez de miembro es la misma (debido a los claros iguales y a la rigidez de flexión constante), y está dada en la Tabla 4-2 (véase el Art. 4.3). Por lo tanto, las ecuaciones se convierten

$$\{A_M\}_1 = \{A_{ML}\}_1 + [S_M]_1 \{D_M\}_1$$

$$= \begin{bmatrix} P \\ \frac{PL}{4} \\ P \\ -\frac{PL}{4} \end{bmatrix} + [S_M]_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{112EI} = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 107 \\ 31L \\ 5 \\ 20L \end{bmatrix}$$

$$\{A_M\}_2 = \{A_{ML}\}_2 + [S_M]_2 \{D_M\}_2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ \frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{bmatrix} + [S_M]_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 17 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{112EI} = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} 64 \\ 36L \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En esta forma, todas las acciones de extremo de los miembros han sido obtenidas.

Los cálculos anteriores pueden aparecer al principio innecesariamente extensivos y engorrosos y, desde luego, lo son para la pequeña estructura usada como ejemplo. La ventaja, sin embargo, descansa en el hecho de que representan un procedimiento ordenado que puede ser programado con rapidez para una computadora y, por lo tanto, puede ser aplicado repetidamente a cualquier número de miembros.

4.7. Sistemas de numeración arbitrarios. En los artículos anteriores la viga de dos claros mostrada en las Figs. 4-4 y 4-5 se discutió de acuerdo con un sistema de numeración particular para los desplazamientos de nudo indicados en la Fig. 4-4b. Este sistema de numeración identifica primeramente todos los desplazamientos que

son libres de suceder y, en seguida identifica los posibles desplazamientos correspondientes a las restricciones de apoyo. En cada una de las dos categorías, los desplazamientos están tomados en un orden conveniente con las translaciones precediendo a los giros en cada nudo. Sin embargo, generalmente es preferible, en un análisis práctico, poder numerar los desplazamientos en una forma arbitraria. Entonces, todas las matrices requeridas en el análisis pueden ser generadas de conformidad con el sistema de numeración arbitrario. Subsecuentemente, estas matrices pueden ser arregladas de nuevo, a fin de que correspondan a un sistema de numeración del tipo mostrado en la Fig. 4-4b. En otras palabras, el nuevo arreglo de las matrices es equivalente a la transformación del sistema arbitrario de numeración al sistema original de numeración. Al hacer esto, las diferentes matrices pueden ser divididas en una forma que separe los elementos asociados con los grados de libertad de aquellos asociados con las restricciones de apoyo.

Considérese de nuevo a la viga de dos claros de la Fig. 4-4 e imagine que está completamente restringida en todos sus nudos, según muestra la Fig. 4-6. Se puede considerar que la estructura puede ser desunida de cualquier número particular de condiciones de apoyo para el propósito de generar la matriz de la rigidez total de un nudo S_i . Si los desplazamientos de la estructura están numerados sin considerar los grados de libertad originales o las condiciones de apoyo original, una variedad de proyectos de numeración puede ser usada. En la Fig. 4-6 se indica un sistema conveniente de numeración

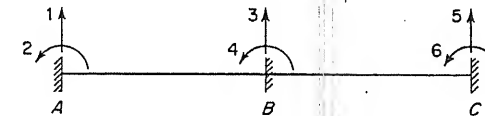


FIG. 4-6. Sistema arbitrario de numeración

(compárese la Fig. 4-6 con la Fig. 4-4b). En este sistema la posible translación y posible giro en cada nudo están numerados en serie y los nudos están tomados en el orden de izquierda a derecha. La construcción de la matriz de rigidez de nudo S_i incluye los seis desplazamientos unitarios de la estructura restringida previamente mostrada en las Figs. 4-4c a la 4-4h, pero ahora deben ser tomadas en diferente orden. Para cumplir con el sistema arbitrario de numeración, a cada nudo en turno, de izquierda a derecha, se le da una translación vertical unitaria y en seguida un giro unitario. Por lo tanto, los elementos de las seis columnas de S_i se pueden obtener de las Figs. 4-4e, 4-4f, 4-4g, 4-4c, 4-4h y 4-4d en ese orden. Por ejemplo, la Fig. 4-4e

proporciona los elementos de la primera columna de la matriz de rigidez de nudo. El primer elemento es $12EI/L^3$, el segundo elemento es $6EI/L^2$, el tercer elemento es $-12EI/L^3$, el cuarto es $6EI/L^2$ y los últimos dos son cero. Las otras cinco columnas de S_j se obtienen de una forma similar. La matriz de rigidez resultante es cuadrada, simétrica, de orden 6×6 y se muestra en la Tabla 4-5. El lector debe rectificar todos los términos de esta matriz refiriéndose a la Fig. 4-4. La razón para formar la matriz S_j en la forma mostrada en la Tabla 4-5 es que puede hacerse automáticamente operando consecutivamente con todos los nudos en la estructura.

También es importante notar el modelo en que las rigideces de miembro contribuyen a la matriz de rigidez de nudo. Este modelo se indica en la Tabla 4-5 por las dos secciones de S_j delineadas por las líneas punteadas y que se traslapan en la parte central. La sección superior izquierda de 4×4 recibe contribuciones de la matriz de rigidez de miembro del miembro AB (véase Tabla 4-2, Art. 4.3), y la sección inferior derecha de 4×4 recibe contribuciones de la matriz de rigidez de miembro del miembro BC. Juntas, estas dos matrices de rigidez de miembro (que son ambas las mismas en este ejemplo) constituyen la matriz de rigidez de nudo para la viga de dos claros. En la porción de traslape de S_j , los elementos consisten de la suma de contribuciones de los miembros AB y BC. Por ejemplo, el elemento S_{j33} (igual a $24EI/L^3$) es la suma

TABLA 4-5. MATRIZ DE RIGIDEZ DE NUDO PARA LA VIGA DE LA FIG. 4-6

Miembro AB					
$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	0
$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	0
$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{24EI}{L^3}$	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$
$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	$\frac{8EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$
0	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$
0	0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$
Miembro BC					

de S_{M33} (igual a $12EI/L^3$) para el miembro AB más S_{M11} (igual a $12EI/L^3$) para el miembro BC. Similarmente, S_{j34} (igual a 0) es la suma de S_{M34} (igual a $-6EI/L^2$) para el miembro AB más S_{M12} (igual a $6EI/L^2$) para el miembro BC. Otros elementos de S_j , fuera de la parte de traslape pero dentro de las líneas punteadas, consisten de una sola contribución de cualquiera de los miembros AB o BC. Los elementos de S_j fuera de las líneas punteadas valen todos cero debido a la naturaleza de la estructura. Por lo tanto, el uso del sistema arbitrario de numeración da como resultado una matriz de rigidez de nudo, en la que las contribuciones de las rigideces de miembro pueden ser claramente vistas. Ciertamente, una de las características esenciales de un programa de computación para el análisis por el método de la rigidez, incluye la formación de S_j combinando las contribuciones de las matrices de rigidez de los miembros individuales.

A fin de que la matriz de rigidez S_j en la Tabla 4-5 sea útil, los grados reales de libertad y restricciones de apoyo en una estructura dada deben reconocerse, y la matriz debe ser puesta en la forma dada en la Tabla 4-4 (véase el Art. 4.4). En otras palabras, la matriz de rigidez de nudo debe ser nuevamente arreglada intercambiando renglones y columnas en una forma tal que las rigideces correspondientes a los grados reales de libertad sean citadas primero y las correspondientes a las restricciones de apoyo sean citadas en segundo lugar. En el presente problema, los grados reales de libertad son los giros en los nudos B y C, que corresponden al cuarto y sexto renglones y cuarta y sexta columnas de la matriz S_j . Si el cuarto y sexto renglones se cambian al primero y segundo renglones, en tanto que los otros se mueven hacia abajo sin cambiar su orden, la matriz toma la forma mostrada en la Tabla 4-6.

En seguida, la cuarta y sexta columnas de la matriz de rigidez son cambiadas a las primeras dos columnas y todas las demás son cambiadas a la derecha sin alterar su orden. Este nuevo arreglo produce la misma matriz de rigidez de nudo simétrica que fue previamente formada y que se muestra en la Tabla 4-4. Esta matriz de aquí en adelante se llamará *matriz de rigidez de nudo de nuevo arreglo*. Como antes, puede ser dividida en la forma indicada por la Ec. (4-1).

Los vectores de carga A , A_E , y A_C pueden también construirse en unión con un sistema arbitrario de numeración y en seguida volverse a arreglar y dividir de acuerdo con los grados de libertad reales y las restricciones de apoyo. Ya que el último de estos vectores es la suma de los dos primeros (véase la Ec. 4-5), es posible volver a arreglarlo en cualquiera de las dos formas. Los dos primeros

TABLA 4-6. MATRIZ DE RIGIDEZ DE NUDO CON NUEVO ARREGLO DE RENGLONES

$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	$\frac{8EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$
0	0	$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$
$\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$	0	0
$\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{4EI}{L}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{2EI}{L}$	0	0
$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{24EI}{L^3}$	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$\frac{6EI}{L^2}$
0	0	$-\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$	$\frac{12EI}{L^3}$	$-\frac{6EI}{L^2}$

vectores (\mathbf{A} y \mathbf{A}_E) pueden ser formados de conformidad con el sistema arbitrario de numeración, nuevamente arreglados, y en seguida sumados. Como resultado, el vector \mathbf{A}_C está automáticamente en forma rearrreglada. Alternativamente, los vectores \mathbf{A} y \mathbf{A}_E pueden formarse con el sistema arbitrario de numeración y en seguida sumarse para dar \mathbf{A}_C . Entonces, como paso final el vector \mathbf{A}_C debe ser rearrreglado.

Para ilustrar el último de estos dos procedimientos, imagine que los vectores de carga \mathbf{A} y \mathbf{A}_E se obtienen para la viga de la Fig. 4-5a, utilizando el sistema arbitrario de numeración mostrado en la Fig. 4-6. De los datos del Art. 4-5, se puede ver que estos vectores ahora se convierten en

$$\mathbf{A} = \{0, 0, 0, PL, P, 0\}$$

$$\mathbf{A}_E = \left\{ -P, -\frac{PL}{4}, -\frac{3P}{2}, \frac{PL}{8}, -\frac{P}{2}, \frac{PL}{8} \right\}$$

La suma de los vectores (véase la Ec. 4-5) es

$$\mathbf{A}_C = \left\{ -P, -\frac{PL}{4}, -\frac{3P}{2}, \frac{9PL}{8}, \frac{P}{2}, \frac{PL}{8} \right\}$$

que también está de acuerdo con el sistema arbitrario de numeración. Entonces el vector \mathbf{A}_C debe ser rearrreglado de acuerdo con el sistema de numeración de la Fig. 4-4b moviendo los elementos cuarto y sexto a la primera y segunda posiciones y moviendo los demás hacia el extremo sin cambiar su orden. Este rearrreglo produce a \mathbf{A}_C en la misma forma en que fue originalmente construido en el Art. 4.5:

$$\mathbf{A}_C = \left\{ \frac{9PL}{8}, \frac{PL}{8}, -P, -\frac{PL}{4}, -\frac{3P}{2}, \frac{P}{2} \right\}$$

Este vector puede ser dividido como previamente se muestra en la Ec. (4-6).

Después que las matrices fueron rearrregladas y divididas, según se describió arriba, el resto del análisis es el mismo que el descrito en el Art. 4.6.

4.8. Análisis de vigas continuas. Las vigas continuas por discutir en este artículo se supone que consisten de miembros prismáticos rígidamente conectados entre sí y apoyados en varios puntos a lo largo de sus longitudes. Los nudos de una viga continua serán normalmente seleccionados en los puntos de apoyo y en cualquier extremo libre o en voladizo. Sin embargo, en los casos donde hay cambios en las secciones transversales entre los puntos de apoyo, de tal forma que el miembro consista de dos o más segmentos prismáticos, siempre es posible analizar la viga considerando que existe un nudo en el cambio de sección (véase el Prob. 2.9-14). Esta técnica para resolver, será ilustrada en el ejemplo del siguiente artículo. Otro método de análisis de una viga con cambios en su sección, y que no requiere introducción de nudos adicionales a la estructura, se describirá en el Art. 6.8.

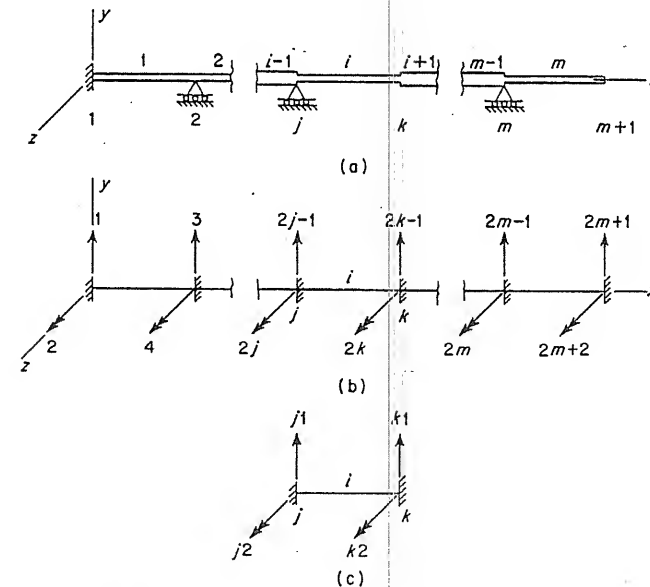


FIG. 4-7. Sistema de numeración para una viga continua

Una viga continua que tiene m miembros y $m + 1$ nudos está mostrada en la Fig. 4-7a. El plano $x-y$ es el plano de flexión de la viga. Los miembros en la figura están numerados arriba de la viga, y los nudos están numerados bajo la viga. En cada caso, la numeración es de izquierda a derecha a lo largo de la viga. La parte central de la Fig. 4-7a muestra el i ésimo miembro empotrado en su extremo izquierdo en un nudo designado como nudo j , y empotrado en su extremo derecho en un punto designado como nudo k . Nótese que el sistema de numeración para los miembros y para los nudos es tal que el nudo número j debe ser numéricamente igual al miembro número i , y el nudo número k debe ser igual a $i + 1$. Esta relación particular entre la numeración de los miembros y la numeración de los nudos, es por supuesto, válida únicamente para vigas continuas. También, se puede ver que en este caso el número total de nudos, llamadas de aquí en adelante como n_j , es siempre uno más que el número de miembros; por lo tanto, $n_j = m + 1$.

Pueden existir restricciones de apoyo de dos tipos en cualquier nudo de una viga continua. Estas son una restricción contra translación en la dirección de y , y una restricción contra giro respecto del eje z (para direcciones de ejes véase la Fig. 4-7a). Por ejemplo, se supone que el nudo 1 de la viga en la figura está empotrado, y por lo tanto está restringido contra translación y giros; los nudos 2, j , y m están restringidos únicamente contra translación; y los nudos k y $m + 1$ no están restringidos.

En una viga continua los desplazamientos son debidos primeramente a deformaciones por flexión, y únicamente tales deformaciones serán consideradas en este artículo. Los efectos de deformaciones por cortante si son necesarios se pueden incluir en el análisis, como se describirá más adelante en el Art. 6.11. En cualquier caso, sin embargo, la omisión de deformaciones axiales significa que un máximo de dos posibles desplazamientos pueda ocurrir en cualquier nudo. Estas son la translación en la dirección de y , y el giro respecto del eje z . Un sistema de numeración para todos los posibles desplazamientos de nudo se indica en la Fig. 4-7b. Principiando en el extremo izquierdo de la estructura y procediendo hacia la derecha, la translación y el giro en cada nudo están numerados en serie. Ya que la translación está numerada antes que el giro, se concluye que en todos los casos el número que representa la translación es igual a dos veces el número del nudo menos uno, mientras que el número del giro es igual a dos veces el número del nudo. Por ejemplo, en el nudo j la translación y el giro se numeran $2j - 1$ y $2j$, respectivamente. Comentarios similares se aplican a los otros nudos, tales como los nudos k , m , y $m + 1$. Es evidente que el número total de posibles desplazamientos de nudo es dos veces el número de nudos,

o $2n_j$. Además, si el número total de restricciones de apoyo contra translación y giro se denomina n_r , el número de desplazamientos reales, o grados de libertad, es

$$n = 2n_j - n_r = 2m + 2 - n_r \quad (4-10)$$

en la que n es el número de grados de libertad.

El análisis de una viga continua consiste en colocar las matrices de rigidez y carga necesarias y aplicar las ecuaciones del método de la rigidez al problema por resolver. Para este propósito, la matriz más importante por formarse es la matriz de rigidez de nudo total S_j . La matriz de rigidez de nudo consiste de la contribución de las rigideces de la viga S_m previamente dada en el Art. 4.3 (véase la Tabla 4-2). Por ejemplo, el i ésimo miembro de la viga continua de la Fig. 4-7 contribuye a las rigideces de los nudos j y k a los extremos izquierdo y derecho del miembro, respectivamente. Por lo tanto, es necesario relacionar los desplazamientos de extremo de miembro i a los desplazamientos de los nudos j y k por medio de un sistema apropiado de índices.

Para relacionar los desplazamientos de extremo de un miembro particular con los desplazamientos de los nudos, considérese el miembro típico i como se muestra en la Fig. 4-7c. Los desplazamientos de los extremos de este miembro serán denominados $j1$ y $j2$ en el extremo izquierdo, y $k1$ y $k2$ en el extremo derecho. En ambos casos la translación se enumera antes del giro. Estos son los mismos desplazamientos de extremo de miembro que fueron numerados 1, 2, 3 y 4 en la Fig. 4-3b. Sin embargo, se desea el uso de una nueva notación, tal como $j1$, $j2$, $k1$ y $k2$, para tener un símbolo que pueda ser usado en un programa de computación para representar el número de desplazamientos de extremo. Los cuatro desplazamientos de extremo de miembro i están relacionados a los correspondientes desplazamientos de nudo por las siguientes expresiones (compare las Figs. 4-7b y c):

$$\begin{aligned} j1 &= 2j - 1 & j2 &= 2j \\ k1 &= 2k - 1 & k2 &= 2k \end{aligned} \quad (4-11)$$

Sin embargo, ya que en la viga continua de la Fig. 4-7 los números de nudo j y k son numéricamente iguales a i e $i + 1$, respectivamente, los desplazamientos de extremo también son dados por

$$\begin{aligned} j1 &= 2i - 1 & j2 &= 2i \\ k1 &= 2i + 1 & k2 &= 2i + 2 \end{aligned} \quad (4-12)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de arriba sirven para indicar los posibles desplazamientos de nudo en los extremos izquierdo y derecho de cualquier miembro i en términos de los números de nudo (Ecs. 4-11) o de los números de los miembros (Ecs. 4-12). Es necesario tal sis-

tema de índice para el propósito de construir la matriz de rigidez de nudo a partir de las matrices de rigidez de miembro. El sistema también prueba ser útil cuando se calculan las acciones de extremo en los miembros, debidas a desplazamientos de los nudos, según se muestra más adelante.

Según anteriormente se menciona, la matriz de rigidez de nudo total S_j se forma de las contribuciones de rigideces individuales de miembro. Por lo tanto, es conveniente imponer tales contribuciones para un miembro típico i en la viga, y entonces repetir el proceso para todos los miembros del 1 a m . De nuevo se muestra un miembro típico i de una viga continua en la Fig. 4-8, con miembros adyacentes $i-1$ e $i+1$, también indicados. En la parte (a) de la figura la viga se muestra con un desplazamiento unitario correspondiente a $j1$; o sea, una translación en la dirección de y en el extremo izquierdo del miembro. Las cuatro acciones desarrolladas en los nudos j y k en los dos extremos de miembro i son los coeficientes de rigidez S_j y son elementos de la matriz de rigidez de nudo total. Cada rigidez tendrá dos subíndices según aparece en la matriz de rigidez de nudo. El primer subíndice es el número que denota la localización de la acción misma, y el segundo es el índice para el desplazamiento unitario que causa la acción. Por lo tanto, la rigidez en el nudo j en la dirección de y tiene los subíndices $j1$ y $j1$, lo que significa que la acción corresponde a desplazamientos del tipo $j1$ y es causada por un desplazamiento unitario del tipo $j1$. Esta rigidez está denominada, por lo tanto, por el símbolo $(S_j)_{j1, j1}$, como se muestra en la Fig. 4-8a. Por supuesto, el valor real del índice $j1$ es obtenido de las Ecs. (4-12). Similarmente, cada una de las tres rigideces restantes en la Fig. 4-8a tienen un primer subíndice que identifica el tipo de desplazamiento al que corresponde la rigidez. Sin embargo, cada una de ellas tiene el mismo segundo subíndice, que denota el desplazamiento unitario del tipo $j1$.

Las rigideces de nudo debidas a los tres posibles desplazamientos de nudo restantes en los extremos del miembro i están mostradas en las Figs. 4-8b, 4-8c y 4-8d. En cada figura las cuatro rigideces de nudo están mostradas con el subíndice apropiado que indica (1) el tipo de acción y (2) el desplazamiento unitario. El lector debe verificar la notación para cada una de las rigideces mostradas en la Fig. 4-8.

El siguiente paso es expresar los coeficientes de rigidez de nudo mostrados en la Fig. 4-8 en términos de las diferentes rigideces de miembro que contribuyen a las rigideces de nudo. Este paso requiere que las rigideces de miembro se obtengan de la Tabla 4-2, que da las rigideces para un miembro de una viga continua (véase la Fig. 4-3b a la Tabla 4-2 para el sistema de índices). Por ejemplo, la con-

tribución de la rigidez de nudo $(S_j)_{j1, j1}$ del miembro $i-1$ (véase la Fig. 4-8a) es la rigidez S_{M33} para ese miembro. Similarmente, la contribución a $(S_j)_{j1, j1}$ del miembro i es la rigidez S_{M11} para el miembro i . Estas dos contribuciones serán denominadas $(S_{M33})_{i-1}$ y $(S_{M11})_i$,

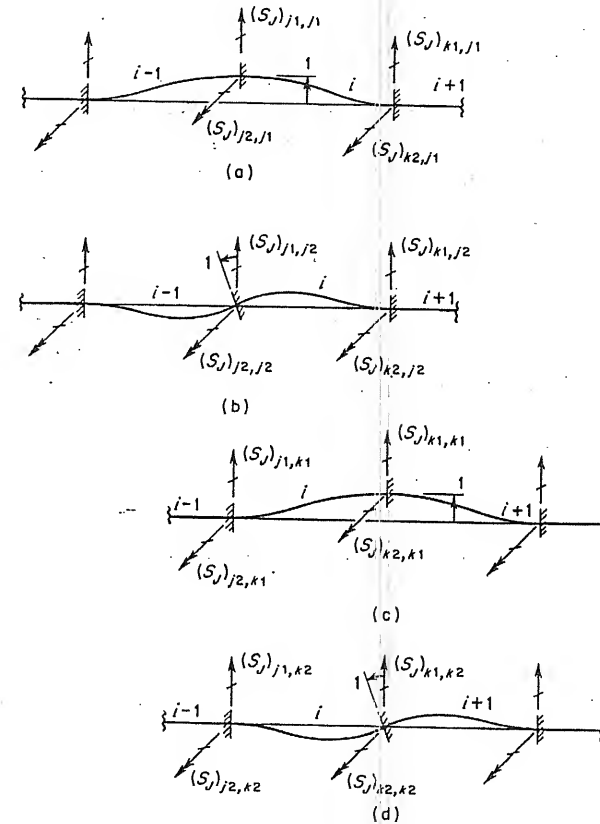


FIG. 4-8. Rigideces de nudo para una viga continua

respectivamente. En general, la contribución de un miembro a la rigidez de un nudo particular será denominada añadiendo el subíndice del miembro a la rigidez del miembro mismo. La última cantidad se obtiene de la matriz de rigidez de miembro apropiada, que es la Tabla 4-2 para una viga continua que tiene dos posibles desplazamientos en cada uno. De esta discusión se puede ver que los coeficientes de rigidez de nudo mostrados en la Fig. 4-8a están dados en términos de rigideces de miembro por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 (S_r)_{j1,j1} &= (S_{M33})_{i-1} + (S_{M11})_i \\
 (S_r)_{j2,j1} &= (S_{M43})_{i-1} + (S_{M21})_i \\
 (S_r)_{k1,j1} &= (S_{M31})_i \\
 (S_r)_{k2,j1} &= (S_{M41})_i
 \end{aligned} \quad (4-13)$$

que representan el cambio de elementos de la primera columna de la matriz de rigidez de miembro al sitio apropiado en S_r . Las primeras dos rigideces de nudo consisten de las sumas de contribuciones de los miembros $i-1$ e i . Las últimas dos rigideces incluyen contribuciones únicamente del miembro i . Este modelo de términos múltiples cuando la rigidez está en el extremo del mismo miembro, y términos únicos cuando la rigidez está en el extremo lejano del miembro, es típico de todos los tipos de estructuras reticulares. Por supuesto, hay ocasiones excepcionales, tales como en el extremo de una viga continua, donde hay únicamente una sola contribución, aunque la rigidez esté en el extremo cercano.

Expresiones que son análogas a las Ecs. (4-13) se obtienen fácilmente para un giro unitario en el nudo j respecto al eje z . Este giro es un desplazamiento unitario del tipo $j2$ para el miembro i , según se muestra en la Fig. 4-8b. Las expresiones para las rigideces de nudo en términos de las rigideces de miembro son (de la segunda columna de la matriz de rigidez de miembro):

$$\begin{aligned}
 (S_r)_{j1,j2} &= (S_{M34})_{i-1} + (S_{M12})_i \\
 (S_r)_{j2,j2} &= (S_{M44})_{i-1} + (S_{M22})_i \\
 (S_r)_{k1,j2} &= (S_{M32})_i \\
 (S_r)_{k2,j2} &= (S_{M42})_i
 \end{aligned} \quad (4-14)$$

Similarmente, para un desplazamiento unitario en la dirección de y en el nudo k (véase la Fig. 4-8c) las rigideces son (de la tercera columna):

$$\begin{aligned}
 (S_r)_{j1,k1} &= (S_{M13})_i \\
 (S_r)_{j2,k1} &= (S_{M23})_i \\
 (S_r)_{k1,k1} &= (S_{M33})_i + (S_{M11})_{i+1} \\
 (S_r)_{k2,k1} &= (S_{M43})_i + (S_{M21})_{i+1}
 \end{aligned} \quad (4-15)$$

Finalmente, las expresiones para un giro unitario alrededor de z en el nudo k (véase la Fig. 4-8d) son (de la cuarta columna):

$$\begin{aligned}
 (S_r)_{j1,k2} &= (S_{M14})_i \\
 (S_r)_{j2,k2} &= (S_{M24})_i \\
 (S_r)_{k1,k2} &= (S_{M34})_i + (S_{M12})_{i+1} \\
 (S_r)_{k2,k2} &= (S_{M44})_i + (S_{M22})_{i+1}
 \end{aligned} \quad (4-16)$$

Las Ecs. (4-13) a (4-16) muestran que los dieciséis elementos de la matriz de rigidez $[S_M]_i$ de 4×4 para el miembro i contribuyen a las dieciséis rigideces de nudo en un patrón muy regular. Este patrón puede ser esquemáticamente observado en la Fig. 4-9b, que indica la formación de la matriz de rigidez de nudo para una viga continua de seis claros mostrada con nudos restringidos en la Fig. 4-9a. Para esta estructura el número de nudos es siete, el número de posibles desplazamientos de nudo es catorce, y, por lo tanto, la matriz de rigidez de nudo es del orden de 14×14 . El esquema de índices se muestra en el extremo izquierdo inferior y a través de la esquina superior de la matriz en la Fig. 4-9. Las contribuciones de los miembros individuales se indican por los cuadros marcados con cruz, cada uno de los cuales es del orden de 4×4 . Los cuadros se enumeran en la esquina superior derecha para identificar el miembro que se está considerando. Los cuadros que se traslapan, que son del orden de 2×2 en este ejemplo, denotan elementos de S_r , que recibe contribuciones de dos miembros adyacentes. Todos los elementos fuera de los cuadros sombreados valen cero.

La matriz de rigidez ilustrada en la Fig. 4-9b es la matriz total de todos los posibles desplazamientos de nudo. Sin embargo, a fin

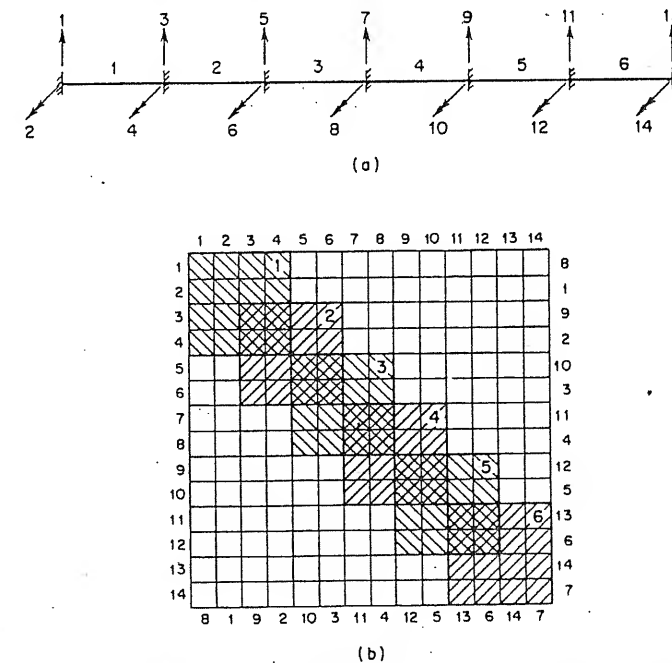


FIG. 4-9. Matriz de rigidez de nudo para una viga continua

de analizar una viga dada, la matriz debe ser rearmada en la forma dividida dada por la Ec. (4-1). Suponga, por ejemplo, que la viga real tiene apoyos libres en todos sus nudos, como se muestra en la Fig. 4-10a. La matriz de rigidez rearmada y dividida para este caso se indica en la Fig. 4-10b. Para obtener el nuevo arreglo matricial, los renglones y las columnas de la matriz original han sido cambiados en una secuencia apropiada a fin de colocar las rigideces pertenecientes a los grados de libertad reales en los primeros siete renglones y columnas. Al mismo tiempo, las rigideces pertenecientes a las restricciones de apoyo han sido colocadas en los últimos siete renglones y columnas. Como una ayuda en el proceso de rearmado, las nuevas designaciones de renglones y columnas se enumeran en la Fig. 4-9b hacia abajo en el lado derecho y horizontalmente en el fondo de la figura. El nuevo arreglo de la matriz de rigidez original en esta forma es equivalente a numerar los grados de libertad y restricciones de apoyo según se muestra en la Fig. 4-10a. Sin embargo, el camino general en este capítulo, según se explicó anteriormente, es formar la matriz de rigidez utilizando un sistema de numeración

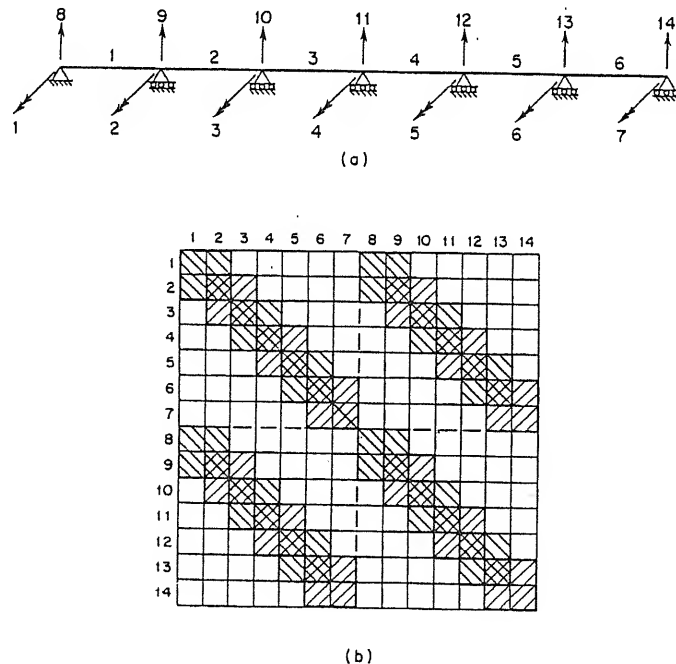


FIG. 4-10. Nuevo arreglo de una matriz de rigidez de nudo para una viga continua

como el mostrado en la Fig. 4-9a, y entonces arreglar renglones y columnas como se hizo en el ejemplo de las Figs. 4-9 y 4-10.

En resumen, el procedimiento a seguir al formar la matriz de rigidez de nudo S_j consiste en tomar los miembros en secuencia y valuar sus contribuciones una por una. Para el miembro típico i , el procedimiento es como sigue. Primero, los posibles desplazamientos en los extremos j y k del miembro se relacionan con la numeración del miembro calculando los índices $j1, j2, k1$ y $k2$ (véanse las Ecs. 4-12). En seguida se forma la matriz de rigidez de miembro $[S_M]_i$, y los elementos de esta matriz son cambiados a S_j como se indica por los términos con los subíndices i en las Ecs. (4-13) a (4-16). Después que todos los miembros han sido procesados en esta forma, la matriz S_j queda completa. Esta se puede entonces arreglar y dividir a fin de aislar la matriz de rigidez S (véase la Ec. 4-1). La matriz invertida S^{-1} se determina entonces a fin de calcular los resultados finales.

Después de obtener la matriz de rigidez, el siguiente paso es obtener los vectores de carga. Considere primero el vector A de cargas reales de nudo. Este vector contiene $2n_j$ elementos, cada uno de los cuales corresponde a uno de los posibles desplazamientos de nudo mostrados en la Fig. 4-7b. Por lo tanto, en cada nudo hay dos posibles cargas aplicadas, a saber una fuerza en la dirección de y , y un par en el sentido de z . Estas cargas están mostradas en la Fig. 4-11 y son denominadas A_{2k-1} y A_{2k} , respectivamente. Los subíndices usados para identificar estas acciones son los mismos que en el sistema de numeración para los posibles desplazamientos de nudo (véase la Fig. 4-7b). Por lo tanto, el vector A toma la forma

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_{2k-1}, A_{2k}, \dots, A_{2m+1}, A_{2m+2}\} \quad (4-17)$$

Los elementos de este vector se conocen inmediatamente de las cargas dadas sobre la viga.

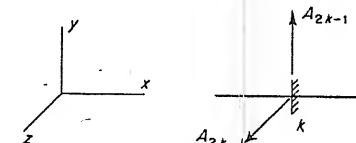


FIG. 4-11. Cargas de nudo para una viga continua

En seguida considere la formación de la matriz A_{ML} de acciones de empotramiento debidas a las cargas, y la construcción del vector A_E de cargas equivalentes de nudo. La Fig. 4-12b muestra de nuevo el i -ésimo miembro de una viga continua, pero con cargas laterales

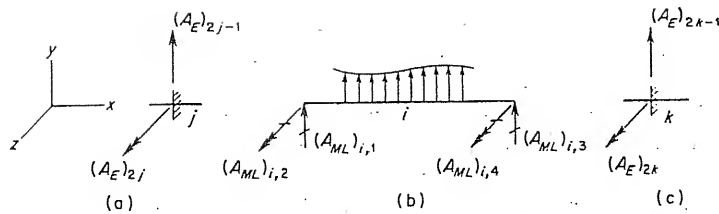


FIG. 4-12. Cargas en un miembro de una viga continua

aplicadas a lo largo de su longitud. Las acciones en los extremos del miembro i cuando sus extremos están empotrados, son denominadas como sigue:

- $(A_{ML})_{i,1}$ = fuerza en la dirección de y en el extremo izquierdo
- $(A_{ML})_{i,2}$ = par en el sentido de z en el extremo izquierdo
- $(A_{ML})_{i,3}$ = fuerza en la dirección de y en el extremo derecho
- $(A_{ML})_{i,4}$ = par en el sentido de z en el extremo derecho

En general, el primer subíndice para una acción de empotramiento indica el miembro, y el segundo indica la acción misma. La última se identifica usando el esquema de numeración mostrado en la Fig. 4-12b, que es el mismo al previamente usado para rigideces de miembro (véase la Fig. 4-3b). Cuando se usa este sistema de notación, la matriz A_{ML} de acciones de empotramiento será del orden de $m \times 4$; como sigue:

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} (A_{ML})_{1,1} & (A_{ML})_{1,2} & (A_{ML})_{1,3} & (A_{ML})_{1,4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{ML})_{i,1} & (A_{ML})_{i,2} & (A_{ML})_{i,3} & (A_{ML})_{i,4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{ML})_{m,1} & (A_{ML})_{m,2} & (A_{ML})_{m,3} & (A_{ML})_{m,4} \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

Los elementos en esta matriz son acciones de empotramiento que pueden ser encontradas de las fórmulas dadas en el Apéndice B.

El vector A_E de cargas equivalentes de nudo puede ser construido de los elementos de la matriz A_{ML} . El proceso para hacer esto se puede ver si se refiere nuevamente a la Fig. 4-12. El miembro i mostrado en la parte (b) de la figura contribuye a las cargas equivalentes en los nudos j y k , que están en los extremos del miembro. Las cargas equivalentes en estos nudos se muestran en las Figs. 4-12a y 4-12c, y están caracterizadas por los mismos subíndices previamente usados para los desplazamientos posibles de nudo (véase la Fig. 4-7b). Por lo tanto el vector A_E tiene la forma general

$$A_E = \{(A_E)_1, (A_E)_2, \dots, (A_E)_{2j-1}, (A_E)_{2j}, (A_E)_{2k-1}, (A_E)_{2k}, \dots, (A_E)_{2m+2}\} \quad (4-19)$$

Los elementos individuales del vector A_E consisten de las contribuciones de los dos miembros adyacentes. Primero considere la fuerza $(A_E)_{2j-1}$ en la dirección de y en el nudo j (véase la Fig. 4-12a). Esta acción, que también puede ser llamada $(A_E)_{2i-1}$, está compuesta del negativo de la acción de extremo $(A_{ML})_{i,1}$ del miembro i (véase la Fig. 4-12b) y una contribución similar del miembro adyacente $i-1$ a la izquierda. La última contribución es el negativo de la fuerza $(A_{ML})_{i-1,3}$ en el extremo derecho del miembro $i-1$. Por razonamiento análogo, se pueden obtener las expresiones para las otras tres cargas equivalentes, dando así los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} (A_E)_{2j-1} &= (A_E)_{2i-1} = -(A_{ML})_{i-1,3} - (A_{ML})_{i,1} \\ (A_E)_{2j} &= (A_E)_{2i} = -(A_{ML})_{i-1,4} - (A_{ML})_{i,2} \\ (A_E)_{2k-1} &= (A_E)_{2i+1} = -(A_{ML})_{i,3} - (A_{ML})_{i+1,1} \\ (A_E)_{2k} &= (A_E)_{2i+2} = -(A_{ML})_{i,4} - (A_{ML})_{i+1,2} \end{aligned} \quad (4-20)$$

El método para obtener el vector A_E consiste en tomar los miembros en orden y en valuar sus contribuciones una por una. Por lo tanto, se consideran renglones sucesivos de la matriz A_{ML} , y los elementos de cada renglón se cambian a los elementos apropiados en el vector A_E como se indica por los términos con subíndices i en las Ecs. (4-20). Después que en esta fase han sido considerados todos los miembros, el vector A_E queda completo. Entonces puede sumarse al vector A de acuerdo con la Ec. (4-5) para formar el vector A_C de cargas combinadas de nudo. Finalmente, el vector A_C puede ser nuevamente arreglado para que la primera parte se convierta en A_D , y la segunda parte se convierta en $-A_{R1}$, según se explicó en el Art. 4.5 (véase la Ec. 4-6).

Después que han sido formuladas las matrices y vectores requeridos por los métodos descritos arriba, la solución para los desplazamientos de nudo D y reacciones de apoyo A_R consisten simplemente en sustituir en las Ecs. (4-8) y (4-4), respectivamente, y haciendo las multiplicaciones matriciales indicadas. Después de encontrar los desplazamientos de nudo D que solamente corresponden a los grados de libertad de la estructura, es posible formar un vector del desplazamiento total de nudo D_t que contenga elementos que correspondan a todos los posibles desplazamientos de nudo (véase la Fig. 4-7b). Por lo tanto, el vector D_t será del orden de $2n_j \times 1$. Contendrá valores dados por el vector D (correspondientes a los grados de libertad), y los elementos restantes (correspondientes a

las restricciones de apoyo) valdrán cero. En general, la forma del vector D_j es

$$D_j = \{(D_j)_1, (D_j)_2, \dots, (D_j)_{2j-1}, (D_j)_{2j}, (D_j)_{2k-1}, (D_j)_{2k}, \dots, (D_j)_{2m+2}\} \quad (4-21)$$

Se usan elementos de este vector para calcular acciones de extremo de miembro, como se describe más adelante.

La valuación de las acciones de extremo de miembro requieren una aplicación repetida de la Ec. (4-9), que abajo se repite:

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [S_M]_i \{D_M\}_i \quad (4-9)$$

repetida

Esta ecuación debe ser aplicada una vez por cada miembro de la estructura. Cuando se escribe en forma detallada, la ecuación es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} (A_M)_{i,1} \\ (A_M)_{i,2} \\ (A_M)_{i,3} \\ (A_M)_{i,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{ML})_{i,1} \\ (A_{ML})_{i,2} \\ (A_{ML})_{i,3} \\ (A_{ML})_{i,4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{M11} & S_{M12} & S_{M13} & S_{M14} \\ S_{M21} & S_{M22} & S_{M23} & S_{M24} \\ S_{M31} & S_{M32} & S_{M33} & S_{M34} \\ S_{M41} & S_{M42} & S_{M43} & S_{M44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{M1} \\ D_{M2} \\ D_{M3} \\ D_{M4} \end{bmatrix} \quad (4-22)$$

El vector $\{A_{ML}\}_i$ se obtiene del i ésimo renglón de la matriz A_{ML} previamente dada, y la matriz de rigidez $[S_M]_i$ se obtiene de la Tabla 4-2. El vector $\{D_M\}_i$ representa los desplazamientos de extremo para el miembro i . Estos desplazamientos se obtienen del vector D_j tomando de ese vector los cuatro desplazamientos consecutivos que están asociados con el miembro i . En general, los cuatro desplazamientos mostrados en la Ec. (4-22), que son, D_{M1} , D_{M2} , D_{M3} , D_{M4} , son iguales a los desplazamientos $(D_j)_{j1}$, $(D_j)_{j2}$, $(D_j)_{k1}$, y $(D_j)_{k2}$, respectivamente, del vector D_j . Por lo tanto, los cuatro desplazamientos de extremo para cualquier miembro se pueden sacar sin ninguna dificultad del vector D_j .

La Ec. (4-22) puede aumentarse sustituyéndola en los elementos de $[S_M]_i$ y $\{D_M\}_i$ y llevando a cabo multiplicaciones matriciales. Cuando se ha hecho esto, se obtienen las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} (A_M)_{i,1} &= (A_{ML})_{i,1} + \frac{12EI_{zi}}{L_i^3} [(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}] \\ &\quad + \frac{6EI_{zi}}{L_i^2} [(D_j)_{j2} + (D_j)_{k2}] \\ (A_M)_{i,2} &= (A_{ML})_{i,2} + \frac{6EI_{zi}}{L_i^2} [(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}] \\ &\quad + \frac{4EI_{zi}}{L_i} [(D_j)_{j2} + \frac{1}{2}(D_j)_{k2}] \end{aligned} \quad (4-23)$$

$$(A_M)_{i,3} = (A_{ML})_{i,3} - \frac{12EI_{zi}}{L_i^3} [(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}] - \frac{6EI_{zi}}{L_i^2} [(D_j)_{j2} + (D_j)_{k2}]$$

$$(A_M)_{i,4} = (A_{ML})_{i,4} + \frac{6EI_{zi}}{L_i^2} [(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}] + \frac{4EI_{zi}}{L_i} [\frac{1}{2}(D_j)_{j2} + (D_j)_{k2}]$$

Las Ecs. (4-22) y (4-23), por supuesto, son equivalentes, y cualquiera puede ser usada para el propósito de calcular las acciones de extremo del miembro.

El análisis de vigas continuas utilizando el método altamente organizado arriba descrito, se demuestra por un ejemplo en el siguiente artículo. En la solución se siguen lo más posible los pasos descritos en este artículo. Naturalmente, tales procedimientos son muy engorrosos para resolverlos a mano, pero aquí se usan deliberadamente a fin de ilustrar la forma en que es llevada la solución por medio de un programa de computación. Un programa de computación para el análisis de una viga continua se presenta en el Art. 5.4.

4.9. Ejemplo. La viga continua mostrada en la Fig. 4-13a va a ser analizada por el camino formalizado en el artículo anterior. La viga está restringida contra translación en el apoyo C y contra translación y giro en los puntos A y D. En el punto B la rigidez a la flexión de la viga cambia de EI a $2EI$. Por lo tanto, el punto B se toma como un nudo en la estructura.

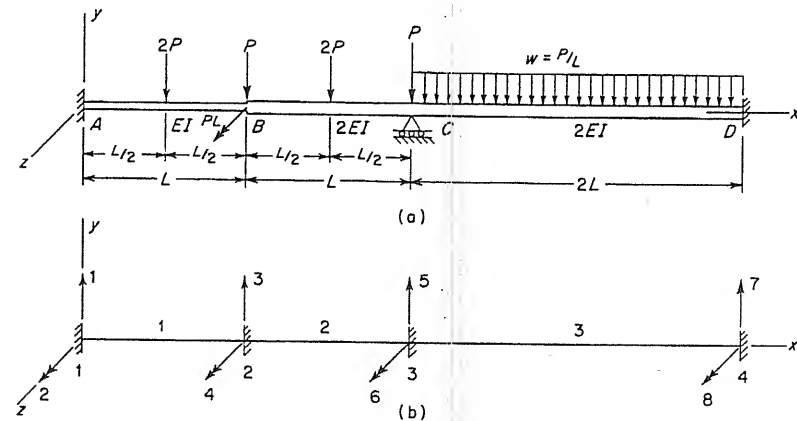


FIG. 4-13. Ejemplo (viga continua)

Los sistemas de numeración de miembros y nudos están mostrados en la Fig. 4-13b, y se ve que el número m de miembros es tres, el número n_j de nudos es cuatro, y el número n_r de restricciones de apoyo es cinco. Por lo tanto, el número n de grados de libertad es igual a tres (véase la Ec. 4-10).

Las propiedades del miembro y los índices calculados de la Ec. (4-12) se dan en la Tabla 4-7. El momento de inercia y la longitud de cada miembro se puede considerar que se dan como datos (datos de entrada) para el análisis.

TABLA 4-7. DATOS SOBRE MIEMBROS PARA LA VIGA DE LA FIG. 4-13

Número de miembro	Número de nudos en los extremos		Índices para desplazamientos de extremo del miembro				I_z	Longitud
	j	k	j1	j2	k1	k2		
1	1	2	1	2	3	4	I	L
2	2	3	3	4	5	6	2I	L
3	3	4	5	6	7	8	2I	2L

Las cantidades restantes en la tabla son calculadas del número de miembros. Las restricciones de nudo para la viga se indican en la Tabla 4-8. En esta tabla los números del índice de todos los posibles desplazamientos están

TABLA 4-8. DATOS SOBRE NUDOS PARA LA VIGA DE LA FIG. 4-13

Número de nudo	Índices para posibles desplazamientos	Lista de restricciones	Índices para nuevos arreglos
1	1	1	4
	2	1	5
2	3	0	1
	4	0	2
3	5	1	6
	6	0	3
4	7	1	7
	8	1	8

enumerados para cada nudo de la viga. Esto se sigue por una lista de restricciones, en la que el número 1 se usa para indicar la existencia de una

restricción, mientras que un cero indica que no hay restricción (o un grado de libertad). La última columna de la tabla muestra los números para los desplazamientos cuando son nuevamente arreglados para que los grados de

TABLA 4-9. MATRICES DE RIGIDEZ DE MIEMBRO

$$[S_M]_1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

$$[S_M]_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 12L & -24 & 12L \\ 12L & 8L^2 & -12L & 4L^2 \\ -24 & -12L & 24 & -12L \\ 12L & 4L^2 & -12L & 8L^2 \end{bmatrix}$$

$$[S_M]_3 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & 2L^2 \\ -3 & -3L & 3 & -3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

TABLA 4-10. MATRIZ DE RIGIDEZ DE NUDO PARA LA VIGA DE LA FIG. 4-13

(Todos los elementos en la matriz deben ser multiplicados por el factor EI/L^3)

	1	2	3	4	5	6	7	8	
	Miembro 1								
1	12	6L	-12	6L	0	0	0	0	4
2	6L	4L ²	-6L	2L ²	0	0	0	0	5
	Miembro 2								
3	-12	-6L	36	6L	-24	12L	0	0	1
4	6L	2L ²	6L	12L ²	-12L	4L ²	0	0	2
	Miembro 3								
5	0	0	-24	-12L	27	-9L	-3	3L	6
6	0	0	12L	4L ²	-9L	12L ²	-3L	2L ²	3
7	0	0	0	0	-3	-3L	3	-3L	7
8	0	0	0	0	3L	2L ²	-3L	4L ²	8
	4	5	1	2	6	3	7	8	

libertad precedan a las restricciones originales. Las dos columnas que contienen números de nudo y la lista de restricciones pueden considerarse como datos de entrada, mientras que las otras dos columnas se pueden encontrar de los datos en las columnas de entrada.

En preparación para formar la matriz de la rigidez total de nudo S_j , las matrices de rigidez de miembro para los tres miembros de la estructura se dan en la Tabla 4-9. Estas se forman de la Tabla 4-2 dada en el Art. 4.3. Los elementos de la primera matriz de rigidez de miembro $[S_M]_1$ para el miembro 1 se cambian a S_j de acuerdo con las Ecs. (4-13) a (4-16). Las contribuciones a S_j del miembro 1 aparecen en la Tabla 4-10 dentro de la parte superior izquierda encerrada por líneas punteadas. En una forma similar, los elementos de $[S_M]_2$ y $[S_M]_3$ se cambian a S_j como se muestra por las dos partes restantes de la Tabla 4-10 que están delineadas por líneas punteadas. En las regiones donde las partes encerradas por líneas punteadas se traslapan, los elementos mostrados en la tabla son las sumas de dos términos, uno de cada uno de las dos matrices de rigidez de miembro. Note que todos los elementos en la tabla deben ser multiplicados por el factor EI/L^3 . El sistema de numeración para la matriz de rigidez aparece en el lado izquierdo y a través de la parte superior de la matriz y está de acuerdo con el sistema de numeración mostrado en la Fig. 4-13b.

En seguida, la matriz S_j nuevamente se arregla de acuerdo con la lista de nuevo arreglo de desplazamientos dada en la Tabla 4-8. Esta lista se indica por los números en el lado derecho y a lo largo del fondo de la matriz, en la Tabla 4-10. Las tercera, cuarta y sexta columnas y renglones deben ser cam-

TABLA 4-11. MATRIZ DE RIGIDEZ DE NUDO DE NUEVO ARREGLO PARA LA VIGA DE LA FIG. 4-13

(Todos los elementos en la matriz deben ser multiplicados por el factor EI/L^3)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	36	6L	12L	-12	-6L	-24	0	0
2	6L	12L ²	4L ²	6L	2L ²	-12L	0	0
3	12L	4L ²	12L ²	0	0	-9L	-3L	2L ²
4	-12	6L	0	12	6L	0	0	0
5	-6L	2L ²	0	6L	4L ²	0	0	0
6	-24	-12L	-9L	0	0	27	-3	3L
7	0	0	-3L	0	0	-3	3	-3L
8	0	0	2L ²	0	0	3L	-3L	4L ²

biados a las primeras tres posiciones, y los renglones y columnas restantes deben cambiarse hacia abajo y hacia la derecha sin alterar su orden. La matriz de rigidez de nudo resultante del nuevo arreglo se da en la Tabla 4-11. Entonces esta matriz se divide, según se muestra por las líneas punteadas, en la forma dada por la Ec. (4-1).

La matriz de rigidez S de 3×3 se obtiene a partir de la Tabla 4-11 como sigue:

$$S = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 36 & 6L & 12L \\ 6L & 12L^2 & 4L^2 \\ 12L & 4L^2 & 12L^2 \end{bmatrix}$$

y en seguida se invierte para obtener S^{-1} :

$$S^{-1} = \frac{L}{756EI} \begin{bmatrix} 32L^2 & -6L & -30L \\ -6L & 72 & -18 \\ -30L & -18 & 99 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, todos los cálculos que incluyen a las propiedades de la estructura han sido completados, y ahora puede ser procesada la información concerniente a las cargas sobre la estructura.

Una inspección de la Fig. 4-13a muestra que las cargas están aplicadas únicamente en los nudos B y C (nudos 2 y 3 en la Fig. 4-13b). Estas cargas de nudo se enumeran en la Tabla 4-12 en una forma apropiada para datos de

TABLA 4-12. ACCIONES APLICADAS EN LOS NUDOS

Nudo	Fuerza en la dirección de y	Par en el sentido de z
1	0	0
2	-P	PL
3	-P	0
4	0	0

entrada de un programa de computación. En seguida, estas acciones se colocan en el vector A , como sigue (véase la Ec. 4-17):

$$A = \{0, 0, -P, PL, -P, 0, 0, 0\}$$

Las acciones de empotramiento están tabuladas en la Tabla 4-13 en el mismo arreglo en que aparecen en la matriz A_{ML} (véase la Ec. 4-18). Los elementos de A_{ML} son cambiados al vector de cargas equivalentes de nudo A_E , como se indica por las Ecs. (4-20). Primero, las acciones de empotramiento para el miembro 1 son cambiadas a los primeros cuatro elementos de A_E ; en seguida las acciones para el miembro 2 son cambiadas a los elementos tres a seis de A_E ; y finalmente, las acciones para el miembro 3 son cambiadas a los últimos cuatro elementos de A_E . Cuando el vector ha sido de este modo formado, el resultado es:

$$A_E = \{-P, -PL/4, -2P, 0, -2P, -PL/12, -P, PL/3\}$$

Los vectores A y A_E son ahora combinados utilizando la Ec. (4-5) para obtener el vector A_C :

$$A_C = \{-P, -PL/4, -3P, PL, -3P, -PL/12, -P, PL/3\}$$

Este vector debe ser arreglado colocando los elementos tercero, cuarto y sexto en las tres primeras posiciones y moviendo los elementos restantes hacia el

TABLA 4-13. ACCIONES DE EMPOTRAMIENTO DEBIDAS A LAS CARGAS

Miembro	$(A_{ML})_{i,1}$	$(A_{ML})_{i,2}$	$(A_{ML})_{i,3}$	$(A_{ML})_{i,4}$
1	P	PL/4	P	-PL/4
2	P	PL/4	P	-PL/4
3	P	PL/3	P	-PL/3

extremo sin alterar su orden. Este arreglo da como resultado el siguiente vector:

$$A_C = \{-3P, PL, -PL/12, -P, -PL/4, -3P, -P, PL/3\}$$

en el que los primeros tres elementos constituyen el vector A_D :

$$A_D = \{-3P, PL, -PL/12\}$$

y los últimos cinco elementos son los negativos de los elementos de A_{RL} :

$$A_{RL} = \{P, PL/4, 3P, P, -PL/3\}$$

Teniendo a la mano todas las matrices requeridas, uno puede completar la solución calculando primeramente los desplazamientos de nudo D utilizando la Ec. (4-8):

$$D = S^{-1}A_D = \frac{L}{756EI} \begin{bmatrix} 32L^2 & -6L & -30L \\ -6L & 72 & -18 \\ -30L & -18 & 99 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -36 \\ 12L \\ -L \end{bmatrix} \frac{P}{12}$$

$$= \frac{PL^2}{3024EI} \begin{bmatrix} -398L \\ 366 \\ 255 \end{bmatrix}$$

El vector D ahora puede ser usado para obtener el vector D_j de todos los posibles desplazamientos de nudo refiriéndose a los índices para el arreglo mostrado en la Tabla 4-8. Estos índices muestran que $D_{j3} = D_1$, $D_{j4} = D_2$ y $D_{j6} = D_3$. Todos los otros elementos de D_j valen cero debido a que correspon-

den a las restricciones de apoyo. Por lo tanto, el vector D_j se convierte en el siguiente:

$$D_j = \frac{PL^2}{3024EI} \{0, 0, -398L, 366, 0, 255, 0, 0\}$$

En seguida, las reacciones A_R pueden ser determinadas de la Ec. (4-4). Para este propósito se obtiene la matriz S_{RD} de la parte inferior izquierda de la Tabla 4-11. El cálculo de A_R es como sigue:

$$A_R = A_{RL} + S_{RD}D$$

$$= \frac{P}{12} \begin{bmatrix} 12 \\ 3L \\ 36 \\ 12 \\ -4L \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -12 & 6L & 0 \\ -6L & 2L^2 & 0 \\ -24 & -12L & -9L \\ 0 & 0 & -3L \\ 0 & 0 & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -398L \\ 366 \\ 255 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{3024EI}$$

$$= \frac{P}{1008} \begin{bmatrix} 3332 \\ 1292L \\ 3979 \\ 753 \\ -166L \end{bmatrix}$$

Finalmente, las acciones de extremo de miembro A_M se obtienen por aplicaciones repetidas de la Ec. (4-9) (véase también la Ec. 4-22). Ya que hay tres miembros en este ejemplo, se requieren tres cálculos de este tipo. Para el miembro 1 los cálculos son como sigue:

$$\{A_M\}_1 = \{A_{ML}\}_1 + [S_M]_1 \{D_M\}_1$$

$$= \frac{P}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ L \\ 4 \\ -L \end{bmatrix} + [S_M]_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -398L \\ 366 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{3024EI} = \frac{P}{252} \begin{bmatrix} 833 \\ 323L \\ -329 \\ 258L \end{bmatrix}$$

En la ecuación anterior el vector $\{D_M\}_1$ consiste de los primeros cuatro elementos de D_j . Similarmente, las ecuaciones para $\{A_M\}_2$ y $\{A_M\}_3$ son

$$\{A_M\}_2 = \{A_{ML}\}_2 + [S_M]_2 \{D_M\}_2$$

$$= \frac{P}{4} \begin{bmatrix} 4 \\ L \\ 4 \\ -L \end{bmatrix} + [S_M]_2 \begin{bmatrix} -398L \\ 366 \\ 0 \\ 255 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{3024EI} = \frac{P}{252} \begin{bmatrix} -77 \\ -6L \\ 427 \\ -169L \end{bmatrix}$$

$$\{A_M\}_3 = \{A_{ML}\}_3 + [S_M]_3 \{D_M\}_3$$

$$= \frac{P}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ L \\ 3 \\ -L \end{bmatrix} + [S_M]_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 255 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{3024EI} = \frac{P}{1008} \begin{bmatrix} 1263 \\ 676L \\ 753 \\ -166L \end{bmatrix}$$

en las que el vector $\{D_M\}_2$ está hecho de los elementos tercero al sexto de D_j , y el vector $\{D_M\}_3$ consiste de los últimos cuatro elementos de D_j . Por lo tanto, todos los desplazamientos de nudo, reacciones de apoyo y acciones de

extremo de miembro están determinados y se considera que el problema está completo.

4.10. Rigideces de miembros de armaduras planas. La determinación de la matriz de rigidez de miembro para un miembro típico de una armadura es preliminar al análisis de una armadura plana. Un miembro típico i en una armadura plana está mostrado en la Fig. 4-14a. Los nudos en los extremos de este miembro están denominados como nudos j y k . Se supone que la armadura plana descansa en el plano $x-y$, en donde x y y son ejes de referencia para la estructura. Las translaciones de nudo son los desplazamientos desconocidos en el análisis y todas estas translaciones pueden ser expresadas convenientemente por sus componentes en las direcciones de x y y . Para el miembro típico i , las direcciones positivas de las cua-

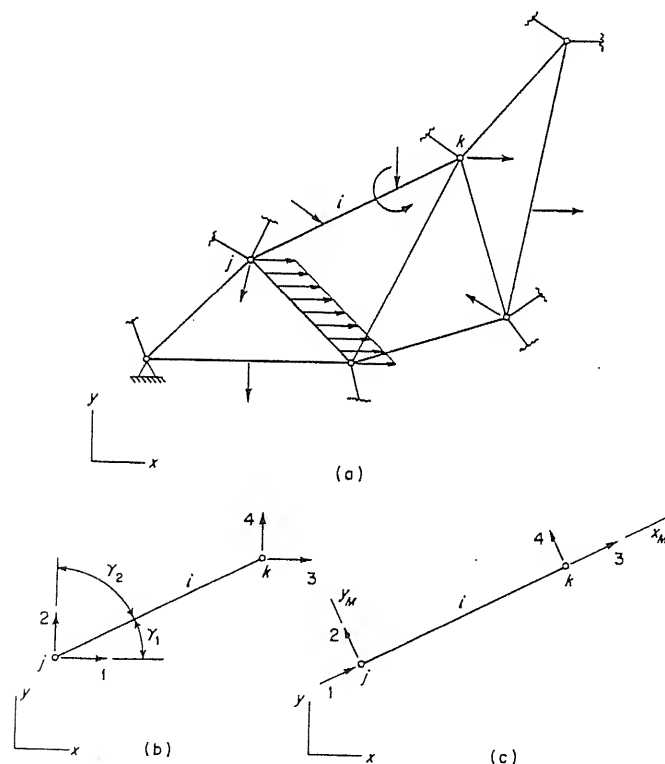


FIG. 4-14. Sistema de numeración para un miembro de una armadura plana

tro componentes de desplazamiento en sus extremos (con respecto a los ejes orientados con la estructura) están indicadas en la Fig. 4-14b.

Es conveniente, al tratar con miembros inclinados en una estructura reticular, hacer uso de cosenos directores. Los cosenos directores para el miembro mostrado en la Fig. 4-14b son los cosenos de los ángulos γ_1 y γ_2 entre los ejes del miembro y los ejes x y y , respectivamente. Estos ángulos serán siempre tomados en el extremo j del miembro. Los cosenos directores correspondientes se denominan como C_x y C_y y están dados como sigue:

$$C_x = \cos \gamma_1 \quad C_y = \cos \gamma_2$$

Los cosenos directores para el miembro pueden ser también expresados en términos de las coordenadas de los nudos j y k . Indicando las coordenadas x y y de los nudos j y k como (x_j, y_j) y (x_k, y_k) , respectivamente, los cosenos directores se convierten en

$$C_x = \frac{x_k - x_j}{L} \quad C_y = \frac{y_k - y_j}{L} \quad (4-24)$$

en donde L es la longitud del miembro. La longitud L puede ser calculada de las coordenadas de los nudos en los extremos del miembro, como sigue:

$$L = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad (4-25)$$

Ambos cosenos directores son positivos cuando el miembro está orientado como se muestra en la Fig. 4-14b, o sea, cuando las coordenadas x y y del nudo k son más grandes que las del nudo j . Si el ángulo γ_1 es mayor que 90° , las fórmulas dadas arriba aún son válidas y uno de los dos cosenos directores será negativo.

En el análisis de una armadura plana, como en el caso de cualquier otro tipo de estructura reticular, es conveniente formar la matriz de rigidez de nudo S_j sumando las contribuciones de las rigideces de miembros. En el caso de una viga continua esta operación es directa (véase el Art. 4.8), debido a que los ejes orientados con el miembro pueden tomarse paralelos a, o coincidentes con, los ejes orientados con la estructura. Por lo tanto, la matriz de rigidez de miembro de viga para los ejes orientados con el miembro, como se encontró en el Art. 4.3, puede usarse directamente cuando se obtienen las rigideces de nudo para los ejes de la estructura. Sin embargo para cualquier otro tipo de estructura reticular, los ejes del miembro no serán necesariamente paralelos a los ejes de la estructura. Por ejemplo, los ejes $x-y$, en la Fig. 4-14b, son ejes orientados con la estructura, mientras que los ejes del miembro x_M y y_M se supone que son a lo largo y perpendiculares al eje del miembro, como se muestra en la Fig. 4-14c. La matriz de rigidez S_M para los ejes de orientación del miembro mostrados en la Fig. 4-14c puede rápidamente obtenerse

al referirse a los casos (1) y (7) de la Fig. 4-2. Utilizando el sistema de numeración mostrado en la Fig. 4-14c para los desplazamientos de extremo con respecto a los ejes x_M - y_M , se hace evidente que la matriz de rigidez S_M para esos ejes tiene la forma mostrada en la Tabla 4-14. En la tabla la rigidez axial de la barra es denominada EA_x .

TABLA 4-14. MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO DE UNA ARMADURA PLANA PARA EJES DE MIEMBROS (FIG. 4-14c)

$$S_M = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, ya que la matriz S_r está basada sobre ejes orientados para la estructura, también se hace necesario obtener las rigideces del miembro para los ejes de la estructura. Las rigideces del miembro para los ejes de la estructura pueden encontrarse en cualquiera de dos formas. El primer método consiste en una formulación directa de las rigideces. En este método, en los extremos del miembro se inducen desplazamientos unitarios en las direcciones de los ejes de la estructura (véase la Fig. 4-14b) y son calculadas las acciones de restricción correspondientes en las mismas direcciones. Estas acciones se convierten en los elementos de la matriz de rigidez de miembro para los ejes de la estructura. El segundo método para encontrar la matriz de rigidez de miembro consiste primero en obtener la matriz de rigidez para los ejes orientados con el miembro (véase la Tabla 4-14) y en seguida transformar esta matriz a los ejes orientados con la estructura por un procedimiento de rotación de ejes. Usando una matriz de transformación apropiada, el giro de ejes puede ser hecho por multiplicaciones matriciales, como se discutirá en un artículo posterior.

Una forma directa para obtener la matriz de rigidez de miembro se demuestra en este artículo, para un miembro de una armadura plana. También se podría usar el método para los otros tipos de estructuras reticulares. Sin embargo, la técnica de formulación directa se hace muy complicada para los tipos más complejos de estructuras, especialmente para marcos en el espacio. Por otro lado, el método de la rotación de ejes es un camino seguro y que no es más difícil en teoría para una estructura complicada que para una simple. A fin de explicar este método, el tema de rotación de ejes se introduce en el Art. 4.13 y en seguida se usa el método en el Art. 4.14, para encontrar la matriz de rigidez para un miembro de una armadura plana con respecto a los ejes de la estructura. Este camino hace que sea posible comparar por ambos métodos la determi-

nación de la matriz de rigidez. Subsecuentemente, las rigideces de miembro para todos los otros tipos de estructuras se encuentran utilizando el método de la rotación de ejes.

La matriz de rigidez de miembro, para un miembro de una armadura plana, se formará ahora por el método directo. Para este propósito es necesario considerar en ambos extremos del miembro, desplazamientos unitarios en las direcciones de x y y . El primero de estos desplazamientos se muestra en la Fig. 4-15a, y consiste en

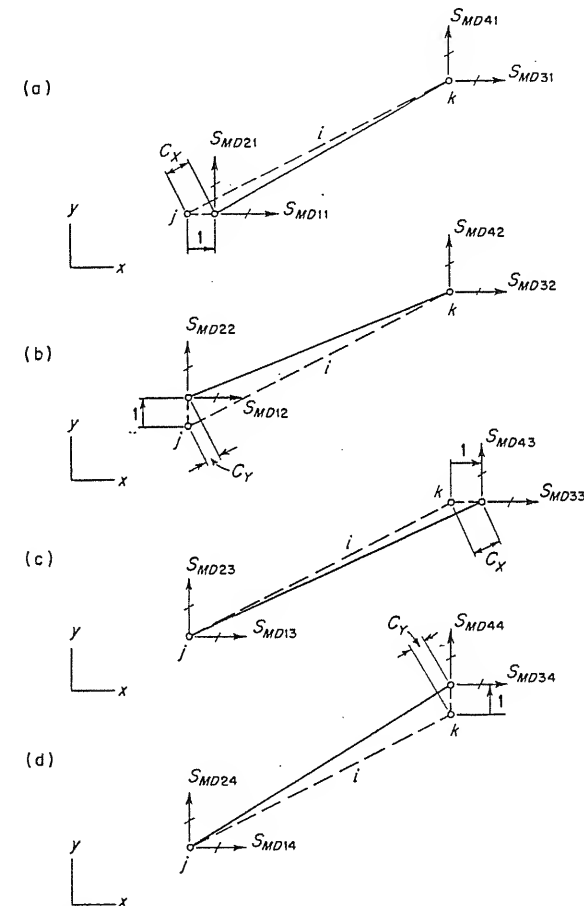


FIG. 4-15. Rigideces de miembro de una armadura plana para ejes de estructura

una translación unitaria del extremo j del miembro en la dirección de x . Como resultado de este desplazamiento se induce una fuerza axial en el miembro. Esta fuerza se puede calcular a partir del acor-

tamiento axial del miembro, que es numéricamente igual al coseno director C_x en la dirección x para el miembro (véase la Fig. 4-15a). La fuerza de compresión axial en el miembro debido a este cambio de longitud es igual a

$$\frac{EA_x}{L} C_x$$

Las acciones de restricción en los extremos del miembro en las direcciones de x y y , que son iguales a las componentes de la fuerza axial, son las rigideces del miembro deseadas para los ejes de la estructura. Tales rigideces están identificadas por el símbolo S_{MD} (véase la Fig. 4-15a), a fin de poderlas distinguir de las rigideces S_M para los ejes de miembro (véase la Tabla 4-14). El sistema de numeración para las rigideces S_{MD} está mostrado en la Fig. 4-14b. La acción de restricción en el extremo j en la dirección de x , denominada S_{MD11} , debe ser igual a la componente en x de la fuerza en el miembro. Por lo tanto, esta rigidez es igual al producto de la fuerza axial por el coseno director en x , como sigue:

$$S_{MD11} = \frac{EA_x}{L} C_x^2$$

También, la acción de restricción en j en la dirección de y es igual a la componente en la dirección de y de la fuerza en el miembro.

$$S_{MD21} = \frac{EA_x}{L} C_x C_y$$

Las acciones de restricción en el extremo k del miembro de la Fig. 4-15a se encuentran rápidamente por equilibrio estático, como sigue:

$$S_{MD31} = -S_{MD11} = -\frac{EA_x}{L} C_x^2$$

$$S_{MD41} = -S_{MD21} = -\frac{EA_x}{L} C_x C_y$$

Las expresiones dadas arriba para las cuatro rigideces mostradas en la Fig. 4-15a constituyen los elementos de la primera columna de la matriz S_{MD} . Las columnas segunda, tercera y cuarta de S_{MD} se pueden obtener en igual forma de las Figs. 4-15b, 4-15c y 4-15d, respectivamente, para dar la matriz de rigidez de 4×4 mostrada en la Tabla 4-15. El lector debe verificar por sí mismo los elementos restantes en esta matriz.

4.11. Análisis de armaduras planas. Como un paso inicial en el análisis de armaduras planas, deben ser numerados todos los nudos y todos los miembros. Los nudos de la estructura se numeran con-

TABLA 4-15. MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO DE UNA ARMADURA PLANA PARA EJES DE ESTRUCTURA (FIG. 4-14b)

$$S_{MD} = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_x C_y & -C_x^2 & -C_x C_y \\ C_x C_y & C_y^2 & -C_x C_y & -C_y^2 \\ -C_x^2 & -C_x C_y & C_x^2 & C_x C_y \\ -C_x C_y & -C_y^2 & C_x C_y & C_y^2 \end{bmatrix}$$

secutivamente del 1 al n_j , donde n_j es el número total de nudos. Además, los miembros se numeran del 1 al m , donde m es el número total de miembros. El orden en el que los nudos y miembros se numeran es de poca importancia. Sin embargo, después que se ha completado la numeración, es necesario registrar los dos números de nudo que están asociados a cada miembro. Esta asociación de números de nudos con números de miembros es necesaria a fin de asegurar cuáles elementos de la matriz de rigidez de nudo S_j y del vector equivalente de carga A_E reciben contribuciones de cada miembro.

Para ilustrar la numeración arbitraria de nudos y miembros, se muestra una armadura plana en la Fig. 4-16a. En la figura el número de los nudos aparece junto a los nudos, mientras que los

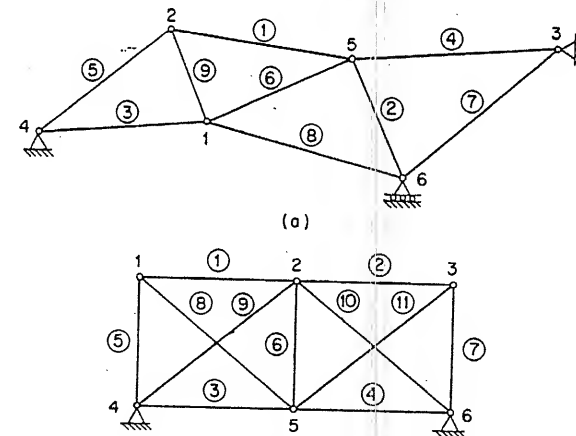


FIG. 4-16. Sistemas de numeración para miembros y nudos de armaduras planas

números de los miembros están encerrados en círculos junto a los miembros. El sistema de numeración para esta estructura está mostrado en la Tabla 4-16. Es necesario, para los propósitos de análisis, identificar los extremos j y k para cada miembro, como se muestra en la tabla, aunque la selección misma sea arbitraria.

TABLA 4-16. LISTA DE MIEMBROS Y NUDOS PARA LA ARMADURA DE LA FIG. 4-16a

Miembro	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nudo j	2	6	4	3	4	1	6	1	2
Nudo k	5	5	1	5	2	5	3	6	1

Mientras que los métodos de análisis en este capítulo no requieren de ningún orden particular de numeración de nudos y miembros, es natural numerarlos en un modelo sistemático siempre que sea práctico. Por ejemplo, en algunas estructuras un orden natural puede ser de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo, como se muestra en la armadura plana de la Fig. 4-16b. La geometría de esta armadura sugiere que un modelo sistemático para numerar nudos, es proceder de izquierda a derecha en la parte de arriba y en seguida de izquierda a derecha en la parte de abajo. Un modelo sistemático para los miembros consiste en numerar consecutivamente los miembros horizontales, los miembros verticales y por último los miembros diagonales, como se muestra en la figura. El sistema de numeración para esta estructura se resume en la Tabla 4-17. Nuevamente, nótese que es necesario identificar un extremo

TABLA 4-17. LISTA DE MIEMBROS Y NUDOS PARA LA ARMADURA DE LA FIG. 4-16b

Miembro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nudo j	1	2	4	5	1	2	3	1	4	2	5
Nudo k	2	3	5	6	4	5	6	5	2	6	3

de cada miembro como si fuera el extremo j y el otro como si fuera el extremo k .

Se pueden organizar muchos posibles esquemas para numerar los nudos y los miembros de una armadura, dependiendo principalmente de lo que uno desee. Si se desea mejorar la eficiencia de la solución, el sistema de numeración puede seleccionarse para reducir a un mínimo el monto de arreglo de la matriz de la rigidez total de nudo S_j . Este procedimiento puede ser ventajoso para cálculos a mano, pero la ventaja desaparece cuando el análisis es programado para una computadora.

Después de numerar los miembros y los nudos, el siguiente paso en el análisis es determinar todos los posibles desplazamientos de nudo y determinar los grados de libertad. El número de grados

de libertad será dos veces el número de nudos, o $2n_j$, ya que cada nudo puede experimentar una translación tanto en la dirección de x como en la dirección de y . El número n de grados de libertad se da por la expresión

$$n = 2n_j - n_r \quad (4-26)$$

en donde n_r indica el número de restricciones de apoyo.

Los posibles desplazamientos de nudo serán numerados en el mismo orden que los nudos, tomando primero las translaciones en la dirección de x y en seguida en la dirección de y , en cada nudo. Por lo tanto, la translación en la dirección de x en el nudo 1 se convierte en el desplazamiento número 1, la translación en la dirección de y en el nudo 1 se convierte en el desplazamiento número 2, la translación en la dirección de x en el nudo 2 se convierte en el desplazamiento número 3, y así en forma sucesiva, hasta que las translaciones del último nudo en las direcciones de x y y sean numeradas $2n_j - 1$ y $2n_j$, respectivamente. En general, en el nudo j de la armadura las translaciones en x y y tienen los índices $2j - 1$ y $2j$, respectivamente.

A fin de construir la matriz de rigidez S_j de las rigideces de miembro, es útil relacionar los índices para los posibles desplazamientos de nudo, con los desplazamientos de extremo de un miembro particular, como se hizo en el análisis de vigas continuas. Para este propósito considérese el miembro típico i , mostrado en la Fig. 4-17, que se conecta en los nudos j y k en los extremos. Se asume que los ejes x y y en la figura son los ejes orientados con la estructura. Los desplazamientos de extremo de este miembro se pueden identificar por los índices $j1$, $j2$, $k1$ y $k2$, como se muestra en la figura. Estos índices para el miembro se relacionan con los índices correspondientes para los posibles desplazamientos de nudo por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} j1 &= 2j - 1 & j2 &= 2j \\ k1 &= 2k - 1 & k2 &= 2k \end{aligned} \quad (4-27)$$

Estas relaciones se obtuvieron directamente del sistema de numeración para los posibles desplazamientos de nudo, que se describió anteriormente.

La matriz de rigidez de nudo se forma de las contribuciones de los miembros individuales. Por lo tanto, la matriz de rigidez de miembro S_{mi} (véase el Art. 4.10, Tabla 4-15) para cada miembro, debe ser determinada y sus elementos colocados en la posición correcta en la matriz S_j . A fin de poder ver cómo se lleva esto a cabo, considérese de nuevo el miembro típico i (Fig. 4-18a). Este miembro contribuye a las rigideces de los nudos j y k en sus extremos. Si se

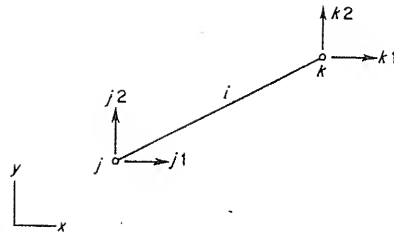


FIG. 4-17. Desplazamientos de extremo para el miembro de una armadura plana

induce un desplazamiento unitario en la dirección de x en la estructura restringida, como se muestra en la figura, habrá acciones de

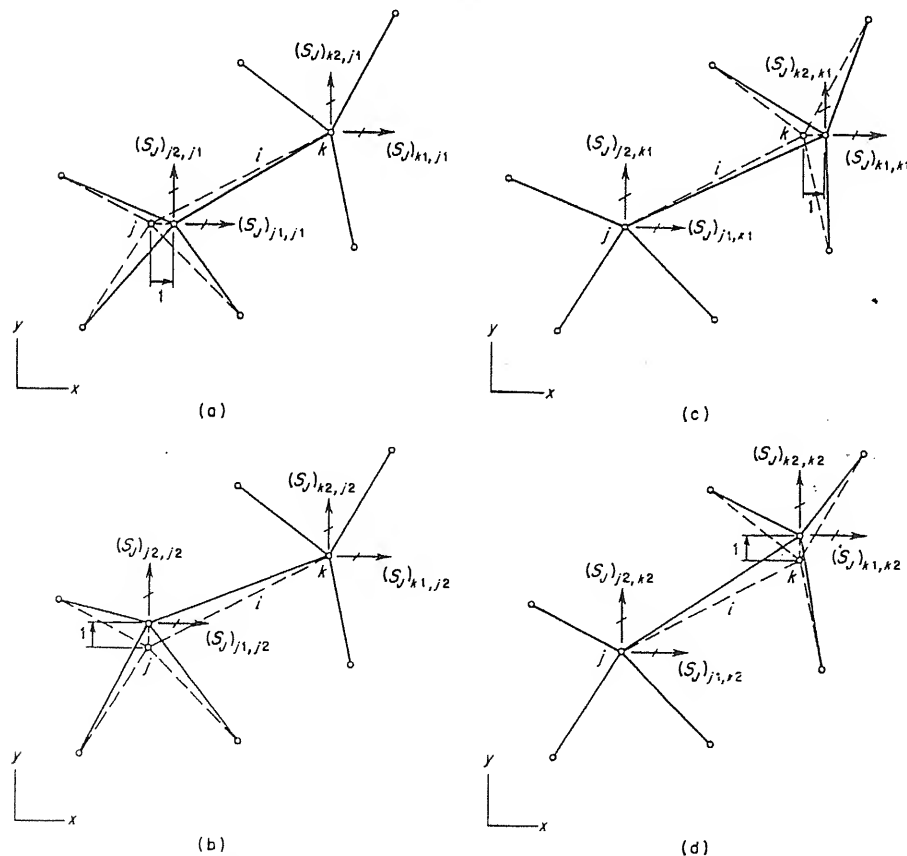


FIG. 4-18. Rigideces de nudo para una armadura plana

restricción en las direcciones de x y y en ambos nudos. En el nudo j la acción en la dirección de x es la rigidez de nudo $(S_j)_{j1, j1}$, y la acción en la dirección de y es la rigidez $(S_j)_{j2, j1}$. Similarmente, las acciones en el nudo k son denominadas $(S_j)_{k1, j1}$ y $(S_j)_{k2, j1}$. Las dos acciones en el nudo j se forman de las contribuciones del miembro i , más las contribuciones de todos los miembros que llegan al nudo j . Las últimas contribuciones serán denominadas por simplicidad por el símbolo indefinido $\sum S_{MD}$. Las contribuciones del miembro i , sin embargo, serán escritas en una forma precisa ya que éstas son los términos que más tarde serán usados para formar la matriz de rigidez. En el caso de la rigidez $(S_j)_{j1, j1}$ la contribución del miembro i es la rigidez de miembro S_{MD11} , y en el caso de la rigidez $(S_j)_{j2, j1}$ la contribución es S_{MD21} . Para las rigideces en el nudo k , se incluyen únicamente contribuciones del miembro i . Estas contribuciones son S_{MD31} y S_{MD41} para las rigideces en las direcciones de x y y , respectivamente, en el nudo k . Por lo tanto, las expresiones para las rigideces de nudo mostradas en la Fig. 4-18a son:

$$\begin{aligned} (S_j)_{j1, j1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD11})_i \\ (S_j)_{j2, j1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD21})_i \\ (S_j)_{k1, j1} &= (S_{MD31})_i \\ (S_j)_{k2, j1} &= (S_{MD41})_i \end{aligned} \quad (4-28)$$

Cada una de las rigideces anteriores se debe a un desplazamiento unitario en el nudo j , y cada una recibe una contribución de la primera columna de la matriz S_{MD} para el miembro i .

Se pueden escribir expresiones similares a las Ecs. (4-28) para un desplazamiento unitario en la dirección de y de la estructura restringida en el nudo j , como se muestra en la Fig. 4-18b. Estas expresiones consideran la segunda columna de S_{MD} , y son como sigue:

$$\begin{aligned} (S_j)_{j1, j2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD12})_i \\ (S_j)_{j2, j2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD22})_i \\ (S_j)_{k1, j2} &= (S_{MD32})_i \\ (S_j)_{k2, j2} &= (S_{MD42})_i \end{aligned} \quad (4-29)$$

También, para un desplazamiento unitario en la dirección de x en el nudo k (Fig. 4-18c), las rigideces de nudo que reciben contribuciones de la tercera columna de S_{MD} son:

$$\begin{aligned} (S_j)_{j1, k1} &= (S_{MD13})_i \\ (S_j)_{j2, k1} &= (S_{MD23})_i \\ (S_j)_{k1, k1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD33})_i \\ (S_j)_{k2, k1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD43})_i \end{aligned} \quad (4-30)$$

Finalmente, las rigideces para un desplazamiento unitario en la dirección de y en el nudo k (véase la Fig. 4-18d), reciben contribuciones de la cuarta columna de S_{MD} , como sigue:

$$\begin{aligned}(S_J)_{j1,k2} &= (S_{MD14})_i \\ (S_J)_{j2,k2} &= (S_{MD24})_i \\ (S_J)_{k1,k2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD34})_i \\ (S_J)_{k2,k2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD44})_i\end{aligned}\quad (4-31)$$

El tipo de contribuciones de rigideces de miembro a la matriz de rigidez de nudo, según se expresó en las ecuaciones anteriores, se determina por la geometría de la armadura y el sistema de numeración de nudos y miembros. El modelo para la estructura mostrada en la Fig. 4-19 será usado como ejemplo. Los nudos y miembros de la armadura están numerados según se muestra en la figura, y los posibles desplazamientos de nudo (mostrados por flechas) están numerados de acuerdo con las Ecs. (4-27). Para esta estructura hay seis miembros y cuatro nudos, y la matriz de rigidez total de nudo es del orden de 8×8 . Las posiciones de las contribuciones de miembro a la matriz de rigidez de nudo, están indicadas por cruces en las Figs. 4-20a a 4-20f, y la matriz final de rigidez es una composición de estas contribuciones. Como ejemplo, la rigidez S_{J11} se compone de las contribuciones de los miembros 1, 2 y 3, como se muestra en las Figs. 4-20a, 4-20b y 4-20c. La rigidez es, por lo tanto, como sigue:

$$S_{J11} = (S_{MD11})_1 + (S_{MD11})_2 + (S_{MD11})_3$$

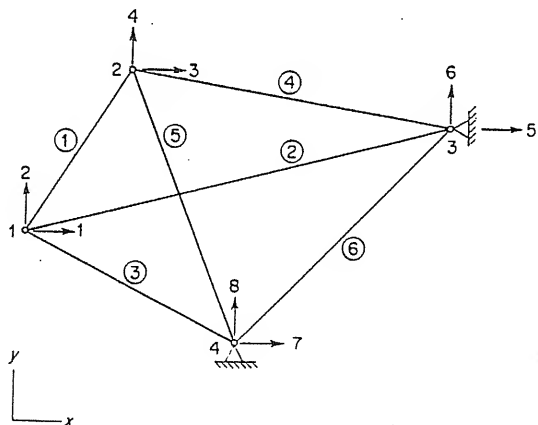


FIG. 4-19. Ejemplo (armadura plana)

Como otra ilustración, considere la rigidez S_{J34} , que está compuesta de rigideces de miembro de los miembros 1, 4 y 5. Esta rigidez es

$$S_{J34} = (S_{MD34})_1 + (S_{MD12})_4 + (S_{MD12})_5$$

como se puede ver refiriéndose a las Figs. 4-20a, 4-20d y 4-20e.

En el ejemplo particular de la Fig. 4-19 la matriz de rigidez S_J no tiene que volverse a arreglar debido al orden en que los nudos están ordenados. Los primeros cuatro renglones y columnas de S_J se asocian con los grados de libertad y los últimos cuatro renglones

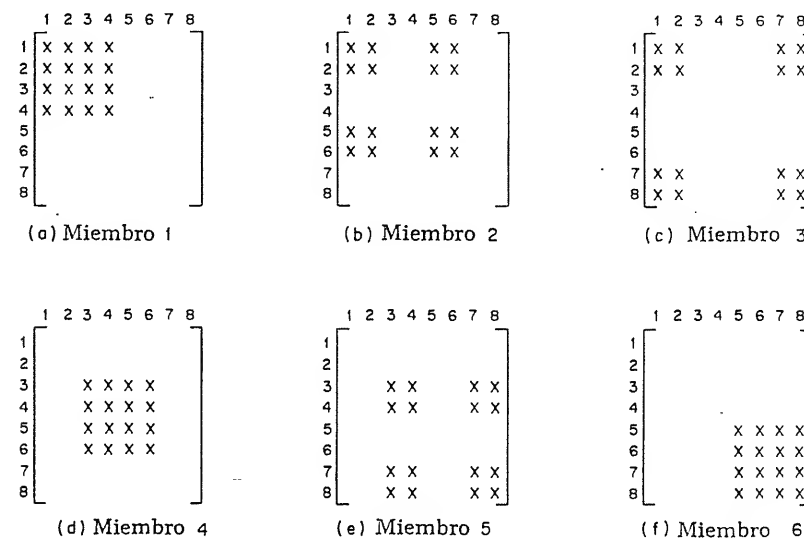


FIG. 4-20. Contribuciones de rigideces de miembro a rigideces de nudo en el ejemplo de una armadura plana

y columnas pertenecen a las restricciones de apoyo. Sin embargo, éste es un caso especial, y hasta un pequeño cambio en la estructura, tal como un apoyo libre en el nudo 3, haría necesario un nuevo arreglo.

Los vectores asociados con las cargas sobre la armadura se estudiarán en seguida. El primero por considerar es el vector A de acciones (o cargas) aplicadas en los nudos. En un nudo típico k , pueden existir dos componentes ortogonales de una fuerza, como se muestra en la Fig. 4-21. La acción A_{xk} es la fuerza en la dirección positiva de x , y la acción A_{yk} es la fuerza en la dirección positiva de y . El vector A , tendrá, por lo tanto, la siguiente forma:

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_{2k-1}, A_{2k}, \dots, A_{2n_j}\} \quad (4-32)$$

en la que hay $2n_j$ elementos correspondientes a $2n_j$ desplazamientos de nudo posibles.

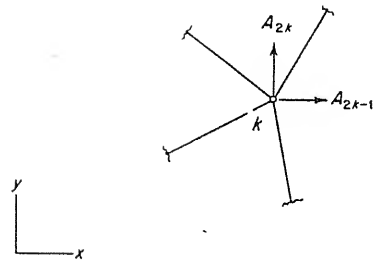


FIG. 4-21. Cargas de nudo para una armadura plana

En seguida considere la matriz de acciones A_{ML} debida a las cargas que actúan sobre los miembros cuando los nudos de la armadura están restringidos contra translación. Las cargas que actúan sobre el miembro i están ilustradas en la Fig. 4-22b, la que también muestra un grupo de ejes orientados con el miembro x_M y y_M . Las acciones A_{ML} para el miembro i están definidas, con respecto a los ejes x_M y y_M , como sigue:

- $(A_{ML})_{i,1}$ = fuerza en la dirección de x_M en el extremo j
- $(A_{ML})_{i,2}$ = fuerza en la dirección de y_M en el extremo j
- $(A_{ML})_{i,3}$ = fuerza en la dirección de x_M en el extremo k
- $(A_{ML})_{i,4}$ = fuerza en la dirección de y_M en el extremo k

Estas acciones de extremo pueden obtenerse para cualquier condición de carga refiriéndose a las tablas en el Apéndice B. La matriz A_{ML} es de orden $m \times 4$ y es de la misma forma que la dada por la Ec. (4-18) para vigas continuas.

El vector A_E de cargas equivalentes de nudo puede ser construido de los elementos de la matriz A_{ML} . Este vector es de la misma forma que el dado por la Ec. (4-32), excepto que A_E reemplaza a A . Para ilustrar el cálculo de las cargas equivalentes de nudo, considere la acción $(A_E)_{2j-1}$ mostrada en la Fig. 4-22a. Esta acción se forma de las contribuciones del miembro i más las contribuciones de los otros miembros que concurren al nudo. Las últimas contribuciones serán denominadas por el símbolo indefinido ΣA_{ML} . Sin embargo, las contribuciones del miembro i , pueden ser fácilmente expresadas en términos de las acciones de extremo $(A_{ML})_i$. Lo único que es necesario es tomar las componentes de las acciones de extremo en el nudo j , en la dirección de x , e invertir sus signos. Por lo tanto, la contribución del miembro i a la carga equivalente $(A_E)_{2j-1}$ es

$$-(A_{ML})_{i,1}C_{Xi} + (A_{ML})_{i,2}C_{Yi}$$

en donde C_{Xi} y C_{Yi} son los cosenos directores del miembro i . Al proceder en esta forma, se pueden encontrar las cargas equivalentes en los nudos j y k (véanse las Figs. 4-22a y 4-22c):

$$\begin{aligned} (A_E)_{2j-1} &= \Sigma A_{ML} - (A_{ML})_{i,1}C_{Xi} + (A_{ML})_{i,2}C_{Yi} \\ (A_E)_{2j} &= \Sigma A_{ML} - (A_{ML})_{i,1}C_{Yi} - (A_{ML})_{i,2}C_{Xi} \\ (A_E)_{2k-1} &= \Sigma A_{ML} - (A_{ML})_{i,3}C_{Xi} + (A_{ML})_{i,4}C_{Yi} \\ (A_E)_{2k} &= \Sigma A_{ML} - (A_{ML})_{i,3}C_{Yi} - (A_{ML})_{i,4}C_{Xi} \end{aligned} \quad (4-33)$$

Estas ecuaciones dan las contribuciones del miembro i a las cargas equivalentes de nudo. Aplicando las ecuaciones consecutivamente para todos los miembros de la armadura, las cargas equivalentes de nudo se pueden obtener para todos los nudos.

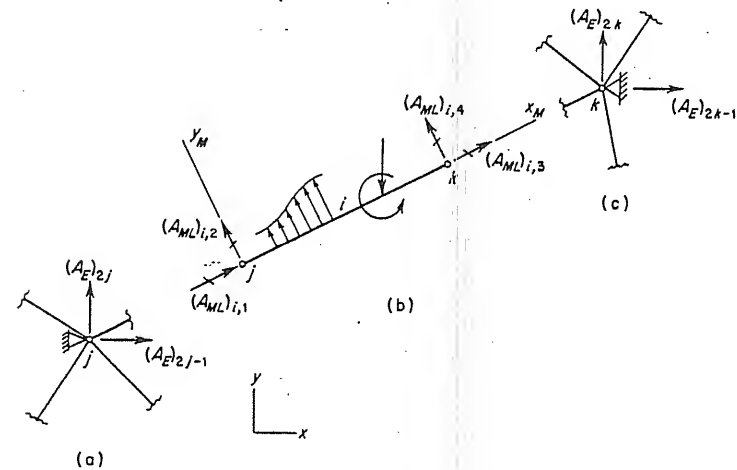


FIG. 4-22. Cargas en el miembro de una armadura plana

Las contribuciones del miembro i al vector A_E pueden también ser establecidas por el método de la rotación de ejes. Este procedimiento se demuestra para armaduras planas en el Art. 4.14.

Los vectores A y A_E pueden sumarse (véase la Ec. 4-5) para formar al vector A_0 . El último vector, entonces, es nuevamente arreglado, si se hace necesario, a fin de aislar el vector A_D (véase la Ec. 4-6). Entonces el vector A_D y la matriz invertida S^{-1} se usan para calcular los desplazamientos de nudo D , como se da en la Ec. (4-8). En seguida, el vector de desplazamientos de nudo D puede convertirse en el vector D_i de todos los posibles desplazamientos de nudo. El vector D_i tiene $2n_j$ elementos y aquellos elementos que corresponden a las restricciones de apoyo valen cero. Como siguiente paso,

la solución para las reacciones de apoyo se obtiene en la forma usual por medio de la Ec. (4-4).

La tarea final para resolver las acciones de extremo del miembro se puede llevar a cabo por medio de la Ec. (4-9), que se repite abajo.

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [S_M]_i \{D_M\}_i \quad (4-9)$$

repetida

Esta ecuación debe ser aplicada una vez por cada miembro de la estructura. Nótese que cuando se escribe en la forma aumentada, la ecuación tiene la misma forma que la Ec. (4-22). El vector $\{A_{ML}\}_i$ se obtiene del *i*ésimo renglón de la matriz A_{ML} descrita arriba. La matriz $[S_M]_i$ es la matriz de rigidez para el *i*ésimo miembro con respecto a los ejes del miembro (véase la Tabla 4-14).

El vector $\{D_M\}_i$, en la Ec. (4-9), consiste de los desplazamientos de extremo para el miembro *i* en las direcciones de los ejes de miembro. Estos desplazamientos pueden ser calculados de los desplazamientos D_j , que están en las direcciones de los ejes de la estructura. Por ejemplo, el primer elemento D_{M1} en el vector $\{D_M\}_i$ representa el desplazamiento en el nudo *j* en la dirección de x_M (véase la Fig. 4-22b). Este desplazamiento está dado por la siguiente expresión:

$$D_{M1} = (D_j)_{j1} C_{Xi} + (D_j)_{j2} C_{Yi}$$

en donde $(D_j)_{j1}$ y $(D_j)_{j2}$ son los desplazamientos del nudo *j* en las direcciones de *x* y *y*, respectivamente (véase la Fig. 4-17). Similarmente, el desplazamiento del nudo *j* en la dirección de y_M se puede expresar en términos de $(D_j)_{j1}$ y $(D_j)_{j2}$ como sigue:

$$D_{M2} = -(D_j)_{j1} C_{Yi} + (D_j)_{j2} C_{Xi}$$

Similarmente, los desplazamientos de extremo del nudo *k* se pueden obtener como sigue:

$$D_{M3} = (D_j)_{k1} C_{Xi} + (D_j)_{k2} C_{Yi}$$

$$D_{M4} = -(D_j)_{k1} C_{Yi} + (D_j)_{k2} C_{Xi}$$

Las expresiones anteriores para los elementos $\{D_M\}_i$ se pueden ahora sustituir en la Ec. (4-9). Cuando se hacen sustituciones similares para los elementos de $[S_M]_i$, la ecuación se puede desarrollar en las siguientes cuatro ecuaciones separadas:

$$\begin{aligned} (A_M)_{i,1} &= (A_{ML})_{i,1} + \frac{EA_{Xi}}{L_i} \{[(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}]C_{Xi} \\ &\quad + [(D_j)_{j2} - (D_j)_{k2}]C_{Yi}\} \\ (A_M)_{i,2} &= (A_{ML})_{i,2} \end{aligned} \quad (4-34)$$

$$\begin{aligned} (A_M)_{i,3} &= (A_{ML})_{i,3} - \frac{E' A_{Xi}}{L_i} \{[(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}]C_{Xi} \\ &\quad + [(D_j)_{j2} - (D_j)_{k2}]C_{Yi}\} \\ (A_M)_{i,4} &= (A_{ML})_{i,4} \end{aligned} \quad (4-34, \text{ cont.})$$

Estas ecuaciones pueden ahora ser aplicadas repetidamente para todos los miembros de la armadura. Para cada miembro los desplazamientos D_j que aparecen en las ecuaciones deben extraerse en la forma apropiada del vector D_j de todos los desplazamientos de nudo.

Otro método para obtener el vector $\{D_M\}_i$ que aparece en la Ec. (4-9) es usar rotación de eje. Este método será descrito más adelante en el Art. 4.14.

Un ejemplo del análisis de una armadura plana aparece en el siguiente artículo, y un programa de computación para el análisis de armaduras planas se presenta en el Art. 5.5.

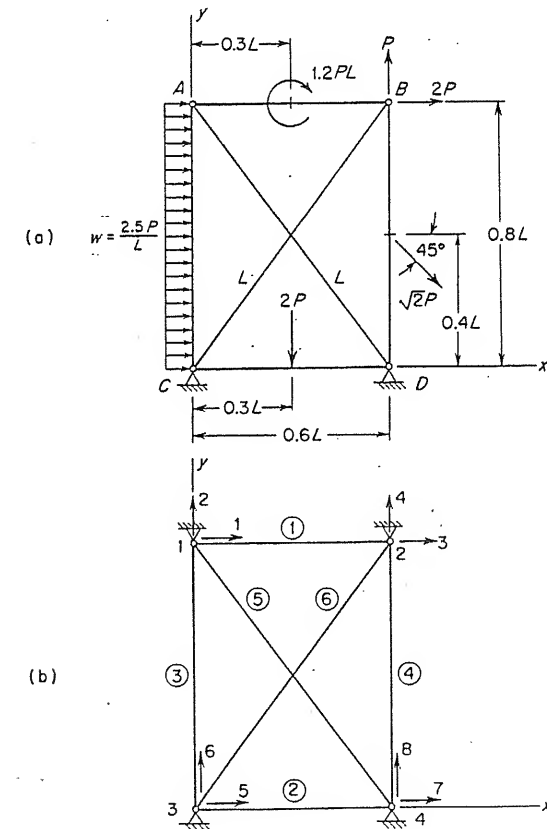


FIG. 4-23. Ejemplo (armadura plana)

4.12. Ejemplo. La armadura plana mostrada en la Fig. 4-23a va a ser analizada utilizando los métodos descritos en el artículo anterior. La armadura está restringida en los puntos C y D por apoyos articulados que evitan las traslaciones en las direcciones x y y . Las cargas sobre la armadura consisten en cargas de nudo y cargas de miembro.

Un sistema arbitrario para numerar los miembros y los nudos se da en la Fig. 4-23b, que muestra la estructura restringida. Los números de los miembros se indican en círculos adyacentes a los miembros y los números de los nudos se indican por números adyacentes a los nudos. El sistema de numeración para los desplazamientos de nudo, se representa por números adyacentes a las flechas que indican las direcciones positivas de los posibles desplazamientos. Por supuesto, el sistema de numeración de los desplazamientos se encuentra del sistema de numeración de los nudos de acuerdo con las Ecs. (4-27). Nótese que el sistema mostrado en la Fig. 4-23b para numerar los nudos (y por ende los desplazamientos), hace innecesario el nuevo arreglo de las matrices en el análisis. Sin embargo, éste no será en general el caso.

TABLA 4-18. INFORMACION DE LOS NUDOS PARA LA ARMADURA DE LA FIG. 4-23

Nudo	Coordenadas		Lista de Restricciones	
	x	y	x	y
1	0	0.8L	0	0
2	0.6L	0.8L	0	0
3	0	0	1	1
4	0.6L	0	1	1

TABLA 4-19. INFORMACION DE LOS MIEMBROS PARA LA ARMADURA DE LA FIG. 4-23

Miembro	Nudo j	Nudo k	Area	Longitud	Cosenos Directores	
					C_x	C_y
1	1	2	$0.6A_x$	0.6L	1.0	0
2	3	4	$0.6A_x$	0.6L	1.0	0
3	3	1	$0.8A_x$	0.8L	0	1.0
4	4	2	$0.8A_x$	0.8L	0	1.0
5	1	4	A_x	L	0.6	-0.8
6	3	2	A_x	L	0.6	0.8

TABLA 4-20. MATRICES DE RIGIDEZ DE MIEMBRO PARA LOS EJES DE LA ESTRUCTURA

$$[S_{MD}]_1 = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$[S_{MD}]_2 = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$$[S_{MD}]_3 = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$[S_{MD}]_4 = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$[S_{MD}]_5 = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} 0.36 & -0.48 & -0.36 & 0.48 \\ -0.48 & 0.64 & 0.48 & -0.64 \\ -0.36 & 0.48 & 0.36 & -0.48 \\ 0.48 & -0.64 & -0.48 & 0.64 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$$[S_{MD}]_6 = \frac{EA_x}{L} \begin{bmatrix} 0.36 & 0.48 & -0.36 & -0.48 \\ 0.48 & 0.64 & -0.48 & -0.64 \\ -0.36 & -0.48 & 0.36 & 0.48 \\ -0.48 & -0.64 & 0.48 & 0.64 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Con el origen de coordenadas seleccionado en el nudo 3, como se muestra en la Fig. 4-23, las coordenadas x y y de ese punto ambas valen cero. Las coordenadas para todos los puntos de la estructura se dan en la Tabla 4-18 en términos de la longitud L de uno de los miembros diagonales. La Tabla 4-18 también da la lista de restricciones para la estructura. Como en el ejemplo de la viga continua, el número 1 en la lista de restricciones indica que existe una restricción, y la presencia de cero indica que no existe restricción.

La Tabla 4-19 contiene la información para los miembros de la armadura de la Fig. 4-23. Los números de los miembros, números de los nudos, y áreas de la sección transversal, son datos esenciales, pero las longitudes de los miem-

bros y sus cosenos directores se pueden calcular de las coordenadas de los nudos en los extremos de los miembros (véanse las Ecs. 4-24 y 4-25). Nótese que el escoger arbitrariamente cuál extremo de un miembro se denomina j o k , determina el signo de los cosenos directores.

Como un paso preliminar para formar la matriz de la rigidez total de nudo S_j , las matrices de la rigidez individual de miembro S_{MD} se resumen en la Tabla 4-20. Estas matrices están formadas de la Tabla 4-15 dada en el Art. 4.10. Los elementos de cada una de estas matrices pueden ser cambiados a los lugares apropiados en S_j calculando los índices $j1$, $j2$, $k1$ y $k2$ dados por las Ecs. (4-27) y luego, haciendo los cambios de acuerdo con las Ecs. (4-28) a (4-31). Como una ayuda en este proceso, los valores numéricos de los índices $j1$, $j2$, $k1$ y $k2$ se dan en la Tabla 4-20 hacia abajo en el lado derecho, y en el fondo, de izquierda a derecha de cada matriz S_{MD} . Como un ejemplo del procedimiento de cambio, considérese el elemento $(S_{MD13})_2$, que es el elemento del primer renglón y tercera columna de la matriz S_{MD} para el miembro 2. Este elemento está encerrado en un círculo en la Tabla 4-20, y su valor es $-EA_x/L$. Para el elemento, los índices de renglón y columna de S_j también están encerrados en círculo en la Tabla 4-20. Estos índices indican que el elemento debe ser cambiado a la posición dada por el quinto renglón y séptima columna de la matriz S_j . Este elemento se muestra encerrado en un círculo en la Tabla 4-21, que muestra la apariencia de la matriz S_j después que se ha completado

TABLA 4-21. MATRIZ DE LA RIGIDEZ DE NUDO PARA LA ARMADURA DE LA FIG. 4-23

$$S_j = \frac{EA_x}{L}$$

1.36	-0.48	-1.00	0	0	0	-0.36	0.48
-0.48	1.64	0	0	0	-1.00	0.48	-0.64
-1.00	0	1.36	0.48	-0.36	-0.48	0	0
0	0	0.48	1.64	-0.48	-0.64	0	-1.00
0	0	-0.36	-0.48	0.36	0.48	-1.00	0
0	-1.00	-0.48	-0.64	0.48	1.64	0	0
-0.36	0.48	0	0	-1.00	0	1.36	-0.48
0.48	-0.64	0	-1.00	0	0	-0.48	1.64

TABLA 4-22. INVERSIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

$$S^{-1} = \frac{L}{EA_x}$$

2.503	0.733	2.053	-0.601
0.733	0.824	0.601	-0.176
2.053	0.601	2.503	-0.733
-0.601	-0.176	-0.733	0.824

el proceso de cambio. La matriz se divide de acuerdo con la Ec. (4-1), y aparece automáticamente la matriz de rigidez de 4×4 S en la parte superior izquierda sin necesidad de nuevos arreglos en este ejemplo. La inversión de la matriz S se muestra en la Tabla 4-22 para usarla en cálculos posteriores.

Las cargas aplicadas a la estructura aparecen en la Fig. 4-23a. Las que están aplicadas en los nudos se muestran en la Tabla 4-23, y las acciones en los

TABLA 4-23. ACCIONES APLICADAS EN LOS NUDOS

Nudo	Fuerza en la Dirección de x	Fuerza en la dirección de y
1	0	0
2	2P	P
3	0	0
4	0	0

extremos de los miembros en la estructura restringida causadas por las cargas, se resumen en la Tabla 4-24. Las cargas de nudo se colocan en el vector A (véase la Ec. 4-32):

$$A = P\{0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

y las acciones en la Tabla 4-24 forman la matriz A_{ML} . En seguida, los elemen-

TABLA 4-24. ACCIONES EN LOS EXTREMOS DE MIEMBROS RESTRINGIDOS DEBIDOS A LAS CARGAS

Miembro	$(A_{ML})_{i,1}$	$(A_{ML})_{i,2}$	$(A_{ML})_{i,3}$	$(A_{ML})_{i,4}$
1	0	-2P	0	2P
2	0	P	0	P
3	0	P	0	P
4	0.5P	0.5P	0.5P	0.5P
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0

tos de A_{ML} se cambian al vector de cargas equivalentes A_E , como se indica por las Ecs. (4-33). El vector resultante es como sigue:

$$A_E = P\{1.0, 2.0, 0.5, -2.5, 1.0, -1.0, 0.5, -1.5\}$$

En seguida los vectores A y A_E se suman (véase la Ec. 4-5) para formar el vector de cargas combinadas A_C :

$$A_C = P\{1.0, 2.0, 2.5, -1.5, 1.0, -1.0, 0.5, -1.5\}$$

Como se mencionó anteriormente, no hay necesidad de volver a arreglar este vector. Los primeros cuatro elementos constituyen el vector A_D :

$$A_D = P\{1.0, 2.0, 2.5, -1.5\}$$

y los últimos cuatro elementos son los elementos negativos de A_{RL} :

$$A_{RL} = P\{-1.0, 1.0, -0.5, 1.5\}$$

La solución se puede completar primero calculando los desplazamientos de nudo D, utilizando la Ec. (4-8), con el siguiente resultado:

$$D = S^{-1}A_D = \frac{PL}{EA_X} \{10.001, 4.147, 10.611, -4.020\}$$

El vector D_j para esta estructura contiene el vector D en la primera parte y ceros en su parte final:

$$D_j = \frac{PL}{EA_X} \{10.001, 4.147, 10.611, -4.020, 0, 0, 0, 0\}$$

En el siguiente paso se calculan las reacciones utilizando la Ec. (4-4) con la matriz S_{RD} obtenida de la parte inferior izquierda de la Tabla 4-21:

$$A_R = A_{RL} + S_{RD}D = P\{-2.89, -5.67, -2.11, 7.67\}$$

Como último paso en el análisis, las acciones de extremo de miembro A_M se obtienen por aplicación de la Ec. (4-9) o de las Ecs. (4-34) para cada miembro de la estructura. Los resultados de estos cálculos se resumen en la

TABLA 4.25. ACCIONES DE EXTREMO FINALES DE MIEMBRO

Miembro	$(A_M)_{i,1}$	$(A_M)_{i,2}$	$(A_M)_{i,3}$	$(A_M)_{i,4}$
1	-0.610P	-2.000P	0.610P	2.000P
2	0.0	1.000P	0.0	1.000P
3	-4.147P	1.000P	4.147P	1.000P
4	4.520P	0.500P	-3.520P	0.500P
5	2.683P	0.0	-2.683P	0.0
6	-3.150P	0.0	3.150P	0.0

Tabla 4-25. Este paso completa el análisis de la armadura plana para las cargas dadas.

4.13. Rotación de ejes en dos dimensiones. Como previamente se mencionó en el Art. 4.10, el método directo para la formulación de las rigideces de miembro es satisfactorio para vigas continuas y armaduras. Además, un método que emplea la rotación de ejes es apropiado para estructuras más complejas. En este artículo, la rotación de ejes para vectores en dos dimensiones, se formula sobre una base

geométrica; en el siguiente artículo, el método se aplica en el análisis de armaduras planas. En seguida, en el Art. 4.15, se discutirá el tema de rotación de ejes en tres dimensiones, y en los artículos subsecuentes se tratarán otros tipos de estructuras utilizando esta técnica.

A fin de principiar la discusión, considérese una acción A que actúa en el plano x-y (véase la Fig. 4-24). Dos grupos de ejes ortogonales con el origen en O se muestran en la figura. Los ejes x_s, y_s más adelante se tomarán paralelos a una serie de ejes de referencia de la estructura y los grupos de x_M, y_M se tomarán como un par de ejes orientados con el miembro. Los ejes x_M, y_M forman con los ejes x_s, y_s un ángulo γ . Permítase que los cosenos directores del eje x_M con respecto a los ejes x_s y y_s sean λ_{11} y λ_{12} , respectivamente. Es evidente,

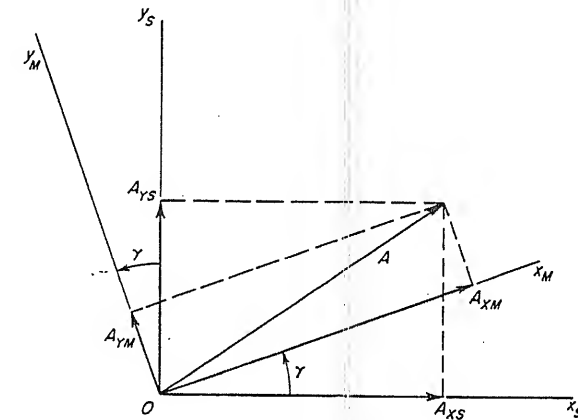


FIG. 4-24. Rotación de ejes en dos dimensiones

de la Fig. 4-24, que estos cosenos directores pueden ser expresados en términos del ángulo γ como sigue:

$$\lambda_{11} = \cos \gamma \quad \lambda_{12} = \cos(90^\circ - \gamma) = \sin \gamma \quad (a)$$

También, permítase que los cosenos directores del eje y_M , con respecto a los ejes x_s y y_s sean λ_{21} y λ_{22} , respectivamente. Estos cosenos directores pueden también ser expresados en términos del ángulo γ :

$$\lambda_{21} = \cos(90^\circ + \gamma) = -\sin \gamma \quad \lambda_{22} = \cos \gamma \quad (b)$$

Para cualquiera de los cosenos directores anteriores, el primer subíndice se refiere a los ejes x_M, y_M , y el segundo subíndice se refiere a los ejes x_s, y_s . Además, el número 1 indica la dirección x (cualquiera de x_M o x_s), y el número 2 indica la dirección y (cualquiera

de y_M o y_S). Por ejemplo, λ_{12} es el coseno director del eje x_M con respecto al eje y_S .

La acción A puede separarse en dos componentes ortogonales A_{XS} y A_{YS} en las direcciones de x_S y y_S , respectivamente, según se muestra en la Fig. 4-24. Alternativamente, A también puede ser separada en dos componentes ortogonales A_{XM} y A_{YM} en las direcciones de x_M y y_M , respectivamente, como también se muestra en la figura. El último grupo de componentes puede expresarse en términos del grupo anterior por revisión de la geometría en la Fig. 4-24. Se puede observar que A_{XM} es igual a la suma de las proyecciones de A_{XS} y A_{YS} sobre el eje x_M . Además, A_{YM} es igual a la suma de las proyecciones de A_{XS} y A_{YS} sobre el eje y_M . Por lo tanto, las expresiones para A_{XM} y A_{YM} son:

$$\begin{aligned} A_{XM} &= \lambda_{11}A_{XS} + \lambda_{12}A_{YS} \\ A_{YM} &= \lambda_{21}A_{XS} + \lambda_{22}A_{YS} \end{aligned} \quad (c)$$

En la forma matricial, estas expresiones se convierten en:

$$\begin{bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

La sustitución de las expresiones (a) y (b) en la Ec. (4-35) produce la siguiente forma alternativa:

$$\begin{bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

Las Ecs. (4-35) y (4-36) pueden ser precisadas en una forma concisa por la expresión

$$A_M = R A_S \quad (4-37)$$

En esta ecuación, A_M es un vector que consiste de las componentes de A , paralelas a los ejes x_M , y_M ; A_S es un vector que contiene las componentes de la acción A paralelas a los ejes x_S , y_S ; y R es una matriz de los cosenos directores que se denominará la *matriz de rotación*. Como se muestra por las Ecs. (4-35) y (4-36), la matriz de rotación en un problema de dos dimensiones es como sigue:

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

También es posible expresar el grupo de componentes x_S , y_S de la acción A en términos del grupo de componentes x_M , y_M . Esta transformación se puede llevar a cabo observando que A_{XS} es igual a la suma de las proyecciones de A_{XM} y A_{YM} sobre el eje x_S , y que A_{YS} es igual a la suma de las proyecciones de A_{XM} y A_{YM} sobre el eje y_S . Por lo tanto,

$$A_{XS} = \lambda_{11}A_{XM} + \lambda_{21}A_{YM} \quad (d)$$

$$A_{YS} = \lambda_{12}A_{XM} + \lambda_{22}A_{YM}$$

Cuando se expresan en forma matricial, estas ecuaciones se convierten en:

$$\begin{bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \end{bmatrix} \quad (4-39)$$

o

$$\begin{bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

Las Ecs. (4-39) y (4-40) pueden ser representadas por la ecuación matricial

$$A_S = R' A_M \quad (4-41)$$

en donde R' es el transpuesto de la matriz de rotación R .

Finalmente, es obvio que de las Ecs. (4-37) y (4-41) el transpuesto de R es igual a su inverso:

$$R' = R^{-1} \quad (4-42)$$

Por lo tanto, la matriz de rotación R es una matriz ortogonal.*

Ya que tanto los desplazamientos pequeños como las acciones se pueden tratar como vectores, las relaciones formuladas anteriormente para la acción A , pueden ser igualmente aplicadas a un desplazamiento D . Por lo tanto, ecuaciones similares a las Ecs. (4-37) y (4-41) se pueden escribir para los desplazamientos, como sigue:

$$D_M = R D_S \quad (4-43)$$

$$D_S = R' D_M \quad (4-44)$$

En estas ecuaciones, el vector D_M consiste de las componentes del desplazamiento D paralelo a los ejes del miembro, y el vector D_S contiene las componentes del desplazamiento D paralelo a los ejes de la estructura.

Los conceptos de rotación de ejes arriba discutidos serán aplicados a armaduras planas en el siguiente artículo.

4.14. Aplicación a miembros de armaduras planas. Un miembro típico de i de una armadura plana, marcado por los nudos j y k en sus extremos, se muestra en la Fig. 4-25. Por conveniencia, el miembro está orientado de tal forma que sus cosenos directores son positivos. Los ejes de miembro x_M , y_M forman un ángulo γ con los ejes x_S , y_S , que son paralelos a los ejes de referencia x , y de toda la es-

* Para más discusión sobre matrices ortogonales, véase cualquier texto sobre álgebra matricial; por ejemplo, *Matrix Algebra for Engineers*, por los autores, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1965.

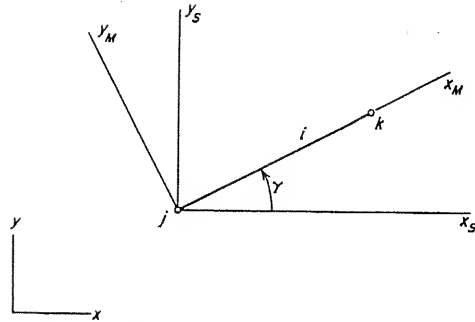


FIG. 4-25. Rotación de ejes para el miembro de una armadura plana

estructura. Para el propósito de transformaciones de rotación, es poco importante el que uno se refiera al grupo de ejes x_s, y_s o al grupo de ejes paralelos x, y . Para eficiencia de la notación, el subíndice S generalmente se omitirá cuando se intente referirse a los ejes de la estructura.

Como primer paso en el uso de la rotación de ejes en el análisis de una armadura plana, la matriz de rotación R será expresada en términos de los cosenos directores del miembro i . Una revisión de la Fig. 4-25 muestra que los cosenos directores del miembro en términos del ángulo γ son:

$$C_x = \cos \gamma \quad C_y = \sin \gamma$$

Entonces, la matriz de rotación (véase la Ec. 4-38) se convierte en:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y \\ -C_y & C_x \end{bmatrix} \quad (4-45)$$

En seguida, las relaciones entre acción y desplazamiento en las direcciones de x_M y y_M en los extremos del miembro i se pueden expresar como sigue:

$$\{A_M\}_i = [S_M]_i \{D_M\}_i \quad (4-46)$$

La Ec. (4-46) es la misma que la Ec. (4-9) cuando el vector $\{A_{ML}\}_i$, que aparece en la última ecuación, es nulo. Por lo tanto, la Ec. (4-46) da las acciones en los extremos del miembro debidas a los desplazamientos de sus extremos. La matriz de rigidez de miembro $[S_M]_i$ (véase la Ec. 4-46) fue formada en el Art. 4.10 y presentada en la Tabla 4-14. Ahora, el objetivo es transformar esta matriz para los ejes del miembro en la matriz $[S_{MD}]_i$ para los ejes de la estructura (véase la Tabla 4-15).

Como paso preliminar al transformar los ejes de la estructura, la Ec. (4-46) se puede escribir en forma dividida (omitiendo el subíndice i), como sigue:

$$\begin{bmatrix} A_{M1} \\ A_{M2} \\ A_{M3} \\ A_{M4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{M11} & S_{M12} & S_{M13} & S_{M14} \\ S_{M21} & S_{M22} & S_{M23} & S_{M24} \\ S_{M31} & S_{M32} & S_{M33} & S_{M34} \\ S_{M41} & S_{M42} & S_{M43} & S_{M44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{M1} \\ D_{M2} \\ D_{M3} \\ D_{M4} \end{bmatrix} \quad (a)$$

Los subíndices 1, 2, 3 y 4, usados en esta ecuación, se refieren a las direcciones de los miembros mostradas en la Fig. 4-14c. La Ec. (a) también puede ser escrita en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} A_{Mj} \\ A_{Mk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{Mjj} & S_{Mjk} \\ S_{Mkj} & S_{Mkk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Mj} \\ D_{Mk} \end{bmatrix} \quad (b)$$

En esta ecuación los subíndices j y k de las submatrices se refieren a los extremos j y k del miembro. Los términos A_{Mj} , A_{Mk} , D_{Mj} y D_{Mk} , en la Ec. (b), representan vectores de dos dimensiones (ya sean acciones o desplazamientos) en los extremos del miembro, en las direcciones de los ejes del miembro (véase la Fig. 4-14c). Por lo tanto, se pueden expresar, respecto a los ejes de la estructura (véase la Fig. 4-14b), utilizando las fórmulas de rotación apropiadas del artículo anterior. Estas fórmulas son las Ecs. (4-37) y (4-43). Cuando estas relaciones se sustituyen en la Ec. (b), se convierten en

$$\begin{bmatrix} R A_j \\ R A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{Mjj} & S_{Mjk} \\ S_{Mkj} & S_{Mkk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R D_j \\ R D_k \end{bmatrix} \quad (c)$$

Las submatrices A_j , A_k , D_j y D_k representan la acción de dos dimensiones y los vectores de desplazamiento en los extremos del miembro con respecto a los ejes de la estructura.

Una forma equivalente de la Ec. (c) es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} R & O \\ O & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_j \\ A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{Mjj} & S_{Mjk} \\ S_{Mkj} & S_{Mkk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & O \\ O & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_j \\ D_k \end{bmatrix} \quad (d)$$

Para simplificar la escritura de esta ecuación, hágase que R_T sea la *matriz de rotación transformada* para acciones y desplazamientos en ambos extremos del miembro:

$$R_T = \begin{bmatrix} R & O \\ O & R \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

La Ec. (d), entonces, se puede escribir como sigue:

$$R_T A = S_M R_T D \quad (e)$$

Los vectores A y D en la Ec. (e) consisten de las acciones y desplazamientos en los extremos del miembro en las direcciones de los ejes de la estructura (véase la Fig. 4-14b).

Multiplicando ambos lados de la Ec. (e) por la inversa de R_T , da:

$$A = R_T^{-1} S_M R_T D \quad (f)$$

Como la submatriz R es ortogonal, la matriz R_T también es ortogonal. Este hecho se puede ver multiplicando R_T por su transpuesto, como sigue:

$$\begin{aligned} R_T' R_T &= \begin{bmatrix} R' & O \\ O & R' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & O \\ O & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R'R & O \\ O & R'R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R^{-1}R & O \\ O & R^{-1}R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

Por lo tanto, el transpuesto de R_T es también el inverso de R_T :

$$R_T^{-1} = R_T' \quad (4-48)$$

y la sustitución de la Ec. (4-48) en la Ec. (f) produce:

$$A = R_T' S_M R_T D \quad (4-49)$$

Puesto que la ecuación de acción-desplazamiento que relaciona a las acciones A y desplazamiento D es

$$A = S_{MD} D \quad (4-50)$$

en donde S_{MD} es la matriz de rigidez de miembro para los ejes de la estructura, se puede ver rápidamente, comparando las Ecs. (4-49) y (4-50), que

$$S_{MD} = R_T' S_M R_T \quad (4-51)$$

El cálculo de la matriz S_{MD} de esta ecuación se lleva a cabo como sigue:
 $S_{MD} =$

$$\begin{bmatrix} C_X & -C_Y & 0 & 0 \\ C_Y & C_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_X & -C_Y \\ 0 & 0 & C_Y & C_X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA_X}{L} & 0 & -\frac{EA_X}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_X}{L} & 0 & \frac{EA_X}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_X & C_Y & 0 & 0 \\ -C_Y & C_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_X & C_Y \\ 0 & 0 & -C_Y & C_X \end{bmatrix}$$

Cuando estas multiplicaciones matriciales se hacen, el resultado es la matriz S_{MD} (véase la Tabla 4-15) que previamente fue obtenida por el método de la formulación directa.

Además de la transformación de la matriz de rigidez de miembro de los ejes de miembro a los ejes de la estructura, los conceptos de rotación de ejes también se pueden utilizar para otros propósitos en el método de análisis de la rigidez. Una aplicación importante se presenta en la formación del vector de carga equivalente A_E de los elementos de la matriz A_{ML} . Las contribuciones al arreglo anterior (los elementos que están alineados con los ejes de la estructura) del último arreglo (que tiene los elementos alineados con los ejes del miembro) se pueden obtener por la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} [R_T']_i \{A_{ML}\}_i &= \begin{bmatrix} C_{Xi} & -C_{Yi} & 0 & 0 \\ C_{Yi} & C_{Xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{Xi} & -C_{Yi} \\ 0 & 0 & C_{Yi} & C_{Xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{ML})_{i,1} \\ (A_{ML})_{i,2} \\ (A_{ML})_{i,3} \\ (A_{ML})_{i,4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (A_{ML})_{i,1} C_{Xi} - (A_{ML})_{i,2} C_{Yi} \\ (A_{ML})_{i,1} C_{Yi} + (A_{ML})_{i,2} C_{Xi} \\ (A_{ML})_{i,3} C_{Xi} - (A_{ML})_{i,4} C_{Yi} \\ (A_{ML})_{i,3} C_{Yi} + (A_{ML})_{i,4} C_{Xi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en donde el vector $\{A_{ML}\}_i$ se forma de los elementos del iésimo renglón de la matriz A_{ML} . Estas expresiones, con los signos cambiados, representan las partes de incremento de A_E previamente dado en las Ecs. (4-33).

Otra aplicación significativa del concepto de la rotación de ejes aparece en el cálculo de las acciones de extremo finales de miembro. Este cálculo consiste en la superposición de las acciones iniciales en el miembro i y de los efectos de desplazamientos de nudo. Este procedimiento de superposición se expresa por la Ec. (4-9) que se repite abajo:

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [S_M]_i \{D_M\}_i \quad (4-9)$$

repetida

El vector $\{D_M\}_i$ en esta ecuación se debe establecer del vector de desplazamientos de nudo D_n . Los últimos desplazamientos están en las direcciones de los ejes de la estructura, pero los desplazamientos primeros están en las direcciones de los ejes de miembro. Por lo tanto, el vector $\{D_M\}_i$ se puede obtener por la siguiente transformación:

$$\{D_M\}_i = [R_T]_i \{D_J\}_i \quad (4-52)$$

en la que $\{D_J\}_i$ es el vector de desplazamientos de nudo para los extremos del miembro i . Sustituyendo la Ec. (4-52) en la Ec. (4-9) se produce la expresión siguiente:

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [S_M]_i [R_T]_i \{D_J\}_i \quad (4-53)$$

La Ec. (4-53) puede también ser escrita en una forma más general.

$$\begin{bmatrix} (A_M)_{i,1} \\ (A_M)_{i,2} \\ (A_M)_{i,3} \\ (A_M)_{i,4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{ML})_{i,1} \\ (A_{ML})_{i,2} \\ (A_{ML})_{i,3} \\ (A_{ML})_{i,4} \end{bmatrix} + \frac{EA_{Xi}}{L_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{Xi} & C_{Yi} & 0 & 0 \\ -C_{Yi} & C_{Xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{Xi} & C_{Yi} \\ 0 & 0 & -C_{Yi} & C_{Xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (D_J)_{j1} \\ (D_J)_{j2} \\ (D_J)_{k1} \\ (D_J)_{k2} \end{bmatrix} \quad (4-54)$$

En la Ec. (4-54), los subíndices $j1$, $j2$, $k1$ y $k2$ llevan las definiciones previamente dadas por las Ecs. (4-27). Cuando se hacen las multiplicaciones matriciales indicadas en la Ec. (4-54), las cuatro ecuaciones resultantes son las mismas Ecs. (4-34) obtenidas en el Art. 4.11 por el método de la formulación directa.

En resumen, el concepto de rotación de ejes tiene varias aplicaciones útiles en el método de análisis de la rigidez. La matriz de rigidez de miembro para los ejes del miembro S_M se puede transformar en la matriz de rigidez de miembro para los ejes de estructura S_{MD} por medio de la Ec. (4-51). Además, las contribuciones al vector de cargas equivalentes A_E de un miembro dado, se pueden evaluar convenientemente por rotación de ejes, como se discutió antes. Finalmente, las acciones de extremo de miembro se pueden obtener por la formulación de rotación de ejes dada por la Ec. (4-53).

Se verá más tarde que las ecuaciones matriciales arriba dadas para rotación de ejes en armaduras planas, se pueden generalizar y aplicar a tipos más complicados de estructuras.

4.15. Rotación de ejes en tres dimensiones. Considérese la acción A en tres dimensiones mostradas en la Fig. 4-26. Los dos juegos de ejes ortogonales x_S, y_S, z_S y x_M, y_M, z_M son análogos a los dos juegos de ejes en el caso de dos dimensiones de la Fig. 4-24. Hágase que los cosenos directores del eje x_M , con respecto a los ejes x_S, y_S, z_S , sean $\lambda_{11}, \lambda_{12}$ y λ_{13} . Estos cosenos directores son los cosenos de los ángulos entre el eje x_M y los tres ejes x_S, y_S y z_S , respectivamente. También hágase que los cosenos directores para el eje y_M sean $\lambda_{21}, \lambda_{22}$ y λ_{23} , y aquellos para el eje z_M sean $\lambda_{31}, \lambda_{32}$ y λ_{33} .

La acción A se puede representar por un juego de tres componentes ortogonales A_{XS}, A_{YS} y A_{ZS} en las direcciones de x_S, y_S y z_S respectivamente, como se muestra en la Fig. 4-26. De modo alternativo, esta acción se puede representar por un segundo juego de componentes A_{XM}, A_{YM} y A_{ZM} en las direcciones de x_M, y_M y z_M ; éstas también están indicadas en la figura. Las últimas componentes se pueden relacionar con las anteriores como en el caso de dos dimen-

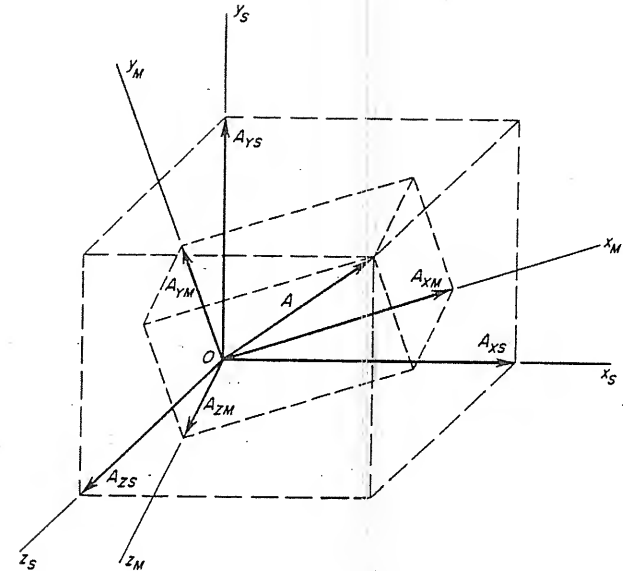


FIG. 4-26. Rotación de ejes en tres dimensiones

siones. Por ejemplo, A_{XM} es igual a la suma de las proyecciones de A_{XS}, A_{YS} y A_{ZS} sobre el eje x_M . Las componentes de A_{YM} y A_{ZM} se pueden expresar en una forma similar, resultando las siguientes relaciones:

$$A_M = \begin{bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \\ A_{ZM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \\ A_{ZS} \end{bmatrix} \quad (4-55)$$

Si una matriz de rotación R tridimensional se define como sigue,

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \quad (4-56)$$

entonces la Ec. (4-55) se puede escribir en la forma

$$A_M = R A_S \quad (4-57)$$

que es de la misma forma que la Ec. (4-37) para el caso de dos dimensiones.

Es también posible expresar el juego de componentes de la acción A sobre los ejes x_S, y_S, z_S en términos de las componentes sobre los ejes x_M, y_M, z_M . Por ejemplo, A_{XS} es igual a la suma de las proyecciones de A_{XM}, A_{YM} y A_{ZM} sobre el eje x_S . Expresando las componentes en esta forma se llega a la siguiente relación:

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} A_{XS} \\ A_{YS} \\ A_{ZS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{XM} \\ A_{YM} \\ A_{ZM} \end{bmatrix} \quad (4-58)$$

Esta ecuación se puede escribir en forma concisa, como sigue:

$$\mathbf{A}_S = \mathbf{R}' \mathbf{A}_M \quad (4-59)$$

que es de la misma forma que la Ec. (4-41) en el caso de dos dimensiones.

Es obvio, de las Ecs. (4-57) y (4-59), que el transpuesto de la matriz \mathbf{R} , de 3×3 , es igual a su inversa. Por lo tanto, esta matriz es ortogonal, como en el caso bidimensional.

Las relaciones correspondientes a las ecuaciones anteriores, que están deducidas para acciones, son buenas también para la transformación de desplazamientos en tres dimensiones. Por lo tanto, las componentes \mathbf{D}_M de un desplazamiento D en las direcciones de x_M , y_M , z_M se pueden expresar en términos de las componentes \mathbf{D}_S en las direcciones de x_S , y_S , z_S , como sigue:

$$\mathbf{D}_M = \mathbf{R} \mathbf{D}_S \quad (4-60)$$

También, el vector \mathbf{D}_S se puede expresar en términos del vector \mathbf{D}_M por la relación:

$$\mathbf{D}_S = \mathbf{R}' \mathbf{D}_M \quad (4-61)$$

Las Ecs. (4-60) y (4-61) son de la misma forma que las Ecs. (4-43) y (4-44) para el caso bidimensional. Por lo tanto, las relaciones para la rotación de ejes en tres dimensiones, son completamente análogas a las de dos dimensiones, excepto que la matriz \mathbf{R} es del orden de 3×3 en vez de 2×2 , y los vectores son del orden de 3×1 en vez de 2×1 .

4.16. Rigideces de miembros de marcos planos. Como introducción en el análisis de marcos planos, la matriz de rigidez de miembro para un miembro típico de un marco plano será encontrada en este artículo. La matriz primeramente se formula con respecto a los ejes del miembro y entonces se transformará con respecto a los ejes de la estructura por medio del método de rotación de ejes.

La Fig. 4-27a muestra un miembro típico i en un marco plano. Los nudos en los extremos del miembro se denominan j y k , como en las estructuras anteriores.

El juego de ejes ortogonales x , y , z , mostrados en la Fig. 4-27, son los ejes de referencia para la estructura. El marco plano descansa en el plano x - y , que se supone es el plano principal de flexión para todos los miembros. Se supone que los miembros del marco

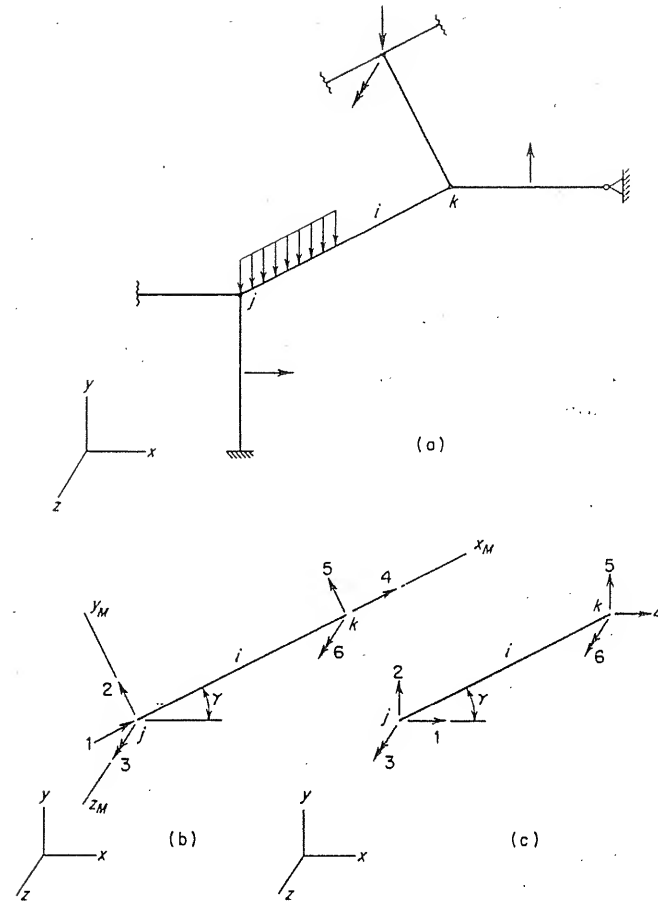


FIG. 4-27. Sistema de numeración para un miembro de un marco plano

están rígidamente conectados, y los desplazamientos significantes de los nudos consisten de translaciones en el plano x - y y giros en el sentido de z .

Los posibles desplazamientos en los extremos de un típico miembro i están indicados en la Fig. 4-27b para los ejes orientados para el miembro x_M , y_M y z_M . Los ejes de miembro están girados de los ejes de la estructura respecto del eje z_M un ángulo γ . Los seis desplazamientos de extremo, mostrados en sus sentidos positivos, consisten de translaciones en las direcciones de x_M y y_M , y un giro en el sentido z_M (o z) en los extremos j y k , respectivamente. Si se inducen desplazamientos unitarios de estos tipos en cada extremo del miembro uno por uno, las acciones de restricción resultantes constituirán

los elementos de la matriz de rigidez de miembro S_M para ejes de miembro. Estas acciones de restricción pueden obtenerse de los casos (1), (2), (6), (7), (8) y (12) de la Fig. 4-2 en el Art. 4.3. La matriz de rigidez de miembro de 6×6 para ejes de miembro está dada en la Tabla 4-26.

TABLA 4-26. MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO PARA UN MARCO PLANO PARA EJES DE MIEMBRO (FIG. 4-27b)

$$S_M = \begin{bmatrix} \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Considérese en seguida la tarea de transformar la matriz de rigidez de miembro S_M a la matriz de rigidez S_{MD} para los ejes de la estructura. La Fig. 4-27c indica los seis posibles desplazamientos en los extremos de miembro i en las direcciones de los ejes de la estructura. A fin de transformar la matriz de rigidez de miembro de los ejes del miembro a los ejes de la estructura, se requiere la matriz de rotación transformada R_T para el miembro de un marco plano. Como primer paso, la matriz de rotación R de 3×3 se expresará en términos de los cosenos directores del miembro i , mostrado en la Fig. 4-27b (o 4-27c). Esto se puede llevar a cabo expresando los cosenos directores de ejes de miembro en términos del ángulo γ y luego sustituyendo los cosenos directores para el miembro, como sigue:

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & 0 \\ -C_y & C_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-62)$$

La matriz de rotación transformada R_T para el miembro de un marco plano puede mostrarse que toma la misma forma que la Ec. (4-47):

$$R_T = \begin{bmatrix} R & O \\ O & R \end{bmatrix} \quad (4-63)$$

En la Ec. (4-63) la matriz R es la matriz de rotación de 3×3 dada por la Ec. (4-62).

Teniendo a la mano la matriz de rotación transformada, puede uno entonces calcular la matriz de rigidez de miembro para los ejes de estructura utilizando el tipo de operaciones mostradas previamente por la Ec. (4-51).

$$S_{MD} = R_T^T S_M R_T \quad (4-64)$$

en la que la matriz R_T está dada por la Ec. (4-63). La matriz de rigidez de miembro que resulta de esta transformación se presenta en la Tabla 4-27. Esta matriz será usada en el análisis de marcos planos en el siguiente artículo.

4.17. Análisis de marcos planos. En este artículo se presenta un procedimiento para analizar marcos planos del tipo ilustrado en la Fig. 4-27a. Se supone que las acciones aplicadas a tal marco son fuerzas en el plano de la estructura (el plano $x-y$) o vectores de momento normales al plano.

Como paso preliminar en el análisis, deben ser numerados los miembros y los nudos de la estructura. Las técnicas de numeración descritas en el Art. 4.11 para armaduras planas se pueden aplicar también a marcos planos. Los nudos están numerados consecutivamente del 1 al n_j y los miembros de 1 a m . La secuencia de numeración es arbitraria, pero cada miembro y cada nudo deben tener un número.

Ya que tanto las deformaciones axiales como las de flexión se tomarán en cuenta en los análisis de marcos planos, existe la posibilidad de que hayan tres desplazamientos independientes en cada nudo. Estos desplazamientos se toman como las translaciones del nudo en las direcciones de x y y y los giros en el sentido de z . Por lo tanto, los posibles desplazamientos en el nudo j se pueden designar como sigue:

$3j - 2 =$ índice para la translación en la dirección de x

$3j - 1 =$ índice para la translación en la dirección de y

$3j =$ índice para la rotación en el sentido de z

Además, el número n de grados de libertad en un marco plano se calcula a partir del número de nudos n_j y el número de restricciones n_r por la siguiente expresión:

$$n = 3n_j - n_r \quad (4-65)$$

Un miembro particular i en un marco plano tendrá los números de nudo j y k en sus extremos, como se muestra en la Fig. 4-28. Los

TABLA 4-27

MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO DE UN MARCO PLANO PARA EJES DE LA ESTRUCTURA (FIG. 4-27c)

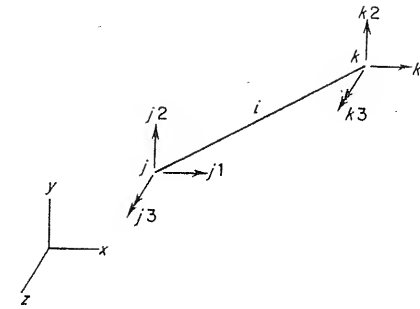
$$S_{MD} = \begin{bmatrix} \frac{EAx}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 & \left(\frac{EAx}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & -\left(\frac{EAx}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 \right) C_x C_y & -\left(\frac{EAx}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_y \\ \left(\frac{EAx}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{EAx}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & -\left(\frac{EAx}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 \right) C_x C_y & -\left(\frac{EAx}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_x \\ -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{2EI_z}{L} \\ -\left(\frac{EAx}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 \right) C_x C_y & -\left(\frac{EAx}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{EAx}{L} C_x^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_y^2 & \left(\frac{EAx}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & \frac{6EI_z}{L^2} C_y \\ -\left(\frac{EAx}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & -\left(\frac{EAx}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 \right) C_x C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x & -\left(\frac{EAx}{L} C_y^2 + \frac{12EI_z}{L^3} C_x^2 \right) C_x C_y & -\left(\frac{EAx}{L} - \frac{12EI_z}{L^3} \right) C_x C_y & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x \\ -\frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} C_x & \frac{6EI_z}{L^2} C_y & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$
S_{MD} =

FIG. 4-28. Desplazamientos de extremo para el miembro de un marco plano

posibles desplazamientos de los nudos asociados con este miembro también están indicados en la Fig. 4-28. Estos desplazamientos pueden indicarse por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} j1 &= 3j - 2 & j2 &= 3j - 1 & j3 &= 3j \\ k1 &= 3k - 2 & k2 &= 3k - 1 & k3 &= 3k \end{aligned} \quad (4-66)$$

Los índices en las Ecs. (4-66) prueban ser convenientes para el propósito de imponer las contribuciones de las rigideces de miembro a la matriz de rigidez de nudo, como en el caso de vigas y armaduras. Son también útiles para calcular las acciones de extremo de miembro debidas a los desplazamientos de nudo.

A fin de formar la matriz de rigidez de nudo de modo ordenado, se recomienda el siguiente procedimiento. Primero, se forma la matriz de rigidez de 6×6 , S_{MD} , para los ejes de estructura para el i -ésimo miembro en el marco (véase el Art. 4.16, Tabla 4-27). El miembro i contribuye a las rigideces de los nudos j y k en los extremos del miembro. Por lo tanto, elementos apropiados de la matriz S_{MD} para este miembro se pueden cambiar a la matriz de rigidez total de nudo S_j por medio de un manejo ordenado de subíndices. La primera columna de la matriz S_{MD} consiste de las acciones de restricción en j y k debidas a la translación unitaria en la dirección de x del extremo j del miembro i (índice $j1$). Esta columna se cambia en la matriz S_j como sigue:

$$\begin{aligned} (S_j)_{j1,j1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD11})_i \\ (S_j)_{j2,j1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD21})_i \\ (S_j)_{j3,j1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD31})_i \\ (S_j)_{k1,j1} &= (S_{MD41})_i \\ (S_j)_{k2,j1} &= (S_{MD51})_i \\ (S_j)_{k3,j1} &= (S_{MD61})_i \end{aligned} \quad (4-67)$$

En estas ecuaciones los primeros tres coeficientes de rigidez consisten de la suma de las contribuciones de todos los miembros que se conectan en el nudo j , incluyendo el miembro i . Las últimas tres rigideces incluyen únicamente las contribuciones del miembro i .

Expresiones similares a las Ecs. (4-67), se pueden escribir para translaciones unitarias en la dirección de y del nudo j (índice $j2$):

$$\begin{aligned} (S_J)_{j1,j2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD12})_i \\ \dots & \dots \dots \\ (S_J)_{k3,j2} &= (S_{MD62})_i \end{aligned} \quad (4-68)$$

Por lo tanto, los elementos de la segunda columna de S_{MD} para el miembro i se cambian como contribuciones a la matriz S_J .

Similarmemente, para un giro unitario del nudo j en el sentido de z (índice $j3$), las expresiones para cambiar la tercera columna de S_{MD} son:

$$\begin{aligned} (S_J)_{j1,j3} &= \sum S_{MD} + (S_{MD13})_i \\ \dots & \dots \dots \\ (S_J)_{k3,j3} &= (S_{MD63})_i \end{aligned} \quad (4-69)$$

Las expresiones para cambiar la cuarta columna de S_{MD} a la matriz S_J son similares a las ecuaciones anteriores, excepto que las primeras tres rigideces consisten únicamente de las contribuciones del miembro i , y las últimas tres son sumas de las contribuciones de todos los miembros que se conectan en el nudo k . Por lo tanto, para una translación unitaria en la dirección de x del nudo k (índice $k1$), las expresiones son como sigue:

$$\begin{aligned} (S_J)_{j1,k1} &= (S_{MD14})_i \\ \dots & \dots \dots \\ (S_J)_{k3,k1} &= \sum S_{MD} + (S_{MD64})_i \end{aligned} \quad (4-70)$$

Similarmemente, para una translación unitaria en la dirección de y del nudo k (índice $k2$), las expresiones para cambiar la quinta columna de S_{MD} son:

$$\begin{aligned} (S_J)_{j1,k2} &= (S_{MD16})_i \\ \dots & \dots \dots \\ (S_J)_{k3,k2} &= \sum S_{MD} + (S_{MD66})_i \end{aligned} \quad (4-71)$$

Finalmente, para un giro unitario del nudo k en el sentido de z (índice $k3$), se aplican las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} (S_J)_{j1,k3} &= (S_{MD16})_i \\ \dots & \dots \dots \\ (S_J)_{k3,k3} &= \sum S_{MD} + (S_{MD66})_i \end{aligned} \quad (4-72)$$

En el proceso de cambio de elementos de la matriz de rigidez de miembro S_{MD} a la matriz de rigidez total de nudo S_J , como se describió arriba, no se intentó tomar ventaja de la simetría que existe en las matrices. El reconocimiento de esta simetría permite hacer, por un camino más corto, el procedimiento de cambio.

La formación de la matriz completa S_J consiste en generar y cambiar la matriz S_{MD} para todos los miembros (de 1 al m) de la

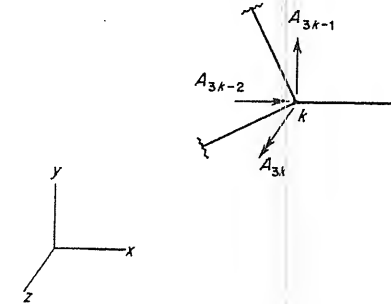


FIG. 4-29. Cargas de nudo para un marco plano

estructura. Después de que la matriz S_J se ha generado, si es necesario, debe ser nuevamente arreglada en la forma dada por la Ec. (4-1).

En la siguiente fase del análisis, se forman los vectores asociados con las cargas sobre el marco. Las acciones externas aplicadas en los nudos constituyen el vector A . La Fig. 4-29 muestra las acciones en un nudo típico k en un marco plano. La acción A_{3k-2} es la componente en x de la fuerza aplicada en k ; A_{3k-1} es la componente en y de la fuerza aplicada; y A_{3k} representa un par en el sentido de z aplicado en el nudo. Por lo tanto, el vector A tomará la siguiente forma:

$$A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_{3k-2}, A_{3k-1}, A_{3k}, \dots, A_{3n_i-2}, A_{3n_i-1}, A_{3n_i}\} \quad (4-73)$$

La Fig. 4-30b delinea las acciones en los extremos del miembro de un marco plano restringido debidas a las cargas. Las acciones de extremo para el miembro i , con respecto a los ejes orientados con el miembro, se definen como sigue:

- $(A_{ML})_{i,1}$ = fuerza en la dirección de x_M en el extremo j
- $(A_{ML})_{i,2}$ = fuerza en la dirección de y_M en el extremo j
- $(A_{ML})_{i,3}$ = par en el sentido de z_M en el extremo j
- $(A_{ML})_{i,4}$ = fuerza en la dirección de x_M en el extremo k
- $(A_{ML})_{i,5}$ = fuerza en la dirección de y_M en el extremo k
- $(A_{ML})_{i,6}$ = par en el sentido de z_M en el extremo k

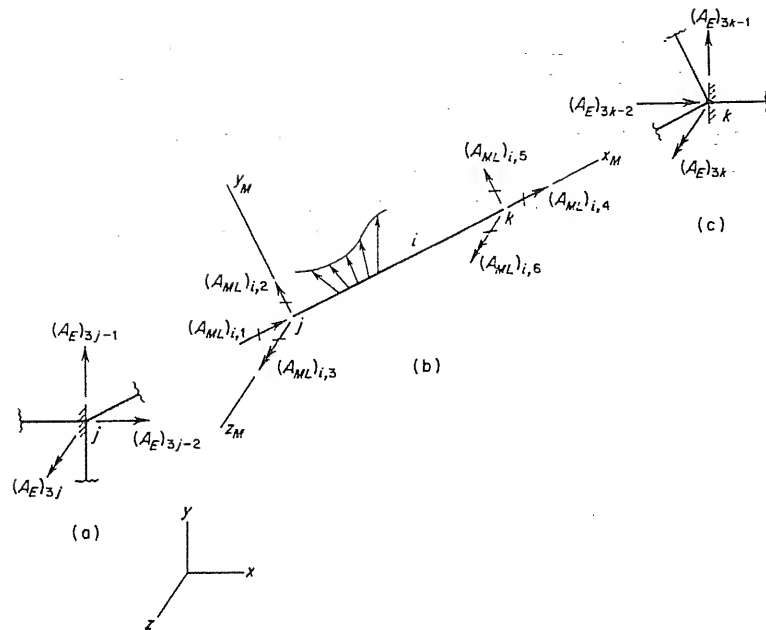


FIG. 4-30. Cargas sobre el miembro de un marco plano

Estas acciones de extremo se pueden obtener del Apéndice B para condiciones particulares de carga. La matriz A_{ML} es un arreglo del orden $m \times 6$, en la que cada renglón consiste de los elementos enumerados arriba para un miembro dado; por lo tanto:

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} (A_{ML})_{1,1} & (A_{ML})_{1,2} & (A_{ML})_{1,3} & (A_{ML})_{1,4} & (A_{ML})_{1,5} & (A_{ML})_{1,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{ML})_{i,1} & (A_{ML})_{i,2} & (A_{ML})_{i,3} & (A_{ML})_{i,4} & (A_{ML})_{i,5} & (A_{ML})_{i,6} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (A_{ML})_{m,1} & (A_{ML})_{m,2} & (A_{ML})_{m,3} & (A_{ML})_{m,4} & (A_{ML})_{m,5} & (A_{ML})_{m,6} \end{bmatrix} \quad (4-74)$$

La formación del vector de carga equivalente A_E se puede hacer por el método de rotación de ejes. Este método se demostró previamente para armaduras planas en el Art. 4.14. Las Figs. 4-30a y c muestran las cargas equivalentes en j y k que reciben contribuciones del miembro i . Los valores negativos de estas contribuciones se pueden valorar como sigue:

$$[R'_T]_i \{A_{ML}\}_i = \begin{bmatrix} C_{Xi} & -C_{Yi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{Yi} & C_{Xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{Xi} & -C_{Yi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{Yi} & C_{Xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{ML})_{i,1} \\ (A_{ML})_{i,2} \\ (A_{ML})_{i,3} \\ (A_{ML})_{i,4} \\ (A_{ML})_{i,5} \\ (A_{ML})_{i,6} \end{bmatrix}$$

Las expresiones que resultan de esta multiplicación, con sus signos invertidos, representan las partes de incremento de A_E contribuidas por el i ésimo miembro. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (A_E)_{3j-2} &= \sum A_{ML} - (A_{ML})_{i,1}C_{Xi} + (A_{ML})_{i,2}C_{Yi} \\ (A_E)_{3j-1} &= \sum A_{ML} - (A_{ML})_{i,1}C_{Yi} - (A_{ML})_{i,2}C_{Xi} \\ (A_E)_{3j} &= \sum A_{ML} - (A_{ML})_{i,3} \\ (A_E)_{3k-2} &= \sum A_{ML} - (A_{ML})_{i,4}C_{Xi} + (A_{ML})_{i,5}C_{Yi} \\ (A_E)_{3k-1} &= \sum A_{ML} - (A_{ML})_{i,4}C_{Yi} - (A_{ML})_{i,5}C_{Xi} \\ (A_E)_{3k} &= \sum A_{ML} - (A_{ML})_{i,6} \end{aligned} \quad (4-75)$$

La suma de los vectores A y A_E produce el vector de carga combinada A_C como se da en la Ec. (4-5). El vector A_C , si es necesario, puede entonces nuevamente arreglarse en la forma de la Ec. (4-6).

Después que la formación de las matrices requeridas se ha llevado a cabo, la sustitución en las Ecs. (4-8) y (4-4) produce la solución para los desplazamientos de nudo D (que se ha convertido en el vector D_j) y reacciones de apoyo A_R . Las acciones de extremo del miembro en el marco plano pueden entonces calcularse por el mismo método que el indicado por la Ec. (4-53) en el Art. 4.14 para armaduras planas. La ecuación que corresponde a la Ec. (4-53) es la siguiente:

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [S_M]_i [R_T]_i \{D_j\}_i \quad (4-76)$$

en la cual la matriz R_T , de 6×6 , está dada por la Ec. (4-63). La sustitución de $[S_M]_i$ de la Tabla (4-26) y $[R_T]_i$ para el miembro de un marco plano, en esta expresión produce lo siguiente:

$$\begin{aligned} (A_M)_{i,1} &= (A_{ML})_{i,1} + \frac{EA_{Xi}}{L_i} \{[(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}]C_{Xi} \\ &\quad + [(D_j)_{j2} - (D_j)_{k2}]C_{Yi}\} \\ (A_M)_{i,2} &= (A_{ML})_{i,2} + \frac{12EI_{Zi}}{L_i^3} \{-[(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}]C_{Yi} + \\ &\quad + [(D_j)_{j2} - (D_j)_{k2}]C_{Xi}\} + \frac{6EI_{Zi}}{L_i^2} [(D_j)_{j3} + (D_j)_{k3}] \\ (A_M)_{i,3} &= (A_{ML})_{i,3} + \frac{6EI_{Zi}}{L_i^2} \{-[(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}]C_{Yi} \\ &\quad + [(D_j)_{j2} - (D_j)_{k2}]C_{Xi}\} + \frac{4EI_{Zi}}{L_i} [(D_j)_{j3} + \frac{1}{2}(D_j)_{k3}] \\ (A_M)_{i,4} &= (A_{ML})_{i,4} + \frac{EA_{Xi}}{L_i} \{-[(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}]C_{Xi} \\ &\quad - [(D_j)_{j2} - (D_j)_{k2}]C_{Yi}\} \end{aligned} \quad (4-77)$$

$$(A_M)_{i,5} = (A_{ML})_{i,5} + \frac{12EI_{zi}}{L_i^3} \{[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}]C_{yi} - [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}]C_{xi}\} - \frac{6EI_{zi}}{L_i^2} [(D_J)_{j3} + (D_J)_{k3}]$$

$$(A_M)_{i,6} = (A_{ML})_{i,6} + \frac{6EI_{zi}}{L_i^2} \{-[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}]C_{yi} + [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}]C_{xi}\} + \frac{4EI_{zi}}{L_i} [\frac{1}{2}(D_J)_{j3} + (D_J)_{k3}]$$

En las Ecs. (4-77) los subíndices $j1, j2, j3, k1, k2$ y $k3$ llevan el significado previamente definido en las Ecs. (4-66).

El siguiente artículo contiene un ejemplo del análisis de un marco plano para el método arriba descrito y un programa de computación para marcos planos aparece en el Art. 5.6.

4.18. EJEMPLO. La Fig. 4-31a muestra un marco plano que tiene dos miembros, tres nudos, seis restricciones y tres grados de libertad. Se va a analizar este marco por los métodos previamente dados en el artículo. Para este propósito, supóngase que el área de la sección transversal A_x y el momento de inercia I_x son constantes en toda la estructura. También supóngase que los parámetros en el problema tienen los siguientes valores numéricos:

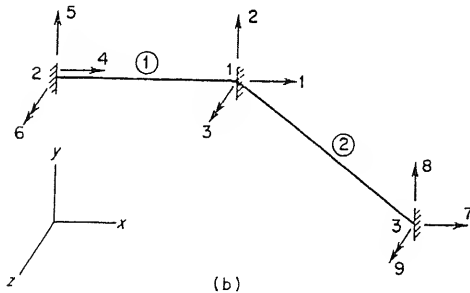
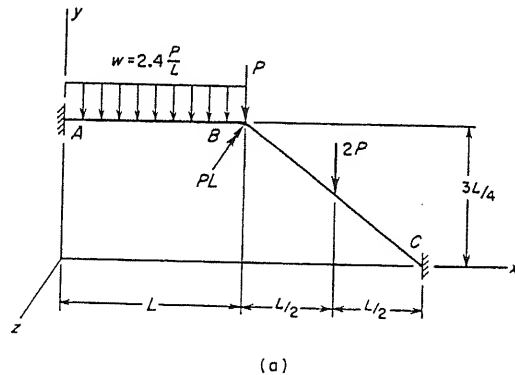


FIG. 4-31. Ejemplo (marco plano)

TABLA 4-28. INFORMACION DE LOS NUDOS PARA EL MARCO DE LA FIG. 4-31

Nudo	Coordenadas (plg)		Lista de restricciones		
	x	y	x	y	z
1	100	75	0	0	0
2	0	75	1	1	1
3	200	0	1	1	1

TABLA 4-29. INFORMACION DE LOS MIEMBROS PARA EL MARCO DE LA FIG. 4-31

Miembro	Nudo j	Nudo k	Área (plg²)	Momento de inercia (plg⁴)	Longitud (plg)	Cosenos directores	
						C _x	C _y
1	2	1	10	1000	100	1.0	0
2	1	3	10	1000	125	0.8	-0.6

$E = 10\,000$ kips/plg² $L = 100$ plg $I_x = 1\,000$ plg⁴ $P = 10$ kips $A_x = 10$ plg²

En todo el análisis se usan unidades de kips, pulgadas y radianes.

Un sistema de numeración para miembros, nudos y desplazamientos se da en la Fig. 4-31b, que muestra a la estructura restringida. La secuencia para numerar los nudos está seleccionada de tal forma que las matrices en el análisis no requieren nuevo arreglo.

La información de los nudos se resume en la Tabla 4-28, la cual contiene los números de los nudos, coordenadas de los nudos y las condiciones de restricción. La información de los miembros del marco se presenta en la Tabla 4-29. Sustituyendo los cosenos directores de los miembros en la Ec. (4-62) se obtienen las matrices de rotación R_1 y R_2 mostradas en la Tabla 4-30.

Como principio en la formación de la matriz de la rigidez total de nudo S_j , se calculan las matrices de la rigidez de miembro. Esto se puede hacer para cada miembro, primero, formando la matriz de rigidez de miembro S_M para los ejes de miembro (véase la Tabla 4-26, Art. 4.16) y, después, calculando la matriz S_{MD} para los ejes de estructura por la transformación de rotación de la Ec. (4-64). Para este propósito, la matriz R_T para cada miembro está compuesta como se muestra en la Ec. (4-63). Alternativamente, la matriz S_{MD} se puede calcular directamente para cada miembro utilizando la Tabla 4-27. Las matrices resultantes están dadas en la Tabla 4-31. Los índices del $j1$ al $k3$ (calculados por las Ecs. 4-66) también se indican en la Tabla 4-31 hacia abajo en el lado derecho y a lo largo de la parte inferior de cada matriz S_{MD} . Estos índices se pueden usar como guía con el fin de cambiar los elementos a la matriz S_j . Después que se ha llevado a cabo el proceso

TABLA 4-33. INVERSA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 798.0 & 632.5 & 0.01877 \\ 632.5 & 2798.0 & 9.355 \\ 0.01877 & 9.355 & 1.426 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

TABLA 4-34. ACCIONES APLICADAS EN LOS NUDOS

Nudo	Fuerza en la dirección de x (kips)	Fuerza en la dirección de y (kips)	Par en el sentido de z (kips-plg)
1	0	-10	-1000
2	0	0	0
3	0	0	0

TABLA 4-35. ACCIONES EN LOS EXTREMOS DE MIEMBROS RESTRINGIDOS DEBIDAS A LAS CARGAS

Miembro	$(A_{ML})_{1,1}$ (kips)	$(A_{ML})_{1,2}$ (kips)	$(A_{ML})_{1,3}$ (kips-plg)	$(A_{ML})_{1,4}$ (kips)	$(A_{ML})_{1,5}$ (kips)	$(A_{ML})_{1,6}$ (kips-plg)
1	0	12	200	0	12	-200
2	-6	8	250	-6	8	-250

y los últimos seis elementos son los valores negativos de los elementos del vector A_{RL} :

$$A_{RL} = \{0, 12, 200, 0, 10, -250\}$$

Teniendo a la mano todas las otras matrices requeridas, puede uno completar la solución calculando los desplazamientos de nudo D por la Ec. (4-8) con el resultado siguiente:

$$D = S^{-1}A_D = \{-0.02026, -0.09936, -0.001797\}$$

Los primeros dos elementos en el vector D son las translaciones (pulgadas) en las direcciones de x y y en el nudo 1, y los últimos elementos son el giro (radianes) del nudo en el sentido de z.

El vector D_j para esta estructura consiste, en su primera parte, del vector D, y de ceros en su parte última:

$$D_j = \{-0.02026, -0.09936, -0.001797, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

En el siguiente paso se calculan las restricciones de apoyo, utilizando la Ec. (4-4) con la matriz S_{RD} obtenida de la parte inferior izquierda de la Tabla 4-32:

$$A_R = A_{RL} + S_{RD}D = \{20.26, 13.14, 436.6, -20.26, 40.86, -889.5\}$$

Los elementos en el vector A_R consisten en fuerzas (kips), en las direcciones de x y y, y el par (kips-plg) en el sentido de z en los puntos 2 y 3, respectivamente, en el marco.

Como paso final en el análisis, se calculan las acciones de extremo de miembro A_M , usando cualquiera de las Ecs. (4-76) o (4-77). Los resultados de estos cálculos se dan en la Tabla 4-36, la cual completa el análisis de la estructura de marco plano.

TABLA 4-36. ACCIONES DE EXTREMO FINALES DEL MIEMBRO

Miembro	$(A_M)_{1,1}$ (kips)	$(A_M)_{1,2}$ (kips)	$(A_M)_{1,3}$ (kips-plg)	$(A_M)_{1,4}$ (kips)	$(A_M)_{1,5}$ (kips)	$(A_M)_{1,6}$ (kips-plg)
1	20.26	13.14	436.6	-20.26	10.86	-322.9
2	28.72	-4.53	-677.1	-40.73	20.53	-889.5

4.19. Rigideces de miembros de parrilla. Una estructura de parrilla se parece en varios aspectos a un marco plano. Todos los miembros y nudos descansan en el mismo plano y se supone que los miembros están rígidamente conectados en los nudos (véase la Fig. 4-32a). Los efectos de flexión tienden a predominar en el análisis de ambos tipos de estructuras, siendo los efectos de torsión ordinariamente secundarios en el análisis de parrillas y siendo los efectos axiales de ordinario secundarios en el análisis de marcos planos. La diferencia más importante entre un marco plano y una parrilla es que en el primero se supone que está cargado en su propio plano, mientras que las cargas en el último son normales a su propio plano. Además, los pares aplicados a un marco plano son normales al plano de la estructura, mientras que los pares aplicados a parrillas se supone que están en el plano de la estructura. Ambas estructuras podrían ser llamadas marcos planos y la diferencia entre ellas podría indicarse estableciendo la naturaleza del sistema de carga. Además, si las cargas aplicadas llegaran a tener orientaciones generales en el espacio, el análisis de la estructura podría dividirse en dos partes. En la primera parte, el marco podría ser analizado para las componentes de las cargas en el plano de la estructura; la segunda parte consistiría en analizar para las componentes de las cargas normales al plano. Entonces, la superposición de estos dos análisis

produciría la solución total del problema. Tal estructura podría considerarse como un caso especial de un marco en el espacio en el que todos los miembros y nudos descansan en un plano común.

En el análisis de una estructura de parrilla, los ejes coordenados serán tomados como se muestra en la Fig. 4-32a. La estructura descansa en el plano $x-y$ y todas las fuerzas concentradas actúan paralelas al eje z . Las cargas en la forma de pares tienen sus vectores momento en el plano $x-y$. La figura muestra un miembro típico i enmarcando en los nudos j y k . Los desplazamientos importantes de los nudos son los giros en los sentidos de x y de y y las translaciones en la dirección de z . Los seis posibles desplazamientos en los extremos del miembro i , en las direcciones de los ejes de la estructura, se muestran en la Fig. 4-32c. El sistema de numeración para estos desplazamientos es en el orden mencionado anteriormente. La razón para numerar los giros antes que las translaciones en cada nudo es para mantener paralelismo con el análisis de un marco plano, como se puede ver comparando los programas de computación para marcos planos y parrillas (véanse los Arts. 5.6 y 5.7).

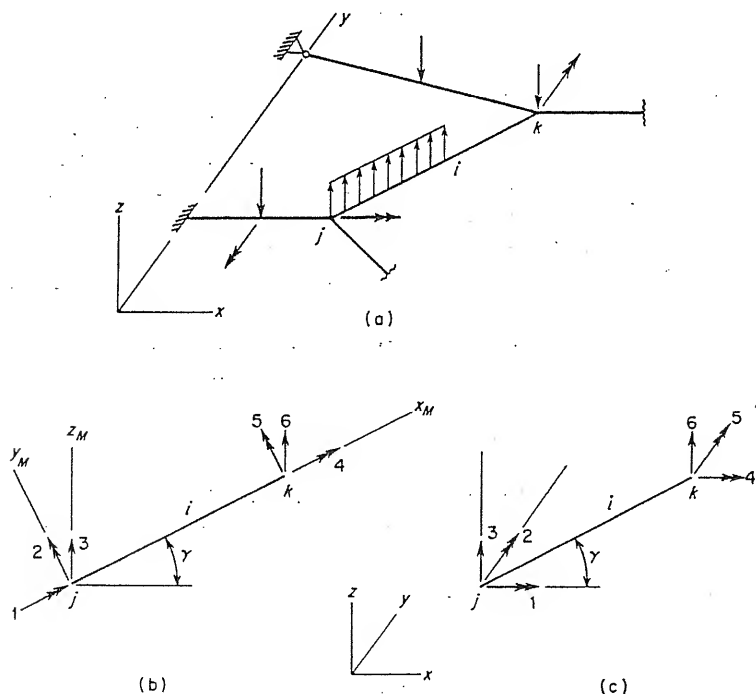


FIG. 4-32. Sistema de numeración para un miembro de parrilla

La Fig. 4-32b describe el miembro i junto con un juego de ejes orientados con el miembro x_M , y_M y z_M . Estos ejes forman con los ejes de la estructura un ángulo γ respecto al eje z_M . Se supone que el plano x_M-z_M para cada miembro en la parrilla es un plano de simetría (y, por lo tanto, un plano principal de flexión). Los posibles desplazamientos de los extremos del miembro i en las direcciones de los ejes del miembro, también están indicados en la Fig. 4-32b. Los seis desplazamientos de extremo, mostrados en sus sentidos positivos, consisten en rotaciones en los sentidos de x_M y y_M y en una translación en la dirección de z_M (o z) en los extremos j y k , respectivamente. Se pueden inducir, uno por uno, desplazamientos unitarios de estos seis tipos en los extremos del miembro para el propósito de formar la matriz de rigidez de miembro S_M para los ejes de miembro. Esta matriz es del orden de 6×6 y se puede obtener de los casos (3), (4), (5), (9), (10) y (11) de la Fig. 4-2 en el Art. 4.3. La matriz que resulta se muestra en la Tabla 4-37.

TABLA 4-37. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UN MIEMBRO DE PARRILLA PARA EJES DEL MIEMBRO (FIG. 4-32b)

$$S_M = \begin{bmatrix} \frac{GI_X}{L} & 0 & 0 & -\frac{GI_X}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_Y}{L} & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_Y}{L} & \frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & -\frac{12EI_Y}{L^3} \\ -\frac{GI_X}{L} & 0 & 0 & \frac{GI_X}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2EI_Y}{L} & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & \frac{6EI_Y}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & -\frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_Y}{L^2} & \frac{12EI_Y}{L^3} \end{bmatrix}$$

La transformación de la matriz de rigidez de miembro de los ejes de miembro (Fig. 4-32b) a los ejes de estructura (Fig. 4-32c) sigue la misma secuela que para un marco plano (véase el Art. 4.16). La matriz de rotación transformada, que incluye la rotación respecto del eje z_M , es exactamente la misma para un miembro de un marco plano que para un miembro de una parrilla debido a la elección del sistema de numeración arriba mencionado. Esta similitud entre los dos casos se puede ver físicamente comparando la

TABLA 4-38. MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO DE UNA PARRILLA
PARA LOS EJES DE ESTRUCTURA (FIG. 4-32c)

$\frac{GI_x}{L} C_x^2 + \frac{4EI_y}{L} C_y^2$	$\left(\frac{GI_x}{L} - \frac{4EI_y}{L}\right) C_x C_y$	$\frac{6EI_y}{L^2} C_y$	$-\frac{GI_x}{L} C_x^2 + \frac{2EI_y}{L} C_y^2$	$-\left(\frac{GI_x}{L} + \frac{2EI_y}{L}\right) C_x C_y$	$-\frac{6EI_y}{L^2} C_y$
$\left(\frac{GI_x}{L} - \frac{4EI_y}{L}\right) C_x C_y$	$\frac{GI_x}{L} C_y^2 + \frac{4EI_y}{L} C_x^2$	$-\frac{6EI_y}{L^2} C_x$	$-\left(\frac{GI_x}{L} + \frac{2EI_y}{L}\right) C_x C_y$	$-\frac{GI_x}{L} C_y^2 + \frac{2EI_y}{L} C_x^2$	$\frac{6EI_y}{L^2} C_x$
$\frac{6EI_y}{L^2} C_y$	$-\frac{6EI_y}{L^2} C_x$	$\frac{12EI_y}{L^3}$	$\frac{6EI_y}{L^2} C_y$	$-\frac{6EI_y}{L^2} C_x$	$-\frac{12EI_y}{L^3}$
$-\frac{GI_x}{L} C_x^2 + \frac{2EI_y}{L} C_y^2$	$-\left(\frac{GI_x}{L} + \frac{2EI_y}{L}\right) C_x C_y$	$\frac{6EI_y}{L^2} C_y$	$\frac{GI_x}{L} C_x^2 + \frac{2EI_y}{L} C_y^2$	$\left(\frac{GI_x}{L} - \frac{4EI_y}{L}\right) C_x C_y$	$-\frac{6EI_y}{L^2} C_y$
$-\left(\frac{GI_x}{L} + \frac{2EI_y}{L}\right) C_x C_y$	$-\frac{GI_x}{L} C_y^2 + \frac{2EI_y}{L} C_x^2$	$-\frac{6EI_y}{L^2} C_x$	$\left(\frac{GI_x}{L} - \frac{4EI_y}{L}\right) C_x C_y$	$\frac{GI_x}{L} C_y^2 + \frac{4EI_y}{L} C_x^2$	$\frac{6EI_y}{L^2} C_x$
$-\frac{6EI_y}{L^2} C_y$	$\frac{6EI_y}{L^2} C_x$	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	$-\frac{6EI_y}{L^2} C_x$	$\frac{6EI_y}{L^2} C_y$	$\frac{12EI_y}{L^3}$

$S_{MD} =$

orientación del miembro de la parrilla de la Fig. 4-32 con el miembro del marco plano de la Fig. 4-27. Por lo tanto, las Ecs. (4-62) a (4-64), en el Art. 4.16, se pueden aplicar para un miembro de una parrilla así como también para un miembro de un marco plano. Sustituyendo la matriz S_M de la Tabla 4-37 en la Ec. (4-64) se obtiene la matriz de rigidez de miembro S_{MD} para los ejes de estructura. Esta matriz se da en la Tabla 4-38 y será usada en adelante en el análisis de estructuras de parrilla.

4.20. Análisis de parrillas. El primer paso en el análisis de una parrilla es numerar los nudos y los miembros. Esto se hace en la misma forma que para una armadura plana o un marco plano. Como se mencionó en el artículo anterior, existen tres posibles desplazamientos en cada nudo. Estos son los giros de nudo en los sentidos de x y y y la translación de nudo en la dirección de z . Por lo tanto, los posibles desplazamientos en el nudo j se pueden indicar como sigue:

$3j - 2 =$ índice para la rotación en el sentido de x

$3j - 1 =$ índice para la rotación en el sentido de y

$3j =$ índice para la translación en la dirección de z

Nótese que estos índices son los mismos que para un marco plano (véase el Art. 4-17), pero los significados son diferentes en una estructura de parrilla. Debido a que hay tres posibles desplazamientos en cada nudo en una parrilla y un marco plano, el número de grados de libertad en una parrilla se puede determinar utilizando la Ec. (4-65) en el Art. 4.17. Además, los índices para los posibles desplazamientos de los dos nudos asociados con el miembro i se pueden calcular de acuerdo con las Ecs. (4-66) para cualquiera de los dos tipos de estructuras. Estos índices están indicados para un miembro de parrilla en la Fig. 4-33. Ya que varios de los pasos en el análisis

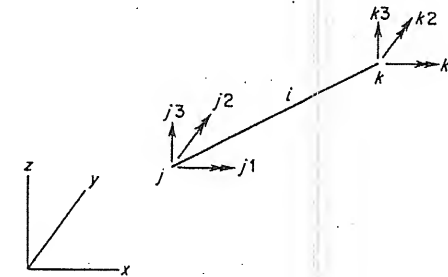


FIG. 4-33. Desplazamientos de extremo para el miembro de una parrilla

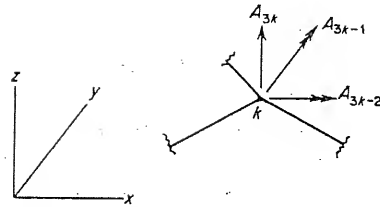


FIG. 4-34. Cargas de nudo para una parrilla

de una parrilla son simbólicamente los mismos que en el análisis de un marco plano, es más que suficiente, para la siguiente discusión, referirse meramente al análisis para un marco plano descrito en el Art. 4.17.

El análisis de la parrilla restringida para rigideces de nudo sigue el mismo modelo que el análisis de un marco plano. Se genera la matriz de rigidez de miembro S_{MD} de 6×6 para cada miembro (véase la Tabla 4-38), y los elementos de este arreglo son cambiados sistemáticamente a la matriz de rigidez de nudo S_J . Las Ecs. (4-67) a (4-72) sirven este propósito para una parrilla así como para un marco plano.

El análisis de la estructura restringida sujeta a cargas es también análogo al del marco plano, excepto que el tipo de acciones implicadas no es el mismo. Considérese primero el vector de acciones A aplicadas en los nudos. La Fig. 4-34 muestra las acciones a las que puede estar sujeto un nudo típico k de una parrilla. La acción A_{3k-2} es la componente en x del vector momento aplicado en k ; A_{3k-1} es la componente en y del vector momento; y A_{3k} representa una fuerza aplicada en el nudo en la dirección de z . Por lo tanto, el vector A se puede formar por la secuencia indicada por la Ec. (4-73).

Las acciones A_{ML} en los extremos de un miembro restringido de una parrilla (debidas a las cargas) aparecen en la Fig. 4-35b. Las acciones de extremo para el i -ésimo miembro, con respecto a los ejes del miembro, están definidas como sigue:

- $(A_{ML})_{i,1}$ = par en el extremo j en el sentido de x_M
- $(A_{ML})_{i,2}$ = par en el extremo j en el sentido de y_M
- $(A_{ML})_{i,3}$ = fuerza en el extremo j en la dirección de z_M
- $(A_{ML})_{i,4}$ = par en el extremo k en el sentido de x_M
- $(A_{ML})_{i,5}$ = par en el extremo k en el sentido de y_M
- $(A_{ML})_{i,6}$ = fuerza en el extremo k en la dirección de z_M

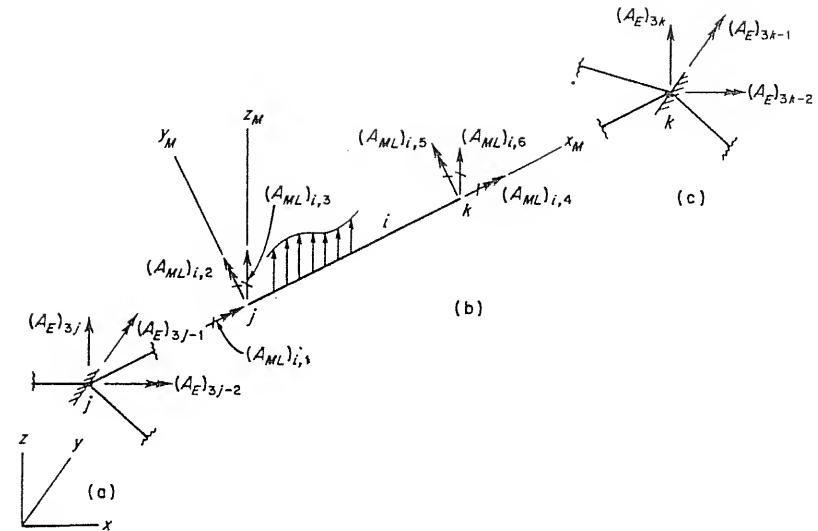


FIG. 4-35. Cargas sobre el miembro de una parrilla

La matriz A_{ML} puede ser formulada como un arreglo rectangular de orden $m \times 6$ del tipo dado por la Ec. (4-74).

La construcción del vector de cargas equivalentes A_E de la matriz A_{ML} se hace según se describió en el Art. 4-17 para marcos planos. Las Figs. 4-35a y 4-35c muestran las cargas equivalentes en los nudos j y k que reciben contribuciones del miembro i . Las Ecs. (4-75) se pueden usar para el propósito de calcular estas acciones.

El cálculo de los desplazamientos, reacciones y acciones de extremo para una estructura de parrilla, sigue los mismos pasos previamente dados para un marco plano (véase el Art. 4.17). Los desplazamientos de nudos D , se calculan utilizando la Ec. (4-8) y después se generalizan formando el vector D_J . Las reacciones de apoyo se calculan utilizando la Ec. (4-4) y las acciones de extremo se determinan utilizando la Ec. (4-76). En la última ecuación la matriz $[R_T]_i$ es dada por la Ec. (4-63) y la matriz $[S_M]_i$ se obtiene de la Tabla 4-37. La sustitución de estas matrices en la Ec. (4-76) produce las siguientes expresiones para acciones de extremo:

$$\begin{aligned} (A_M)_{i,1} &= (A_{ML})_{i,1} + \frac{GI_{Xi}}{L_i} \{ [(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}] C_{Xi} \\ &\quad + [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}] C_{Yi} \} \\ (A_M)_{i,2} &= (A_{ML})_{i,2} + \frac{4EI_{Yi}}{L_i} \{ -[(D_J)_{j1} + \frac{1}{2} (D_J)_{k1}] C_{Yi} \} \end{aligned} \quad (4-78)$$

$$\begin{aligned}
& + [(D_J)_{j2} + \frac{1}{2} (D_J)_{k2}] C_{Xi} - \frac{6EI_{Yi}}{L_i^2} [(D_J)_{j3} - (D_J)_{k3}] \\
(A_M)_{i,3} &= (A_{ML})_{i,3} + \frac{6EI_{Yi}}{L_i^2} \{[(D_J)_{j1} + (D_J)_{k1}] C_{Yi} \\
& - [(D_J)_{j2} + (D_J)_{k2}] C_{Xi}\} + \frac{12EI_{Yi}}{L_i^3} [(D_J)_{j3} - (D_J)_{k3}] \quad (4-78) \\
& \text{Cont.)} \\
(A_M)_{i,4} &= (A_{ML})_{i,4} + \frac{GI_{Xi}}{L_i} \{ -[(D_J)_{j1} - (D_J)_{k1}] C_{Xi} \\
& - [(D_J)_{j2} - (D_J)_{k2}] C_{Yi} \} \\
(A_M)_{i,5} &= (A_{ML})_{i,5} + \frac{4EI_{Yi}}{L_i} \{ -[\frac{1}{2} (D_J)_{j1} + (D_J)_{k1}] C_{Yi} \\
& + [\frac{1}{2} (D_J)_{j2} + (D_J)_{k2}] C_{Xi} \} - \frac{6EI_{Yi}}{L_i^2} [(D_J)_{j3} - (D_J)_{k3}] \\
(A_M)_{i,6} &= (A_{ML})_{i,6} + \frac{6EI_{Yi}}{L_i^2} \{ -[(D_J)_{j1} + (D_J)_{k1}] C_{Yi} \\
& + [(D_J)_{j2} + (D_J)_{k2}] C_{Xi} \} - \frac{12EI_{Yi}}{L_i^3} [(D_J)_{j3} - (D_J)_{k3}]
\end{aligned}$$

Un programa de computación para el análisis de parrillas por el método arriba descrito, se muestra en el Art. 5.7. También aparecen en ese artículo ejemplos numéricos del análisis de estructuras de parrillas.

4.21. Rigideces de miembros de armaduras en el espacio. La Fig. 4-36 muestra una porción de una estructura de armadura en el espacio en unión con un juego de ejes de estructura x , y y z . Un miembro típico i , que enmarca en los nudos j y k , se indica en la figura.

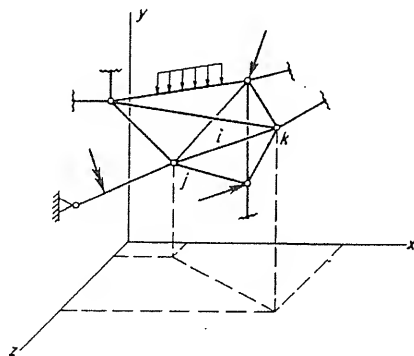


FIG. 4-36. Armadura en el espacio

Se supone que todos los nudos de la armadura en el espacio son articulaciones puras. Debido a esta idealización se considera que los giros en los extremos de los miembros son de poca importancia en el análisis. Los desplazamientos de nudos significantes son las translaciones, y éstas pueden ser convenientemente expresadas por sus componentes en las direcciones de x , y y z .

En la Fig. 4-37a están indicados los posibles desplazamientos en los extremos de un miembro i típico para ejes orientados con el miembro; en la Fig. 4-37b, para los ejes de estructura. Los ejes de miembro en la Fig. 4-37a están arreglados de tal forma que el eje x_M coincide con el eje del miembro y tiene su sentido positivo de j a k . Los ejes y_M y z_M están en un plano que es perpendicular al eje del miembro y que pasa a través del extremo j . Sin embargo, la orientación precisa de estos ejes en el plano es de poca importancia en esta parte de la discusión, ya que la posición de estos ejes no tiene efecto sobre la matriz de rigidez para el miembro de una armadura. En el siguiente artículo, se hará una elección particular de las direcciones de estos ejes a fin de facilitar el manejo de los datos de carga.

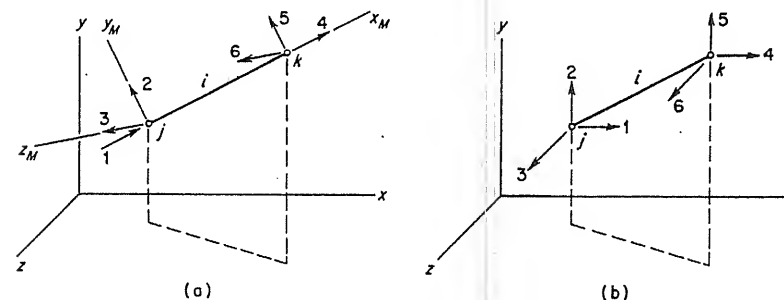


FIG. 4-37. Sistema de numeración para un miembro de armadura en el espacio

Los seis desplazamientos de extremo mostrados en la Fig. 4-37a consisten en translaciones en las direcciones de x_M , y_M y z_M en los extremos j y k , respectivamente. La matriz de rigidez de miembro, con respecto a los ejes de miembro, se puede deducir rápidamente de los casos (1) y (7) de la Fig. 4-2 en el Art. 4.3, y la matriz resultante de 6×6 está dada en la Tabla 4-39. Puede verse que únicamente los elementos que no son cero en esta matriz están asociados con los desplazamientos 1 y 4, que son en la dirección del eje x_M (Fig. 4-37a). Por lo tanto, como se mencionó antes, la matriz de rigidez para ejes de miembro es independiente de las direcciones seleccionadas para los ejes y_M y z_M .

TABLA 4-39. MATRIZ DE RIGIDEZ DEL MIEMBRO DE UNA ARMADURA EN EL ESPACIO PARA LOS EJES DEL MIEMBRO (FIG. 4-37A)

$$S_M = \frac{EA_X}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A fin de transformar la matriz de rigidez de miembro de ejes de miembro a ejes de estructura, se requiere la matriz de rotación transformada R_T para un miembro de una armadura en el espacio. Esta matriz toma la misma forma que la dada por la Ec. (4-63) para marcos planos, y la transformación de S_M a S_{MD} se muestra en la Ec. (4-64). La matriz de rotación de 3×3 R requerida para R_T se explica en la siguiente discusión.

La forma general de la matriz de rotación R es dada por la Ec. (4-56). Los tres elementos λ_{11} , λ_{12} y λ_{13} en el primer renglón de R , son los cosenos directores para el eje x_M con respecto a los ejes de estructura. Por lo tanto, estos tres elementos son los mismos que los cosenos directores del miembro mismo ($\lambda_{11} = C_X$, $\lambda_{12} = C_Y$, $\lambda_{13} = C_Z$) y se pueden encontrar a partir de las coordenadas de los extremos del miembro:

$$C_X = \frac{x_k - x_j}{L} \quad C_Y = \frac{y_k - y_j}{L} \quad C_Z = \frac{z_k - z_j}{L} \quad (4-79)$$

La longitud L del miembro puede también ser calculada a partir de las coordenadas de sus puntos de extremo:

$$L = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2} \quad (4-80)$$

Los elementos en los últimos dos renglones de R (los cosenos directores para los ejes y_M y z_M , respectivamente) se pueden dejar en forma indefinida para que la matriz de rotación se convierta en:

$$R = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} \quad (4-81)$$

Si esta matriz de rotación se sustituye en la Ec. (4-63) para R_T y luego tanto la matriz R_T como la S_M (véase la Tabla 4-39) se sustituyen en la Ec. (4-64), el resultado será la matriz de rigidez del miembro S_{MD} del orden de 6×6 para los ejes de la estructura. Esta matriz, que contiene términos que incluyen únicamente los cosenos directores del miembro mismo, se da en la Tabla 4-40.

TABLA 4-40. MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO DE UNA ARMADURA EN EL ESPACIO PARA EJES DE ESTRUCTURA (FIG. 4-37B)

$$S_{MD} = \frac{EA_X}{L} \begin{bmatrix} C_X^2 & C_Y C_X & C_Z C_X & -C_X^2 & -C_Y C_X & -C_Z C_X \\ C_X C_Y & C_Y^2 & C_Z C_Y & -C_X C_Y & -C_Y^2 & -C_Z C_Y \\ C_X C_Z & C_Y C_Z & C_Z^2 & -C_X C_Z & -C_Y C_Z & -C_Z^2 \\ -C_X^2 & -C_Y C_X & -C_Z C_X & C_X^2 & C_Y C_X & C_Z C_X \\ -C_X C_Y & -C_Y^2 & -C_Z C_Y & C_X C_Y & C_Y^2 & C_Z C_Y \\ -C_X C_Z & -C_Y C_Z & -C_Z^2 & C_X C_Z & C_Y C_Z & C_Z^2 \end{bmatrix}$$

4.22. Selección de ejes de miembros de armaduras en el espacio.

Con el propósito de manejar las cargas que actúan directamente sobre los miembros de una armadura en el espacio, es necesario seleccionar una orientación específica para los tres ejes de miembro x_M , y_M y z_M . Ya que el eje x_M ha sido ya seleccionado como el eje del miembro (véase la Fig. 4-37a), resta únicamente establecer las direcciones para y_M y z_M . Para este propósito, el miembro típico i se muestra de nuevo en la Fig. 4-38. Los ejes de estructura x_s , y_s y z_s se toman paralelos a los ejes x , y y z (mostrados en la Fig. 4-37) y a través del extremo j del miembro. Mientras que son posibles muchas elecciones para las direcciones de los ejes y_M y z_M , la que conviene es tomar el eje z_M como si fuera horizontal (esto es, contenido en el plano x_s - z_s), como se muestra en la figura. Por lo tanto, se concluye que el eje y_M se localiza en un plano vertical que pasa por los ejes x_M y y_s .

Cuando los ejes de miembro se especifican justamente en la forma descrita, no hay ambigüedad respecto a sus orientaciones, excepto en el caso de un miembro vertical. Cuando el miembro es vertical automáticamente se sigue que z_M estará en un plano horizontal, pero su posición en ese plano no está enteramente definida. Para salvar esta dificultad, se hará la especificación adicional de que el eje z_M se toma siempre a lo largo del eje z_s , si el miembro es vertical. Las dos posibilidades de que esto suceda se muestran en las Figs. 4-39a y 4-39b.

A fin de llevar a cabo las transformaciones de ejes, se requiere la matriz de rotación R (véase la Ec. 4-81). Los cosenos directores de los ejes y_M y z_M (los últimos dos renglones de R) se pueden encontrar directamente por consideraciones geométricas de la Fig. 4-38. Sin embargo, un camino alternado incluye rotaciones sucesivas de ejes. Al usar el último método, la transformación de los ejes de estructura (véase la Fig. 4-38) a los ejes del miembro puede ser considerada para llevarse a cabo en dos pasos. El primero de éstos es un giro a través de un ángulo β respecto del eje y_s . Este giro coloca al eje x en la posición indicada como x_β , que es la intersección del

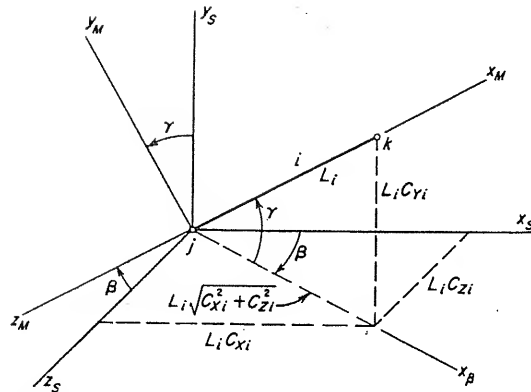


FIG. 4-38. Rotación de ejes para el miembro de una armadura en el espacio

plano x_s-z_s y el plano x_M-y_M . También, este giro coloca el eje z_M en su posición final en el ángulo β con el eje z_s . El segundo paso en la transformación consiste de un giro a través de un ángulo γ respecto del eje z_M . Este giro coloca a los ejes x_M y y_M en sus posiciones finales, como se muestra en la figura.

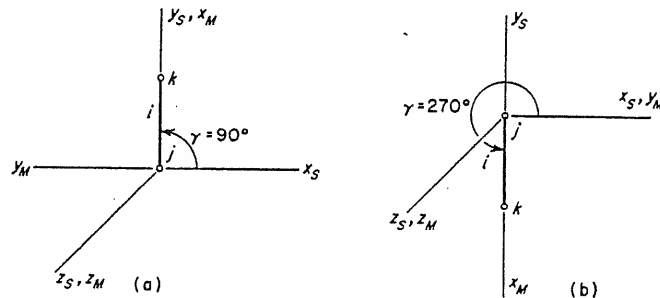


FIG. 4-39. Rotación de ejes para un miembro vertical de una armadura en el espacio

La matriz de rotación \mathbf{R} que se utiliza en la transformación de ejes de estructura a ejes de miembro se puede formar siguiendo los dos pasos arriba descritos. Considérese primero el giro respecto del eje y_s a través del ángulo β . Para esta transformación la matriz de rotación de 3×3 , \mathbf{R}_β consiste de los cosenos directores de los ejes β (esto es, los ejes $x_\beta, y_\beta, z_\beta$) con respecto a los ejes de la estructura (x_s, y_s, z_s):

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (a)$$

Las funciones de $\cos \beta$ y $\sin \beta$ se pueden expresar en términos de los cosenos directores del miembro i refiriéndose a la geometría de la Fig. 4-38. Por lo tanto, estas cantidades se convierten en

$$\cos \beta = \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \quad \sin \beta = \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \quad (b)$$

en las que los subíndices i se omiten de los cosenos directores. La sustitución de estas expresiones en la Ec. (a) da la matriz \mathbf{R}_β en términos de los cosenos directores:

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (4-82)$$

El significado físico de la matriz \mathbf{R}_β es que puede ser usada para relacionar las dos alternativas de juegos ortogonales de las componentes de un vector (acción o desplazamiento) en las direcciones de los ejes β y los ejes de estructura. Por ejemplo, considere una acción A que se puede representar por el vector \mathbf{A}_β (que consiste de las componentes en las direcciones de los ejes β) o el vector \mathbf{A}_s (que consiste de las componentes en las direcciones de los ejes de la estructura). La transformación del último vector en el anterior se lleva a cabo por el método del Art. 4.15, como sigue:

$$\mathbf{A}_\beta = \mathbf{R}_\beta \mathbf{A}_s \quad (c)$$

donde \mathbf{R}_β es dada por la Ec. (4-82).

El segundo giro respecto del eje z_M a través del ángulo γ se puede manejar en una forma similar. Una matriz \mathbf{R}_γ de 3×3 relaciona dos juegos ortogonales de componentes del mismo vector para los dos juegos de ejes. En el caso de una acción A , la transformación es

$$\mathbf{A}_M = \mathbf{R}_\gamma \mathbf{A}_\beta \quad (d)$$

En esta ecuación el vector \mathbf{A}_M consiste de las componentes de la acción A en las direcciones de los ejes de miembro, y la matriz \mathbf{R}_γ contiene los cosenos directores de los ejes del miembro con respecto a los ejes β . Escribiendo la matriz \mathbf{R}_γ en la forma ampliada, se obtiene:

$$\mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (e)$$

Las funciones $\cos \gamma$ y $\sin \gamma$ se pueden expresar en términos de los cosenos directores del miembro como sigue (véase la Fig. 4-38):

$$\cos \gamma = \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \quad \sin \gamma = C_y \quad (f)$$

La sustitución de estas expresiones en la Ec. (e) produce la matriz R_γ en la siguiente forma:

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & C_y & 0 \\ -C_y & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-83)$$

Ahora que los dos giros por separado se han expresado en forma matricial, también se puede obtener una sola transformación de la matriz R de los ejes de estructura a los ejes de miembro. Considerando de nuevo el caso de una acción A , es posible ver que el vector A_M se puede expresar en términos del vector A_S sustituyendo a A_β (véase la Ec. c) en la Ec. (d):

$$A_M = R_\gamma R_\beta A_S \quad (g)$$

Comparando la Ec. (g) con la Ec. (4-57) en el Art. 4.15, se muestra que la matriz de rotación deseada R se forma del producto de R_γ y R_β . Por lo tanto,

$$R = R_\gamma R_\beta \quad (4-84)$$

Si las Ecs. (4-82) y (4-83) son sustituidas en la Ec. (4-84) y multiplicadas, resulta la siguiente matriz:

$$R = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & \frac{-C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \quad (4-85)$$

Esta es la matriz de rotación R para el miembro de una armadura en el espacio. Esta se puede usar siempre que las acciones o desplazamientos sean transformados de los ejes del miembro a los ejes de la estructura.

La matriz de rotación anterior R es válida para todas las posiciones del miembro i , excepto cuando es vertical (véase la Fig. 4-39). En cualesquiera de los casos mostrados en la Fig. 4-39 los cosenos directores de los ejes del miembro con respecto a los ejes de la estructura se pueden determinar al inspeccionarse. Por lo tanto, la matriz de rotación se ve que es

$$R_{\text{vert}} = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-86)$$

Esta expresión para R es válida para los dos casos mostrados en la Fig. 4-39. Todo lo que se necesita es sustituir para el coseno director C_y su valor apropiado, que es 1 para el miembro de la Fig. 4-39a y -1 para el miembro de la Fig. 4-39b.

La sustitución de la matriz de rotación apropiada R (cualquiera de las Ecs. 4-85 o 4-86) en la Ec. (4-63) produce la matriz de rotación R_T que se desea para el juego de ejes orientados con el miembro especificado en este artículo.

4.23. Análisis de armaduras en el espacio. El análisis de armaduras en el espacio se presenta en este artículo en una forma análoga a las discusiones anteriores para otros tipos de estructuras. Las cargas sobre una armadura en el espacio usualmente consisten de fuerzas concentradas aplicadas en los nudos, pero en algunos casos, acciones de naturaleza más general se pueden aplicar a los miembros individuales, como se indica en la Fig. 4-36. Como en las estructuras anteriores, los miembros están numerados del 1 al m , y los nudos están numerados del 1 al n_j .

En el análisis de una armadura en el espacio únicamente las deformaciones axiales se toman en cuenta, pero existe la posibilidad de que existan tres desplazamientos independientes en cada nudo. Los posibles desplazamientos en un nudo j en la estructura se dan a conocer por los siguientes índices:

$3j - 2$ = índice para la translación en la dirección de x

$3j - 1$ = índice para la translación en la dirección de y

$3j$ = índice para la translación en la dirección de z

El número de grados de libertad de una armadura en el espacio se puede calcular utilizando la Ec. (4-65) en el Art. 4.17. Además, los índices para los posibles desplazamientos de los extremos de miembro i se pueden determinar utilizando las Ecs. (4-66). Estos índices están indicados en la Fig. 4-40 para un miembro de una armadura en el espacio.

El análisis de armaduras en el espacio es simbólicamente similar al análisis de marcos planos (Art. 4.17) y parrillas (Art. 4.20). La razón para el paralelismo es que los tres tipos de estructuras tienen tres posibles desplazamientos por cada nudo. La similitud principia en la primera fase del análisis en la que se forma la matriz de rigidez de miembro S_{MD} de 6×6 (véase el Art. 4.21 para las

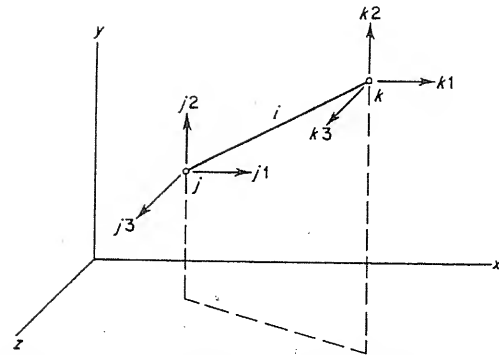


FIG. 4-40. Desplazamientos de extremo para el miembro de una armadura en el espacio

rigideces de miembros de armaduras en el espacio), para cada uno de los miembros. Los elementos de cada uno de estos arreglos de miembros se cambian sistemáticamente a la matriz de rigidez de nudo S_i en la forma representada por las Ecs. (4-67) a (4-72).

En la siguiente fase del análisis de una armadura en el espacio, se procesan las cargas aplicadas a la estructura. La Fig. 4-41 muestra las acciones aplicadas en un nudo típico k en una armadura en el espacio. Las acciones A_{3k-2} , A_{3k-1} y A_{3k} son las componentes en x , y y z de la fuerza concentrada aplicada en el nudo. Estas acciones se colocan en el vector A , que toma la forma dada por la Ec. (4-73).

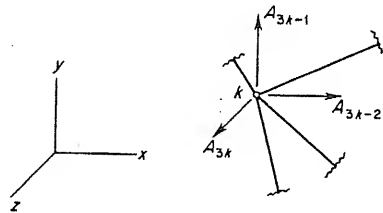


FIG. 4-41. Cargas de nudo para una armadura en el espacio

Considere en seguida la matriz de acciones A_{ML} en los extremos de los miembros restringidos debidas a las cargas. En una armadura estas acciones se determinan con los extremos de los miembros restringidos contra translación, pero no contra giro (véase la Tabla B-5 del Apéndice B). La Fig. 4-42b muestra tal miembro i y las seis acciones de extremo causadas por las cargas aplicadas a lo largo de su longitud. Estas acciones de extremo se calculan como sigue:

- $(A_{ML})_{i,1}$ = fuerza en la dirección de x_M en el extremo j
- $(A_{ML})_{i,2}$ = fuerza en la dirección de y_M en el extremo j
- $(A_{ML})_{i,3}$ = fuerza en la dirección de z_M en el extremo j
- $(A_{ML})_{i,4}$ = fuerza en la dirección de x_M en el extremo k
- $(A_{ML})_{i,5}$ = fuerza en la dirección de y_M en el extremo k
- $(A_{ML})_{i,6}$ = fuerza en la dirección de z_M en el extremo k

La matriz A_{ML} se ha formulado convenientemente como un arreglo rectangular del orden de $m \times 6$, como se representó por la Ec. (4-74).

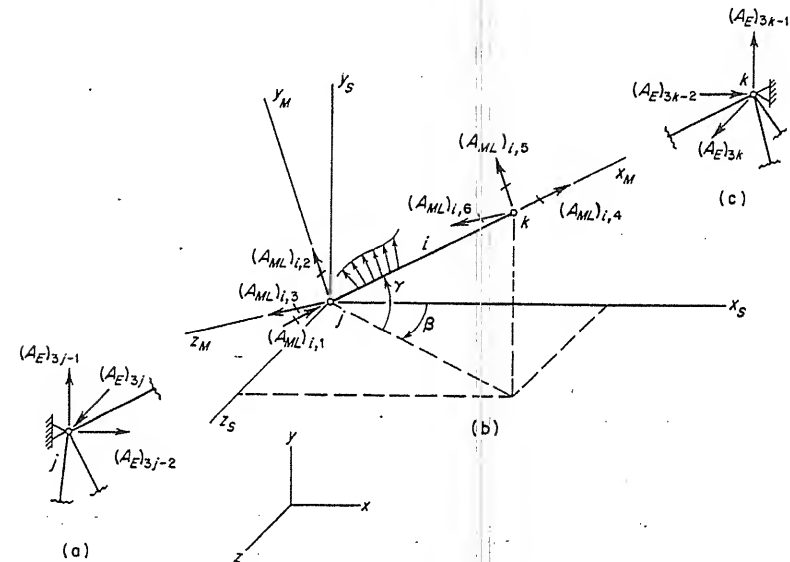


FIG. 4-42. Cargas sobre un miembro de una armadura en el espacio

El cambio de los elementos de la matriz A_{ML} al vector de cargas equivalentes A_E se puede llevar a cabo por el método de rotación de ejes. Las Figs. 4-42a y 4-42c muestran las acciones de restricción en los nudos j y k que reciben contribuciones del miembro i . Los valores negativos de estas contribuciones se determinan por los cálculos indicados en la Tabla 4-41. Nótese que el transpuesto de la matriz de rotación transformada $[R'_T]_i$ en la Tabla 4-41 incorpora el transpuesto de la matriz de rotación R obtenido de la Ec. (4-85) para un miembro inclinado. Si sucede que un miembro particular es vertical, el transpuesto de la matriz de rotación de la Ec. (4-86), es el que se debe usar. En este caso los cálculos toman la forma dada en la Tabla 4-42.

TABLA 4-41. VALORES NEGATIVOS DE LAS CONTRIBUCIONES A A_E PARA UN MIEMBRO INCLINADO

$$[R_T']_i \{A_{ML}\}_i = \begin{bmatrix} C_x & \frac{-C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & 0 & 0 \\ C_y & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_z & \frac{-C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_x & \frac{-C_x C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \frac{-C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ 0 & 0 & 0 & C_y & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_z & \frac{-C_y C_z}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{ML})_{i,1} \\ (A_{ML})_{i,2} \\ (A_{ML})_{i,3} \\ (A_{ML})_{i,4} \\ (A_{ML})_{i,5} \\ (A_{ML})_{i,6} \end{bmatrix}$$

TABLA 4-42. VALORES NEGATIVOS DE LAS CONTRIBUCIONES A A_E PARA UN MIEMBRO VERTICAL

$$([R_T']_i)_{\text{vert}} \{A_{ML}\}_i = \begin{bmatrix} 0 & -C_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_{ML})_{i,1} \\ (A_{ML})_{i,2} \\ (A_{ML})_{i,3} \\ (A_{ML})_{i,4} \\ (A_{ML})_{i,5} \\ (A_{ML})_{i,6} \end{bmatrix}$$

En la fase final del análisis, los desplazamientos de nudo D (traslaciones en las direcciones de x , y y z) se calculan por la Ec. (4-8) y se amplían en el vector D_j . En seguida, la Ec. (4-4) proporciona la solución para las reacciones de apoyo (fuerzas en las direcciones de x , y y z en los apoyos). Con el propósito de calcular las acciones finales de extremo, sustituya la matriz de rigidez de miembro $[S_M]_i$ de la Tabla 4-39 y la matriz de rotación transformada $[R_T]_i$ para una armadura en el espacio en la Ec. (4-76). Las ecuaciones que resultan de las multiplicaciones matriciales son las siguientes:

$$\begin{aligned} (A_M)_{i,1} &= (A_{ML})_{i,1} + \frac{EA_{Xi}}{L_i} \{[(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}]C_{Xi} \\ &\quad + [(D_j)_{j2} - (D_j)_{k2}]C_{Yi} + [(D_j)_{j3} - (D_j)_{k3}]C_{Zi}\} \\ (A_M)_{i,2} &= (A_{ML})_{i,2}; \quad (A_M)_{i,3} = (A_{ML})_{i,3} \\ (A_M)_{i,4} &= (A_{ML})_{i,4} - \frac{EA_{Xi}}{L_i} \{[(D_j)_{j1} - (D_j)_{k1}]C_{Xi} \\ &\quad + [(D_j)_{j2} - (D_j)_{k2}]C_{Yi} + [(D_j)_{j3} - (D_j)_{k3}]C_{Zi}\} \\ (A_M)_{i,5} &= (A_{ML})_{i,5}; \quad (A_M)_{i,6} = (A_{ML})_{i,6} \end{aligned} \quad (4-87)$$

Este grupo de ecuaciones es válido para un miembro que tenga cualquier orientación, incluyendo un miembro vertical. En el último caso, los cosenos directores C_{Xi} y C_{Zi} que aparecen en las ecuaciones, valdrán cero.

Un programa de computación para el análisis de armaduras en el espacio, se da en el Art. 5.8. También se pueden encontrar en ese artículo ejemplos numéricos.

4.24. Rigideces de miembros de marcos en el espacio. La matriz de rigidez de miembro S_M de un marco en el espacio para los ejes del miembro fue previamente formulada en el Art. 4.3. El objetivo en este artículo es desarrollar la matriz de rigidez de miembro S_{MD} para los ejes de la estructura. La última matriz se obtiene de la primera por el método de rotación de ejes. La matriz de rotación requerida para esta transformación puede tomar una de varias formas (de variada complejidad), dependiendo de la orientación del miembro en el espacio.

La Fig. 4-43 muestra una porción de un marco en el espacio y un juego de ejes de referencia x , y y z . Un miembro típico i que tiene sus cosenos directores positivos, se indica en la figura con los nudos denominados j y k . Se supone que los miembros del marco están rígidamente conectados en los nudos, y se supone que cada nudo que no está restringido se traslada y gira en una forma completamente general en el espacio. Por lo tanto, todos los posibles tipos de desplazamientos de nudo deben ser considerados, y por conveniencia se toman como si fueran las traslaciones y giros en las direcciones de los ejes x , y y z (seis posibles desplazamientos por nudo).

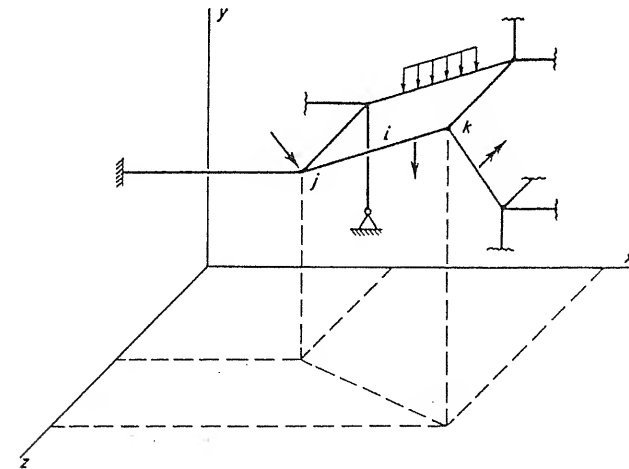


FIG. 4-43. Marco en el espacio

Los doce posibles desplazamientos de los dos extremos de un miembro fueron previamente discutidos en el Art. 4.3 (véase la Fig. 4-1) para los ejes orientados con el miembro, y son indicados nuevamente en la Fig. 4-44a para el miembro típico i . En esta figura, el eje x_M se toma a lo largo del eje del miembro, en la misma forma que para una armadura en el espacio (compare con la Fig. 4-38). Los ejes y_M y z_M están seleccionados como los ejes principales de la sección transversal en el extremo j del miembro. La matriz de rigidez S_M de 12×12 para los ejes del miembro fue anteriormente dada en la Tabla 4-1. Esta matriz debe ser transformada, por medio de una matriz de rotación transformada, en la matriz de 12×12 S_{MD} . La última matriz corresponde a los doce tipos de desplazamientos indicados en la Fig. 4-44b en las direcciones de los ejes de estructura.

La forma de la matriz de rotación R depende de la orientación particular de los ejes del miembro. En muchos casos un miembro de un marco plano será orientado para que los ejes principales de

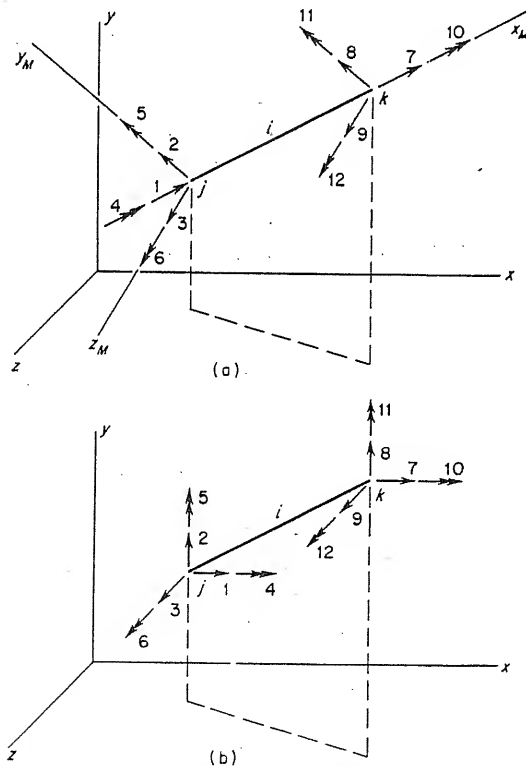


Fig. 4-44. Sistema de numeración para el miembro de un marco en el espacio

la sección transversal estén en los planos horizontal y vertical (por ejemplo, una viga I con su alma en un plano vertical). Bajo estas condiciones los ejes y_M y z_M se pueden seleccionar exactamente igual que para un miembro de una armadura en el espacio (véase la Fig. 4-38), y la matriz de rotación R dada en la Ec. (4-85) también puede ser usada para el miembro de un marco en el espacio.

Hay otros casos en los que un miembro de un marco en el espacio tiene dos ejes de simetría en la sección transversal y el mismo momento de inercia respecto de cada eje (por ejemplo, un miembro circular o cuadrado, ya sea tubular o sólido). En tales casos los ejes y_M y z_M nuevamente pueden ser seleccionados como se describió en el párrafo anterior. Esta elección se puede hacer debido a que todos los ejes de la sección transversal son ejes principales, y cualquier par de ejes puede ser seleccionado para y_M y z_M .

Sin embargo, en general, un miembro de un marco en el espacio puede tener sus ejes principales y_M y z_M en direcciones oblicuas, tal como se indica en la Fig. 4-44a. Hay varias formas en las que se puede especificar la posición de esos ejes, y dos métodos serán descritos. El primer método se refiere específicamente a la orientación de los ejes principales por medio de un ángulo de giro respecto del eje x_M . A fin de visualizar claramente cómo se mide tal ángulo, considere las tres rotaciones sucesivas de los ejes de la estructura a los

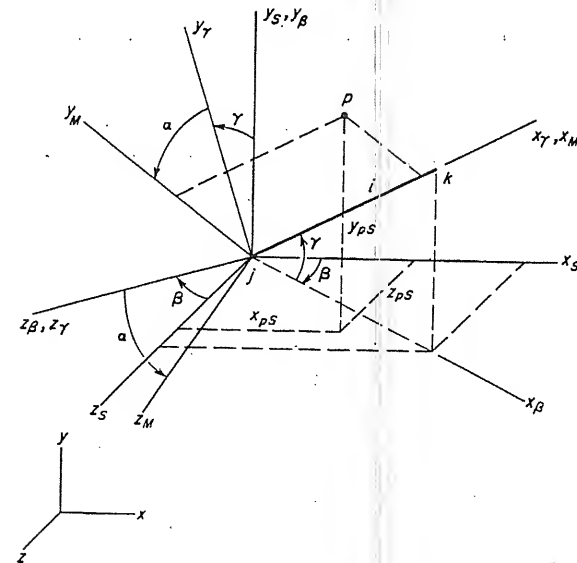


FIG. 4-45. Rotación de ejes para un miembro de un marco en el espacio

ejes del miembro mostrado en la Fig. 4-45. Las primeras dos rotaciones a través de los ángulos β y γ (respecto a los ejes y_s y z_s , respectivamente) son exactamente las mismas que las mostradas en la Fig. 4-38 para el caso especial arriba descrito. La tercera transformación consiste en una rotación a través del ángulo α respecto del eje x_M , causando que los ejes y_M y z_M coincidan con los ejes principales de la sección transversal. Esta última rotación también se indica en la Fig. 4-46, que muestra una vista de la sección transversal del miembro viendo en el sentido negativo de x_M . El plano x_M - x_γ es un plano vertical a través del eje del miembro, y el ángulo α se mide (en el sentido positivo) desde ese plano a uno de los ejes principales de la sección transversal.

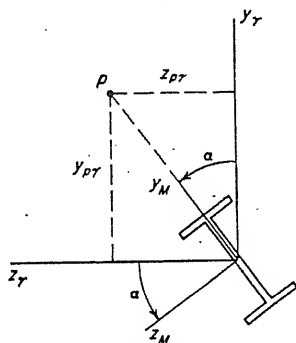


FIG. 4-46. Rotación de un miembro de un marco en el espacio respecto al eje x_M

La rotación de ejes a través del ángulo α requiere la introducción de una matriz de rotación R_α en la que los elementos son los cosenos directores de los ejes finales (x_M, y_M, z_M) con respecto al eje γ :

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4-88)$$

Multiplicando el producto $R_\gamma R_\beta$ (véase la Ec. 4-84 y su discusión correspondiente) por R_α se produce la matriz de rotación R para las tres rotaciones sucesivas mostradas en la Fig. 4-45:

$$R = R_\alpha R_\gamma R_\beta \quad (4-89)$$

Cuando las tres matrices de rotación R_α , R_γ y R_β (véanse las Ecs. 4-88, 4-83 y 4-82) para un miembro inclinado se sustituyen en la Ec. (4-89) y se multiplican según se indica, la matriz de rotación R se convierte en la siguiente:

$$R = \begin{bmatrix} C_X & C_Y & C_Z \\ \frac{-C_X C_Y \cos \alpha - C_Z \sin \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} & \sqrt{C_X^2 + C_Z^2} \cos \alpha & \frac{-C_Y C_Z \cos \alpha + C_X \sin \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} \\ \frac{C_X C_Y \sin \alpha - C_Z \cos \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} & \sqrt{C_X^2 + C_Z^2} \sin \alpha & \frac{C_Y C_Z \sin \alpha + C_X \cos \alpha}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} \end{bmatrix} \quad (4-90)$$

Esta matriz de rotación está expresada en términos de los cosenos directores del miembro (que son rápidamente calculados de las coordenadas de los nudos) y el ángulo α , que se debe dar como parte de la descripción de la estructura en sí. Nótese que si α es igual a cero, la matriz R se reduce a la forma previamente dada para el miembro de una armadura en el espacio (Ec. 4-85). El caso especial de un miembro vertical será tratado más adelante.

La matriz de rotación transformada R_T para un miembro de un marco en el espacio se puede mostrar que toma la siguiente forma:

$$R_T = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (4-91)$$

la que es análoga a la matriz dada en la Ec. (4-63). Finalmente, la matriz de rigidez del miembro S_{MD} para los ejes de la estructura se puede calcular por las multiplicaciones matriciales usuales:

$$S_{MD} = R_T^T S_M R_T \quad (4-92)$$

La matriz resultante es algo complicada cuando se expresa en forma literal, y por esta razón no se presenta en su forma total en el texto. El hecho de que tal extenso grupo de relaciones se pueda representar tan concisamente por la Ec. (4-92) es una de las principales ventajas de los métodos matriciales en el análisis de las estructuras.

En algunas estructuras la orientación de un miembro particular puede ser tal que el ángulo α , que especifica la localización de los ejes principales para ese miembro, no se pueda disponer de él rápidamente. En tal caso, una técnica diferente se puede usar para describir su localización. Un método adecuado es dar las coordenadas de un punto que esté contenido en uno de los planos principales del miembro, pero que no esté sobre el eje del miembro mismo. Este punto y el eje x_M definirá sin ninguna ambigüedad un plano en el espacio, y ese plano se puede tomar como el plano x_M - y_M . Todo lo que es necesario es obtener expresiones para el ángulo de rotación α ,

que aparece en la matriz de rotación \mathbf{R} (Ec. 4-90), en términos de las coordenadas del punto dado y las coordenadas de los extremos del miembro mismo. Una vez que se ha llevado a cabo esto, se hace posible para el analista describir la posición de los ejes principales de un miembro cualquiera, dando el ángulo α directamente, o dando las coordenadas de un punto adecuado.

Un punto arbitrario p en el plano x_M - y_M se muestra en la Fig. 4-45. Se supone que se dan las coordenadas x , y y z de este punto (denominadas x_p , y_p y z_p). Ya que los ejes de la estructura x_s , y_s y z_s tienen su origen en el extremo j del miembro, las coordenadas del punto p con respecto a los ejes de la estructura (denominados como x_{ps} , y_{ps} y z_{ps}) son

$$x_{ps} = x_p - x_j \quad y_{ps} = y_p - y_j \quad z_{ps} = z_p - z_j \quad (4-93)$$

en donde x_j , y_j y z_j son las coordenadas del extremo j del miembro.

También se muestra en la Fig. 4-46 el punto p junto con el ángulo de rotación α . Las coordenadas de p con respecto a los ejes x_γ , y_γ y z_γ se pueden obtener en términos de aquéllas para los ejes x_s , y_s y z_s por una rotación de ejes a través de los ángulos β y γ . Hágase que las coordenadas del punto p con respecto a los ejes γ sean $x_{p\gamma}$, $y_{p\gamma}$ y $z_{p\gamma}$ (las últimas dos coordenadas se muestran positivas en la Fig. 4-46). Entonces la transformación deseada de coordenadas se convierte en lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} x_{p\gamma} \\ y_{p\gamma} \\ z_{p\gamma} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta \begin{bmatrix} x_{ps} \\ y_{ps} \\ z_{ps} \end{bmatrix} \quad (a)$$

La sustitución de $\mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta$ de la Ec. (4-85) en la Ec. (a) produce las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} x_{p\gamma} &= C_X x_{ps} + C_Y y_{ps} + C_Z z_{ps} \\ y_{p\gamma} &= -\frac{C_X C_Y}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} x_{ps} + \sqrt{C_X^2 + C_Z^2} y_{ps} - \frac{C_Y C_Z}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} z_{ps} \\ z_{p\gamma} &= -\frac{C_Z}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} x_{ps} + \frac{C_X}{\sqrt{C_X^2 + C_Z^2}} z_{ps} \end{aligned} \quad (4-94)$$

Estas ecuaciones dan las coordenadas del punto p con respecto a los ejes γ .

De la geometría de la Fig. 4-46 se obtienen las siguientes expresiones para el seno y coseno del ángulo α :

$$\sin \alpha = \frac{z_{p\gamma}}{\sqrt{y_{p\gamma}^2 + z_{p\gamma}^2}} \quad \cos \alpha = \frac{y_{p\gamma}}{\sqrt{y_{p\gamma}^2 + z_{p\gamma}^2}} \quad (4-95)$$

Utilizando las Ecs. (4-93), (4-94) y (4-95) se pueden calcular a partir de las coordenadas del punto p , las cantidades $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$ y en seguida sustituirlas en la matriz de rotación \mathbf{R} (Ec. 4-90). Esta sustitución produce la matriz de rotación \mathbf{R} en una forma que incluye únicamente a los cosenos directores del miembro mismo y a las coordenadas del punto p .

La discusión anterior trató a un miembro que no era vertical. Como se muestra en el Art. 4.22 para un miembro de una armadura en el espacio, un miembro vertical es siempre un caso especial que se debe tratar por separado. La matriz de rotación \mathbf{R} previamente dada para un miembro vertical de una armadura en el espacio (véase la Ec. 4-86) también se puede usar para ciertos tipos de miembros verticales de marcos en el espacio. El único requisito es que uno de los ejes principales de la sección transversal del miembro esté en la dirección del eje z_s . En algunos casos el miembro estará orientado en tal forma que cumpla con este requisito (por ejemplo, una viga I con su alma en el plano x_s - y_s). El requerimiento también se satisface por un miembro que tenga su sección transversal, ya sea circular o cuadrada (sólida o tubular). En estos casos todos los ejes de la sección transversal son principales, y por lo tanto uno de ellos puede arbitrariamente seleccionarse en la dirección de z_s .

En un caso más general de un miembro vertical, los ejes principales de la sección transversal serán girados respecto del eje x_M para que éstos formen un ángulo α con las direcciones de los ejes de la estructura. La orientación de tal miembro vertical se puede visualizar mejor considerando las rotaciones sucesivas de ejes mostradas en la Fig. 4-47. En este caso no existe giro a través del ángulo β (respecto del eje y_s). En cambio, el primer giro es a través del ángulo γ , que puede ser ya sea de 90° o 270° (véanse las Figs. 4-47a y 4-47b, respectivamente). El segundo giro es a través del ángulo α y respecto del eje x_M . La matriz de rotación para cualquiera de los casos mostrados en la figura se puede obtener por inspección. Esta consiste de los cosenos directores de los ejes x_M , y_M y z_M con respecto a los ejes de la estructura:

$$\mathbf{R}_{\text{vert}} = \begin{bmatrix} 0 & C_Y & 0 \\ -C_Y \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ C_Y \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4-96)$$

Esta expresión es válida para las dos orientaciones mostradas en la Fig. 4-47, siempre y cuando sea sustituido el valor apropiado de C_Y (+1 en el primer caso y -1 en el segundo caso). También debe notarse que si α es igual a cero, la matriz de rotación dada en la Ec. (4-96) se reduce a la matriz de rotación para un miembro vertical de una armadura en el espacio (Ec. 4-86).

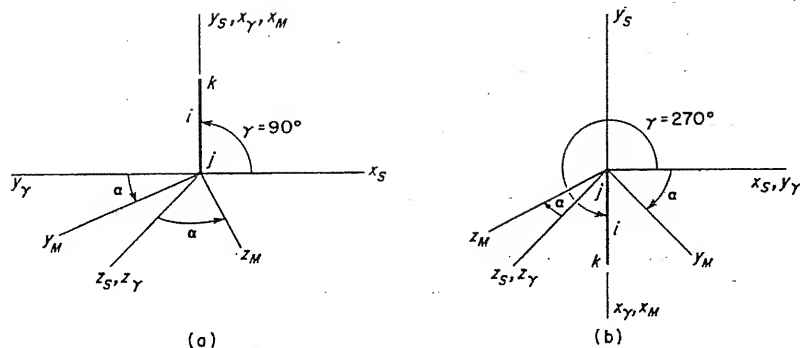
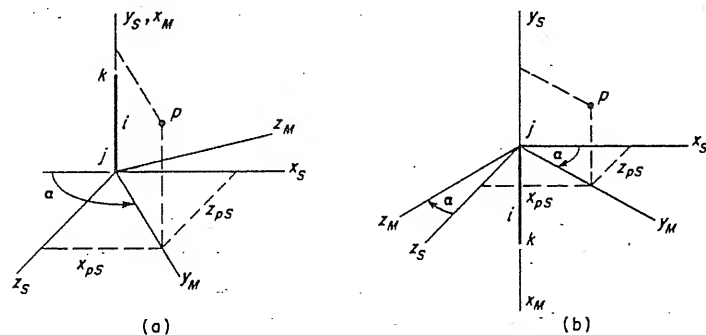


FIG. 4-47. Rotación de ejes para un miembro vertical de un marco en el espacio

En los casos en que se desee principiar con las coordenadas del punto p que en un plano principal se conoce está contenido, es posible calcular el $\sin \alpha$ y el $\cos \alpha$ para usó en la Ec. (4-96) directamente de las coordenadas del punto. La Fig. 4-48a muestra un miembro vertical con el extremo inferior designado como nudo j y el superior designado como nudo k . También se muestra en la figura el punto p . Cuando este punto se localiza de tal modo que sus coordenadas con respecto a los ejes S , sean positivas, el ángulo α estará entre 90° y 180° . El seno y el coseno de este ángulo son como sigue:

$$\sin \alpha = \frac{z_{pS}}{\sqrt{x_{pS}^2 + z_{pS}^2}} \quad \cos \alpha = \frac{-x_{pS}}{\sqrt{x_{pS}^2 + z_{pS}^2}} \quad (b)$$

Por otro lado, la Fig. 4-48b representa un miembro vertical con su extremo inferior designado como nudo k y el superior designado

FIG. 4-48. Uso del punto p para un miembro vertical de un marco en el espacio

como nudo j . En este caso el ángulo α , cuando p tiene coordenadas positivas, está entre 0° y 90° , y el $\sin \alpha$ y el $\cos \alpha$ están dados por las siguientes expresiones:

$$\sin \alpha = \frac{z_{pS}}{\sqrt{x_{pS}^2 + z_{pS}^2}} \quad \cos \alpha = \frac{x_{pS}}{\sqrt{x_{pS}^2 + z_{pS}^2}} \quad (c)$$

Las expresiones (b) y (c) se pueden combinar en un grupo introduciendo el coseno director C_Y para el miembro, como sigue:

$$\sin \alpha = \frac{z_{pS}}{\sqrt{x_{pS}^2 + z_{pS}^2}} \quad \cos \alpha = \frac{-x_{pS}}{\sqrt{x_{pS}^2 + z_{pS}^2}} C_Y \quad (4-97)$$

Para los casos mostrados en las Figs. 4-48a y 4-48b el coseno director C_Y tiene los valores de $+1$ y -1 , respectivamente. Las Ecs. (4-97) se pueden usar para calcular el $\sin \alpha$ y el $\cos \alpha$ de las coordenadas del punto p , que se debe localizar en un plano principal del miembro. Estas funciones se pueden sustituir entonces en la matriz de rotación R (Ec. 4-96).

En resumen, la matriz de rigidez de miembro S_M para un miembro de un marco en el espacio, primeramente se obtiene para los ejes de miembro utilizando la Tabla 4-1 en el Art. 4.3. En seguida se construye una matriz de rotación R en una forma que depende del caso en consideración, usando para identificar un plano principal, ya sea el ángulo α o las coordenadas de un punto p . La matriz de rotación R tiene cualquiera de las formas dadas en las Ecs. (4-90) o (4-96), dependiendo de que el miembro esté inclinado o vertical. En ambos casos, el ángulo α puede ser cero, lo que significa que R se reduce a una de las formas previamente dadas para un miembro de una armadura en el espacio (véanse las Ecs. 4-85 y 4-86). En todos los casos la matriz de rotación transformada R_T se forma de acuerdo con la Ec. (4-91), y la matriz de rigidez de miembro para los ejes de la estructura se calcula por la Ec. (4-92).

4.25. Análisis de marcos en el espacio. El marco en el espacio mostrado en la Fig. 4-43 contiene miembros rigidamente conectados y orientados en una forma general en el espacio. Las cargas sobre la estructura pueden ser de cualquier tipo y orientación. El sistema de numeración por adoptar para miembros y nudos es el mismo que fue discutido previamente para estructuras.

En el análisis de marcos en el espacio se consideran todas las deformaciones axiales, por flexión, y por torsión. Los desplazamientos desconocidos en los nudos son de seis tipos, llamémosles, las componentes de translación de nudo en x , y y z y las componentes de giro de nudo en los sentidos de x , y y z . Los seis posibles desplazamientos en un nudo particular j están denominados como sigue:

- $6j - 5 =$ índice para translación en la dirección de x
 $6j - 4 =$ índice para translación en la dirección de y
 $6j - 3 =$ índice para translación en la dirección de z
 $6j - 2 =$ índice para giro en el sentido de x
 $6j - 1 =$ índice para giro en el sentido de y
 $6j =$ índice para giro en el sentido de z

También, el número n de grados de libertad en un marco en el espacio se puede determinar del número de nudos n_j y el número n_r de restricciones por la siguiente expresión:

$$n = 6n_j - n_r \quad (4-98)$$

Un miembro i de un marco en el espacio tendrá los números de nudo j y k en sus extremos, según se muestra en la Fig. 4-49. Los doce posibles desplazamientos de los nudos asociados a este miembro se indican también en la Fig. 4-49. Estos desplazamientos llevan los índices como sigue:

$$\begin{array}{lll}
 j1 = 6j - 5 & j2 = 6j - 4 & j3 = 6j - 3 \\
 j4 = 6j - 2 & j5 = 6j - 1 & j6 = 6j \\
 k1 = 6k - 5 & k2 = 6k - 4 & k3 = 6k - 3 \\
 k4 = 6k - 2 & k5 = 6k - 1 & k6 = 6k
 \end{array} \quad (4-99)$$

La formación de la matriz de rigidez de nudo sigue el mismo camino general que en los marcos planos (véase el Art. 4.17), excepto que el proceso es complicado por el hecho de que se incluyen

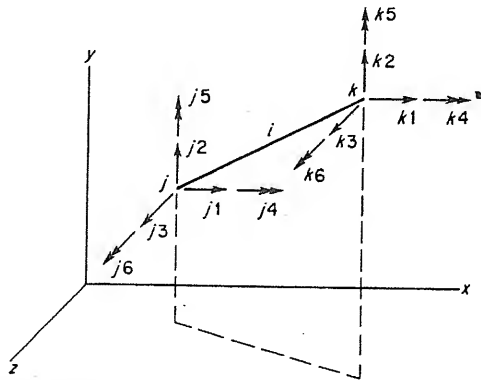


FIG. 4-49. Desplazamientos de extremo para un miembro de un marco en el espacio

más términos. La matriz de rigidez S_{MD} de 12×12 se genera para cada miembro en el marco (véase el Art. 4.24), y sus contribuciones son sumadas a las rigideces de los nudos j y k . Por ejemplo, la primera columna de la matriz S_{MD} contribuye a la matriz de rigidez de nudo S_j como sigue:

$$\begin{array}{ll}
 (S_j)_{j1,j1} = \sum S_{MD} + (S_{MD1,1})_i & (S_j)_{k1,j1} = (S_{MD7,1})_i \\
 (S_j)_{j2,j1} = \sum S_{MD} + (S_{MD2,1})_i & (S_j)_{k2,j1} = (S_{MD8,1})_i \\
 (S_j)_{j3,j1} = \sum S_{MD} + (S_{MD3,1})_i & (S_j)_{k3,j1} = (S_{MD9,1})_i \\
 (S_j)_{j4,j1} = \sum S_{MD} + (S_{MD4,1})_i & (S_j)_{k4,j1} = (S_{MD10,1})_i \\
 (S_j)_{j5,j1} = \sum S_{MD} + (S_{MD5,1})_i & (S_j)_{k5,j1} = (S_{MD11,1})_i \\
 (S_j)_{j6,j1} = \sum S_{MD} + (S_{MD6,1})_i & (S_j)_{k6,j1} = (S_{MD12,1})_i
 \end{array} \quad (4-100)$$

Otros once grupos de expresiones similares a las Ecs. (4-100) se pueden escribir para hacer un total de doce grupos de ecuaciones. Cada grupo considera el cambio de elementos de una columna dada en la matriz S_{MD} a las localizaciones apropiadas en la matriz S_j .

Acciones aplicadas en un nudo típico k se muestran en la Fig. 4-50. En la figura, las acciones A_{6k-5} , A_{6k-4} y A_{6k-3} son las componentes en x , y y z de la fuerza concentrada aplicada en el nudo. Además, las acciones A_{6k-2} , A_{6k-1} y A_{6k} son las componentes en x , y

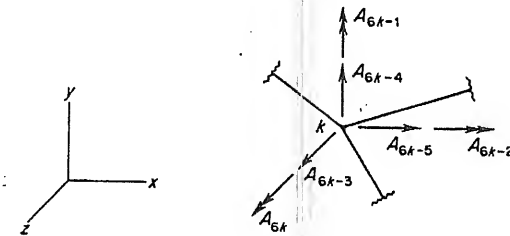


FIG. 4-50. Cargas de nudo para un marco en el espacio

y z del vector momento actuando en el nudo. Estas acciones están colocadas en el vector de acciones aplicadas A , que adopta la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 A &= \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, \dots \\
 &\dots, A_{6k-5}, A_{6k-4}, A_{6k-3}, A_{6k-2}, A_{6k-1}, A_{6k}, \dots \\
 &\dots, A_{6n_j-5}, A_{6n_j-4}, A_{6n_j-3}, A_{6n_j-2}, A_{6n_j-1}, A_{6n_j}\} \quad (4-101)
 \end{aligned}$$

La Fig. 4-51b muestra las acciones en los extremos de un miembro i de un marco en el espacio restringido debidas a las cargas sobre el miembro mismo. Las acciones de extremo A_{ML} para los ejes orientados con el miembro están definidas como sigue:

- $(A_{ML})_{i,1}$ = fuerza en la dirección de x_M en el extremo j
 $(A_{ML})_{i,2}$ = fuerza en la dirección de y_M en el extremo j
 $(A_{ML})_{i,3}$ = fuerza en la dirección de z_M en el extremo j
 $(A_{ML})_{i,4}$ = par en el sentido de x_M en el extremo j
 $(A_{ML})_{i,5}$ = par en el sentido de y_M en el extremo j
 $(A_{ML})_{i,6}$ = par en el sentido de z_M en el extremo j
 $(A_{ML})_{i,7}$ = fuerza en la dirección de x_M en el extremo k
 $(A_{ML})_{i,8}$ = fuerza en la dirección de y_M en el extremo k
 $(A_{ML})_{i,9}$ = fuerza en la dirección de z_M en el extremo k
 $(A_{ML})_{i,10}$ = par en el sentido de x_M en el extremo k
 $(A_{ML})_{i,11}$ = par en el sentido de y_M en el extremo k
 $(A_{ML})_{i,12}$ = par en el sentido de z_M en el extremo k

La matriz A_{ML} puede ser tratada como un arreglo rectangular del orden de $m \times 12$, en el que cada renglón se forma de los doce elementos arriba enumerados para un miembro dado. Por lo tanto,

$$A_{ML} = \begin{bmatrix} (A_{ML})_{1,1} & (A_{ML})_{1,2} & \cdots & (A_{ML})_{1,11} & (A_{ML})_{1,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (A_{ML})_{i,1} & (A_{ML})_{i,2} & \cdots & (A_{ML})_{i,11} & (A_{ML})_{i,12} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (A_{ML})_{m,1} & (A_{ML})_{m,2} & \cdots & (A_{ML})_{m,11} & (A_{ML})_{m,12} \end{bmatrix} \quad (4-102)$$

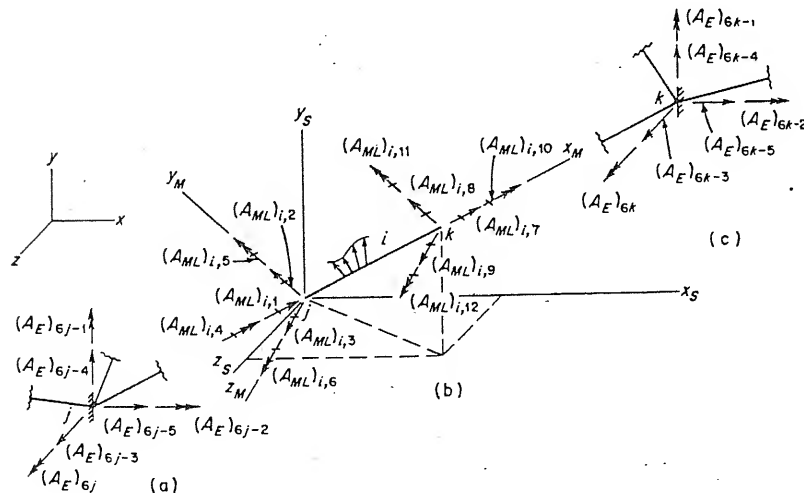


FIG. 4-51. Cargas sobre un miembro de un marco en el espacio

La construcción del vector de cargas equivalentes A_E se lleva a cabo por medio del procedimiento previamente utilizado de rotación de ejes. Las Figs. 4-51a y 4-51c muestran las cargas equivalentes en los nudos j y k , los cuales reciben contribuciones del miembro i . Los valores negativos de las porciones de incremento de A_E contribuidas por este miembro se obtienen evaluando el producto de $[R_T]_i$ y $\{A_{ML}\}_i$. La forma de la matriz de rotación R usada para este propósito está señalada por la categoría a la cual el miembro particular pertenece. Estas categorías fueron discutidas en el Art. 4.24. Siguiendo los cálculos de A_E , este vector se suma al vector A para formar el vector de cargas combinadas A_c .

Se completa el análisis calculando los desplazamientos de nudo D (traslaciones y rotaciones en las direcciones de x , y y z), utilizando la Ec. (4-8) y entonces introduciéndolos en el vector D_j . Las reacciones de apoyo A_R (fuerzas y pares en las direcciones de x , y y z) se calculan en seguida utilizando la Ec. (4-4). Finalmente, las acciones de extremo de miembro para cada miembro se calculan sustituyendo la matriz de rigidez de miembro $[S_M]_i$ para los ejes del miembro (Tabla 4-1) y la forma apropiada de la matriz de rotación transformada $[R_T]_i$ en la siguiente ecuación:

$$\{A_M\}_i = \{A_{ML}\}_i + [S_M]_i [R_T]_i \{D_j\}_i \quad (4-103)$$

Esta ecuación es de la misma forma que la de la Ec. (4-76) previamente dada para marcos planos.

En el Art. 5.9 se da un programa de computación para el análisis de marcos en el espacio, y también se incluyen en ese artículo ejemplos numéricos.

PROBLEMAS

Los problemas para el Art. 4.9 son para resolverse en la forma descrita en los Arts. 4.8 y 4.9. En cada problema se deben obtener todos los desplazamientos de nudo, reacciones de apoyo, y las acciones de extremo de los miembros, a menos que se estipule otra cosa. Use el sistema arbitrario de numeración mostrado en la Fig. 4-7b cuando se obtenga la matriz de rigidez total de nudo.

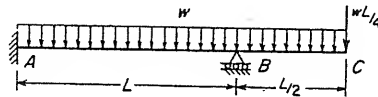
4.9-1. Analice la viga continua de la Fig. 2-16a, suponiendo que la rigidez a la flexión EI es constante para todos los claros. También suponga que $\omega L = P$ y $M = PL$.

4.9-2. Haga un análisis de la viga continua de la Fig. 2-17a si la rigidez a la flexión EI es la misma para ambos claros y $P_1 = 2P$, $P_2 = P$.

4.9-3. Analice la viga de tres claros mostrada en la figura para el Prob. 2.9-7 si $L_1 = L_3 = L$, $L_2 = 2L$, $P_1 = P_2 = P_3 = P$, $M = PL$, y $\omega L = P$. La rigidez a la flexión para los miembros AB y CD es EI y para el miembro BC es $2EI$.

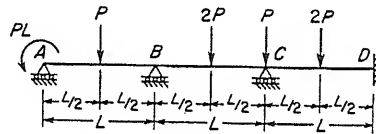
4.9-4. Analice la viga mostrada en la figura para el Prob. 2.9-14 suponiendo que $EI_1 = 2EI$ y que $EI_2 = EI$.

4.9-5. Analice la viga en voladizo mostrada en la figura, tomando los puntos A, B y C como nudos. La viga tiene una rigidez a la flexión constante igual a EI .



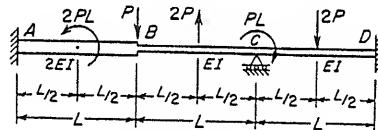
PROB. 4.9-5

4.9-6. Analice la viga de tres claros que tiene una rigidez a la flexión constante e igual a EI (ver figura).



PROB. 4.9-6

4.9-7. Analice la viga mostrada en la figura, tomando los puntos A, B, C y D como nudos. El segmento AB tiene una rigidez a la flexión de $2EI$, y la porción de B hasta D tiene una rigidez a la flexión constante e igual a EI .



PROB. 4.9-7

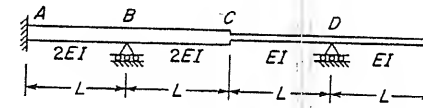
4.9-8. Obtenga la matriz de rigidez de nudo S_j para la viga mostrada en el Prob. 2.9-8; también vuelva a arreglar y divida a S_j en la forma dada por la Ec. (4-1). Suponga que la viga tiene un valor constante de EI .

4.9-9. Obtenga la matriz de rigidez de nudo S_j para la viga mostrada en el Prob. 2.9-11, suponga que EI es constante. También, vuelva a arreglar y divida la matriz en la forma dada por la Ec. (4-1).

4.9-10. Encuentre la matriz de rigidez de nudo S_j para la viga del Prob. 2.9-12, suponga que la rigidez a la flexión del claro de en medio es dos veces la de los claros de los extremos. También, vuelva a arreglar y divida la matriz en la forma dada por la Ec. (4-1).

4.9-11. Encuentre la matriz de rigidez de nudo S_j para una viga continua sobre cinco apoyos libres que tenga cuatro claros idénticos, cada uno de longitud L . También, vuelva a arreglar y divida la matriz en la forma dada por la Ec. (4-1). Suponga que EI es constante para todos los claros.

4.9-12. Obtenga la matriz de rigidez de nudo S_j para la viga mostrada en la figura. También, vuelva a arreglar y divida la matriz en la forma dada por la Ec. (4-1). La viga tiene una rigidez a la flexión de $2EI$ desde A hasta C y de EI desde C hasta E.



PROB. 4.9-12

Los problemas para el Art. 4.12 son para resolverse en la forma descrita en los Arts. 4.11 y 4.12. A menos que se diga otra cosa, se deben obtener todos los desplazamientos de nudo, reacciones de apoyo, y acciones de extremo de los miembros. Use los sistemas arbitrarios de numeración mostrados en las figuras que se acompañan a los problemas.

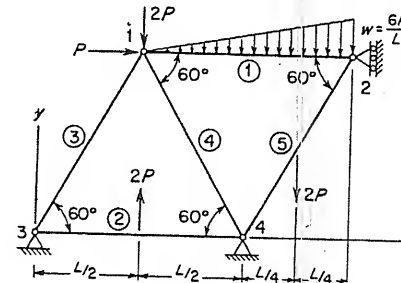
4.12-1. Analice la estructura de armadura plana de la figura para el Prob. 2.9-16 bajo el efecto de la carga vertical P mostrada en la figura más una carga horizontal de $2P$ aplicada a la media altura del miembro AC y dirigida hacia la derecha. Cada barra de la armadura tiene la misma rigidez axial EA_x . Numere los miembros según se muestra en la figura, y numere los nudos en la misma forma que las letras en la figura.

4.12-2. Analice la armadura plana mostrada en la Fig. 4-23 para las cargas mostradas, pero con un apoyo articulado que restrinja la translación en el punto B (nudo 2). Por otra parte, los datos son los mismos que los dados en el ejemplo.

4.12-3. Analice la armadura plana mostrada en la figura para el Prob. 2.9-20 debido a los pesos de las barras. Cada barra tiene la misma rigidez axial EA_x y el mismo peso w por unidad de longitud. Numere los nudos en la siguiente secuencia: D, C, A y B. Numere los miembros en el orden siguiente: DC, AB, AD, BC, DB y AC.

4.12-4. Analice la armadura mostrada en la Fig. 4-23 para los efectos de su propio peso, suponga que existe un apoyo libre en el nudo B que restrinja la translación en la dirección de x . Suponga que el peso de cada miembro es w por unidad de longitud. Por otra parte, los datos de la estructura son los mismos que los dados en el problema ejemplo.

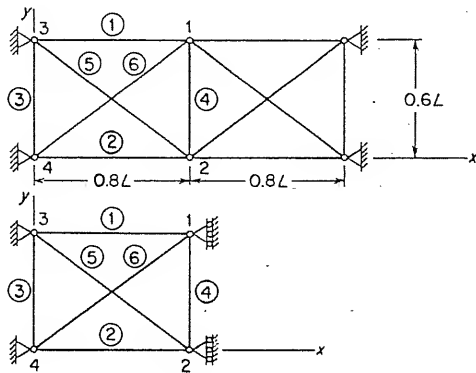
4.12-5. Analice la armadura para las cargas mostradas (véase figura). Todos los miembros tienen la misma rigidez axial EA_x .



PROB. 4.12-5

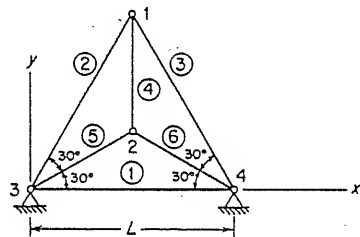
4.12-6. Analice la armadura plana mostrada en la figura para los efectos de su propio peso. Suponga que la rigidez axial de cada miembro es EA_x , y que cada uno tiene el mismo peso w por unidad de longitud. (Sugestión: Tome ventaja de la simetría de la estructura y cargas trabajando con la mitad de

la estructura, según se indica en la segunda parte de la figura. Nótese que tanto el área como el peso de la barra media se deben dividir en dos mitades).



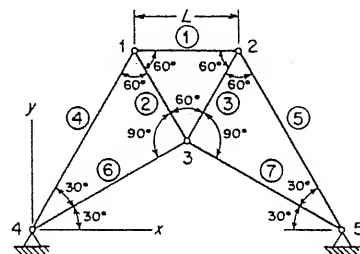
PROB. 4.12-6

4.12-7. Obtenga la matriz de rigidez de nudo S_j para la armadura plana mostrada en la figura. Suponga que todas las barras tienen la misma rigidez axial EA_x .



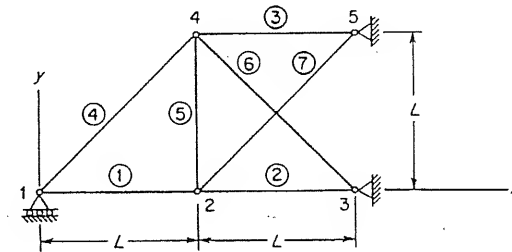
PROB. 4.12-7

4.12-8. Determine la matriz de rigidez de nudo S_j para la armadura plana mostrada en la figura. Suponga que todas las barras tienen la misma rigidez axial EA_x .



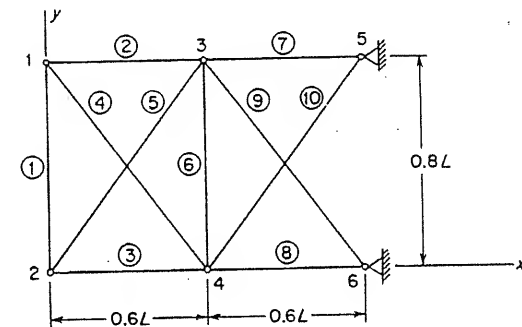
PROB. 4.12-8

4.12-9. Obtenga la matriz de rigidez de nudo S_j para la estructura de armadura plana mostrada en la figura. Vuelva a arreglar y divida la matriz en la forma dada por la Ec. (4-1). Suponga que los miembros horizontales y verticales tienen áreas de sección transversal de A_x , y que los miembros diagonales tienen áreas de sección transversal de $2A_x$.



PROB. 4.12-9

4.12-10. Determine la matriz de rigidez de nudo S_j para la estructura de armadura plana dada en la figura. Suponga que las áreas de sección transversal de los miembros numerados del uno al cinco son de A_x , y que las áreas de sección transversal de los miembros numerados del seis al diez son $2A_x$.



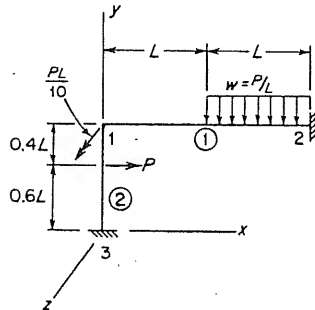
PROB. 4.12-10

Los problemas para el Art. 4.18 son para resolverse en la forma descrita en los Arts. 4.17 y 4.18. En cada problema, a menos que se diga otra cosa, se deben obtener todos los desplazamientos de nudo, reacciones de apoyo y las acciones de extremo de los miembros. Emplee los sistemas de numeración mostrados en las figuras que acompañan a los problemas. En los cálculos utilice unidades de kips y pulgadas.

4.18-1. Analice el marco plano mostrado en la Fig. 2-22a, suponga que ambos miembros tienen las mismas propiedades en su sección transversal. Utilice los siguientes datos numéricos: $P = 10$ kips, $L = H = 12$ pies, $E = 30\,000$ kips/plg², $I_z = 200$ plg⁴, y $A_x = 10$ plg². Numere los nudos en la secuencia de B, A, C, y numere los miembros en la secuencia de AB, BC.

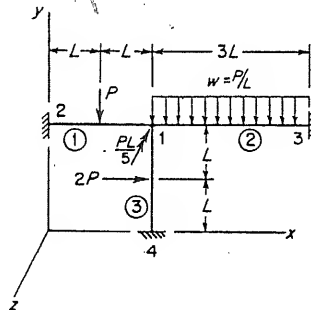
4.18-2. Analice el marco plano mostrado en la figura para los Probs. 2.9-25 y 2.9-27 si $P = 6$ kips, $L = 24$ pies, $H = 16$ pies, $E = 30\,000$ kips/plg², $I_z = 350$ plg⁴, y $A_x = 16$ plg². Numere los nudos en la secuencia de B, A, C, D, y numere los miembros en la secuencia de AB, BC, DB.

4.18-3. Analice el marco plano mostrado en la figura, suponga que ambos miembros tienen las mismas propiedades en su sección transversal. Emplee los siguientes datos: $P = 10$ kips, $L = 20$ pies, $E = 30\,000$ kips/plg², $I_z = 500$ plg⁴, y $A_x = 12$ plg².



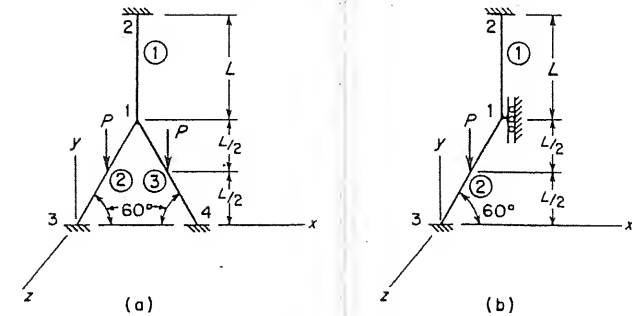
PROB. 4.18-3

4.18-4. Analice el marco plano mostrado en la figura, suponga que $P = 5$ kips, $L = 5$ pies, y $E = 10\,000$ kips/plg². El momento de inercia y el área de la sección transversal de los miembros 1 y 3 son 80 plg⁴ y 4 plg², respectivamente, y para el miembro 2 son 150 plg⁴ y 5 plg², respectivamente.



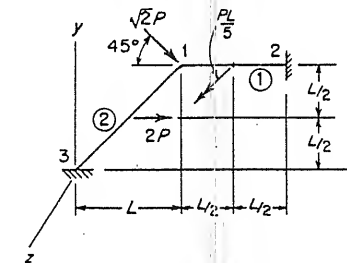
PROB. 4.18-4

4.18-5. Analice el marco plano mostrado en la figura (a) para los efectos de las cargas mostradas. Suponga que todos los miembros tienen $E = 10\,500$ kips/plg², $I_z = 26$ plg⁴, $A_x = 8$ plg² y también suponga que $L = 60$ plg y $P = 2\,000$ lb. (Sugestión: Tome ventaja de la simetría de la estructura y sistema de cargas analizando la estructura mostrada en la figura (b). Nótese que el área y el momento de inercia del miembro 1 deben ser partidos por la mitad. La restricción imaginaria en el nudo 1 restringe ambas translaciones tanto en la dirección de x como el giro en el sentido de z .)



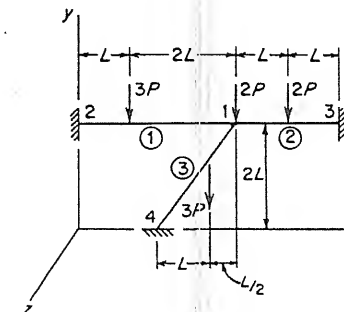
PROB. 4.18-5

4.18-6. Analice el marco plano mostrado en la figura suponiendo que (para ambos miembros) $E = 30\,000$ kips/plg², $I_z = 450$ plg⁴, y $A_x = 11$ plg². Suponga también, que $L = 300$ plg, y que $P = 2$ kips.



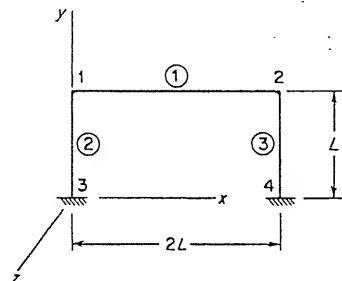
PROB. 4.18-6

4.18-7. El marco plano mostrado en la figura debe ser analizado sobre la base de los siguientes datos numéricos: $E = 30\,000$ kips/plg², $P = 400$ lb, $L = 30$ plg; para los miembros 1 y 2, $I_z = 12$ plg⁴, $A_x = 4$ plg²; para el miembro 3, $I_z = 14$ plg⁴, $A_x = 6$ plg².



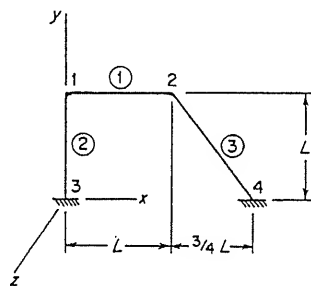
PROB. 4.18-7

4.18-8. Determine la matriz de rigidez de nudo S_j para el marco plano mostrado en la figura si todos los miembros tienen las mismas propiedades de sección transversal. Suponga los siguientes datos: $E = 30\,000$ kips/plg², $L = 20$ pies, $I_z = 1\,600$ plg⁴, $A_x = 24$ plg².



PROB. 4.18-8

4.18-9. Resuelva el problema anterior para el marco plano mostrado en la figura. También, vuelva a arreglar y divida la matriz en la forma dada por la Ec. (4-1).



PROB. 4.18-9

CAPÍTULO 5

PROGRAMAS DE CÁLCULO PARA ESTRUCTURAS RETICULARES

5.1. Introducción. En el Cap. 4 el método de análisis de la rigidez se presentó en una forma que es adecuada para programas de cálculo. El objeto de este capítulo es presentar diagramas de flujo para el análisis (por el método de la rigidez) de los seis tipos básicos de estructuras reticulares. Los diagramas de flujo están suficientemente detallados para permitir que cualquier persona que esté familiarizada con los elementos de un programa de computación escriba sus propios programas para el análisis estructural.

Los programas descritos en este capítulo han sido formados teniendo tres objetivos principales: el primer objetivo es aplicar la fuerza y generalidad del método de análisis de la rigidez a cada una de las categorías básicas de estructuras reticulares. El segundo objetivo es permitir al principiante interpretar los diagramas de flujo y que escriba sus propios programas, usando éstos como guías. El tercer objetivo es mostrar al lector ciertas técnicas de programación que se puedan usar después para el propósito de escribir programas más sofisticados para el análisis estructural. Por lo tanto, los programas aquí descritos son por sí mismos de alguna utilidad, pero también sirven como una excelente base preparatoria para escribir programas más avanzados. Tales programas podrían incluir modificaciones de los tipos discutidos en el Cap. 6. Es también posible añadir refinamientos para mejorar la velocidad de los cálculos y para usar los almacenamientos en el computador en una forma más eficiente. Además, es posible combinar todos los seis programas en un gran programa para el análisis de todos los tipos de estructuras reticulares. Estas modificaciones se pueden considerar por el programador una vez que haya dominado los programas elementales dados aquí.*

En los programas de este capítulo se supone que todas las estructuras por analizar están formadas por miembros rectos prismá-

* Se presentan programas más avanzados en el libro escrito por W. Weaver, Jr., *Computer Programs for Structural Analysis*, 1966, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.

ticos. Las propiedades del material para una estructura dada se toman constantes en toda la estructura. Se consideran únicamente los efectos de las cargas y ninguna otra influencia, tal como cambios de temperatura, se toma en cuenta. Para cada tipo de estructura el análisis sigue los pasos descritos en el Cap. 4.

El lector apreciará el hecho de que hay muchas formas de llevar a cabo los pasos detallados incluidos en cálculos estructurales. También existen muchas formas posibles en que un programa de computación se puede organizar, incluyendo variaciones en la forma de leer los datos en el programa y la impresión de los resultados. Por lo tanto, es obvio que los programas en este capítulo, aunque representan un método satisfactorio de cálculo, no representan el único método. Los programas han sido probados en el salón de clase y en el cuarto de consulta, y se han probado ser prácticamente útiles y fáciles de dominar por programistas principiantes. Una vez que se han entendido, el programista puede proceder por sí mismo a desarrollar programas más sofisticados.

5.2. Programación de cálculo y diagramas de flujo. Se supone que el lector está familiarizado con la programación de cálculo a grado tal que conoce un lenguaje algorítmico, tal como ALGOL o el FORTRAN.* También debe tener alguna experiencia en la programación de problemas elementales, no necesariamente relacionados con la ingeniería estructural. Si el lector tiene esta rudimentaria habilidad de programar, así como un entendimiento fundamental de la materia en los capítulos anteriores de este libro, no encontrará dificultad en escribir los programas descritos en este capítulo. Los programas se presentan en la forma de diagramas de flujo de tal modo que son independientes de un lenguaje particular o de un tipo particular de computadora. Los diagramas de flujo están lo suficientemente detallados para que sea cubierto cada paso de los cálculos. La persona que desee escribir estos programas en el lenguaje a que está acostumbrado debe ser capaz de hacerlo trabajando paso por paso a través de los diagramas de flujo.

Algunas de las características esenciales de un lenguaje algorítmico, así como los signos utilizados en los diagramas de flujo, están reunidas en este artículo. No se pretende que esta discusión sea completa, sino que cubre aquellas características que son necesarias en los diagramas de flujo que siguen.

Los números en un programa de computación pueden ser o nú-

* Para discusiones detalladas de estos lenguajes algorítmicos, véase D. D. McCracken, *A Guide to ALGOL Programming*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962, y E. I. Organick, *A FORTRAN Primer*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1963.

meros decimales o números enteros. Los números decimales también se llaman números reales o números de puntos flotantes. Los números enteros son los números que no tienen punto decimal. Ambos tipos serán usados en los programas, pero se deben distinguir uno del otro por el hecho de que las operaciones aritméticas no son siempre las mismas para los dos tipos de números. La mayoría de los cálculos en los programas se hacen con números decimales. Los números enteros se usan sobre todo como índices (o suscritos). Al principio de cada diagrama de flujo se da una lista de las variables que son números enteros.

Los *identificadores* son nombres para variables, constantes u otras entidades que se usan en el programa. Por ejemplo, el símbolo E se usa como un identificador para el módulo de elasticidad del material. En general, los símbolos previamente usados en el Cap. 4 se usan como identificadores en los programas, aun cuando se requieran algunas modificaciones menores debido al número limitado de caracteres disponibles en máquinas perforadoras. Todos los caracteres alfabéticos deben ser letras mayúsculas y todos los símbolos deben estar sobre la misma línea. Por ejemplo, el símbolo para el número de nudos n_i se convierte en el identificador NJ en un programa de computación. Los identificadores de este tipo requieren únicamente de un punto de almacenamiento en la memoria de una computadora y se dice que representan *variables simples*.

Existen otras variables, llamadas *variables suscritas*, las que requieren de más de un punto de localización. Por lo tanto, un identificador para una variable suscrita representa un arreglo de números como en el caso de un vector o una matriz. Un elemento particular en el arreglo está indicado por los *suscritos* que siguen al símbolo. Los suscritos están encerrados en llaves-cuadradas en los programas que más adelante se darán. Por ejemplo, un elemento del vector A_E , tal como A_{E4} , se convierte en el programa en $AE[4]$. Similarmente, un elemento de la matriz A_{ML} , tal como A_{ML23} , se convierte en $AML[2, 3]$. Es necesario reservar por adelantado un conjunto de puntos de almacenamiento para cada variable suscrita en la memoria de la computadora, como más adelante se explicará. Así pues, al principio de cada diagrama de flujo se da una lista de variables suscritas en las que se debe hacer esto.

Los *operadores* usados en un programa de cálculo son de varios tipos; los usados en los programas de este capítulo se resumen en la Tabla 5-1.

Los *operadores aritméticos* se usan para significar las operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potencias. Todas estas operaciones se indican por los símbolos algebraicos usuales, excepto

TABLA 5-1. OPERADORES USADOS EN PROGRAMAS DE CÁLCULO

Operador	Símbolo
Operadores aritméticos:	
Suma	+
Resta	-
Multiplicación	\times
División	/
Exponenciación	*
Operador de reemplazo	\leftarrow
Operadores de relación:	
Menor	<
Menor o igual	\leq
Igual	=
Mayor o igual	\geq
Mayor	>
Diferente	\neq

la exponenciación. Ya que todos los símbolos deben estar sobre la misma línea, las operaciones de potencias se indican por un asterisco seguido por el exponente. Por ejemplo, A^4 se representa en un programa por $A*4$.

El operador de reemplazo es una flecha dirigida hacia la izquierda; representa la operación de reemplazar un número existente en un punto de almacenamiento por un nuevo número. Se dice entonces que el nuevo número es el *valor corriente* de la variable. Los operadores de relación están también enumerados en la Tabla 5-1. Estos consisten de las relaciones menor, menor o igual, igual, mayor o igual, mayor y diferente. Todos los operadores de relación se representan por símbolos algebraicos usuales.

Los programas de computación consisten de *declaraciones* y *manifestaciones*. El propósito de una declaración es definir las propiedades de uno o más identificadores usados en el programa. Por ejemplo, una declaración se puede usar para especificar qué identificadores representan números enteros y cuáles representan números decimales. Se dice que los primeros son identificadores del tipo de número entero y los últimos son identificadores del tipo de flotantes (o reales). Otra clase importante de declaración especifica el almacenamiento que se debe reservar para arreglos en el programa (declaraciones de arreglo). Las declaraciones también se usan para especificar los ítems en grupos de datos de entrada o salida, así como los detalles del formato para la información de salida. Por otro lado,

las manifestaciones definen las operaciones que deben ser ejecutadas por la computadora. El orden en que las manifestaciones se escriben es una fase esencial en los programas de cálculo porque son ejecutadas una por una en la secuencia en que aparecen en el programa, excepto cuando las manifestaciones mismas causan control para pasar a otra manifestación que no está en secuencia.

Una manifestación puede ser precedida por un *rótulo*. Tales rótulos de manifestaciones sirven para identificar manifestaciones particulares y son útiles para el fin de proceder de una manifestación a otra en una secuencia diferente a la que están enumeradas.

Los tipos de manifestaciones usados en los programas de este capítulo se resumen en la Tabla 5-2. Los símbolos de diagramas de flujo que denotan estas manifestaciones aparecen también en la tabla. Cada una de las manifestaciones enumeradas en la Tabla 5-2 se describen brevemente en la siguiente discusión.

La *manifestación de entrada* causa que la información de alguna fuente externa, tal como tarjetas de datos o cinta, se transfiera a la unidad de memoria de la computadora. Una manifestación de entrada se representa en un diagrama de flujo por un cuadro en la forma de una tarjeta de datos (véase la Tabla 5-2). Como ejemplo, supóngase que los números A , B y C se deben introducir a la computadora como datos de entrada. Esto se puede representar en el diagrama de flujo según se muestra en la Fig. 5-1a. (Las flechas indican los pasos en un diagrama de flujo).

La *manifestación de salida* produce que la información en la computadora se transfiera hacia afuera y se comunique al programista por medio de una impresión, una tarjeta perforada u otro medio. Una manifestación de salida aparece en un diagrama de flujo como cuadro, con una línea diagonal en su base, según se muestra en la Tabla 5-2. La Fig. 5-1b demuestra la apariencia en un diagrama de flujo de una manifestación de salida que causa que los números A , B y C se impriman (o se comuniquen de otro modo al programista).

La *manifestación de asignación* representa el reemplazo del valor corriente de una variable por un nuevo valor, que entonces se convierte en el valor corriente de la variable. Por ejemplo, la manifestación

$$A \leftarrow B \times C$$

quiere decir que el producto $B \times C$ (el término de la derecha) debe ser valuado y puesto en el punto de almacenamiento para la variable A (el término de la izquierda). Por lo tanto, el valor corriente

TABLA 5-2. MANIFESTACIONES USADAS EN PROGRAMAS DE COMPUTACION

Tipo de manifestación	Símbolo en el diagrama de flujo
(a) Entrada	
(b) Salida	
(c) Asignación	
(d) Control incondicional	
(e) Control condicional	
(f) Control iterativo	

de A se reemplaza por el producto de B por C, que entonces se convierte en el valor corriente de A. El operador de reemplazo es una parte integral de la manifestación de asignación. En un diagrama de flujo la manifestación de asignación se encierra en un rectángulo (véase la Tabla 5-2). La manifestación de asignación arriba des-

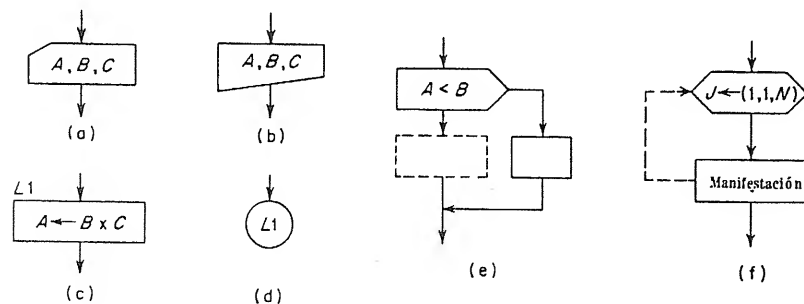


FIG. 5-1. Símbolos de las manifestaciones para un diagrama de flujo: (a) manifestación de entrada, (b) manifestación de salida, (c) manifestación de asignación, (d) manifestación de control incondicional, (e) manifestación de control condicional y (f) manifestación de control (iterativo)

crita se muestra en la Fig. 5-1c tal como aparecería en un diagrama de flujo. La forma de mostrar un rótulo de manifestación en un diagrama de flujo también se ilustra en la Fig. 5-1c. El rótulo se escribe en la esquina superior izquierda del rectángulo, y en este ejemplo se supone que el rótulo es el identificador L1.

La *manifestación de control incondicional* causa un cambio en el orden de ejecución de manifestaciones en un programa. Mediante esta manifestación, el control puede transferirse a cualquier otra manifestación en el programa refiriéndose a su rótulo de manifestación. La manifestación de control incondicional se representa en un programa por un círculo, como se muestra en la Tabla 5-2. El rótulo de la manifestación a cuyo control es transferida se indica dentro del círculo. Por ejemplo, en la Fig. 5-1d el rótulo L1 de manifestación que se ve en el círculo indica que el control debe transferirse a la manifestación en el programa que tiene el rótulo L1.

La *manifestación de control condicional* proporciona la habilidad de tomar decisiones basadas en una prueba, que se puede hacer con una expresión de relación. El control se transfiere a una manifestación u otra en el programa, dependiendo de si la expresión es falsa o verdadera. El símbolo para el diagrama de flujo de una manifestación de control condicional se muestra en la Tabla 5-2 con las ramas verdadera y falsa indicadas por T y F, respectivamente. Estas letras no se requieren en un diagrama de flujo si las ramas falsa o verdadera están siempre arregladas en la forma mostrada. La Fig. 5-1e muestra una manifestación de control condicional que prueba si A es menor que B, utilizando el operador de relación <. Si la condición es verdadera, se sigue la rama de la derecha; pero si la condición es falsa, el programa continúa a lo largo de la rama indicada por la flecha inferior. En algunos casos la rama falsa puede contener una manifestación (indicada por el cuadro de líneas interrumpidas en la Fig. 5-1e) que debe ser hecha como una alternativa a la manifestación en la rama verdadera.

La *manifestación de control iterativo* es un artificio útil para ejecutar la misma manifestación o grupo de manifestaciones un número especificado de veces. Un tipo común de manifestación de control iterativo contiene una lista de tres elementos que definen el valor inicial, un valor de incremento y un valor final de un parámetro de control. En un diagrama de flujo esta lista se encierra en una figura hexagonal del tipo mostrado en la Tabla 5-2. La línea punteada y marcada con flecha asociada con el símbolo indica que el control se regresa a este punto en forma de ciclo. La Fig. 5-1f muestra una manifestación de control iterativo que causa que la

manifestación dentro del cuadro rectangular sea ejecutada N veces. La manifestación de control iterativo contiene la lista de los tres elementos (en paréntesis), como se muestra:

$$J \leftarrow (1, 1, N)$$

Esta expresión significa que la cantidad J toma el valor 1, la primera vez que es ejecutada la manifestación en el cuadro, y que J se incrementa en 1 en cada ciclo de ejecución, hasta que finalmente J se coloca igual a N y la manifestación se ejecuta por última vez. Como ejemplo, supóngase que A , B y C son todas variables suscritas cada una de N elementos. Si los elementos correspondientes de B y C se van a multiplicar y asignar a A , la manifestación en el cuadro rectangular sería

$$A[J] \leftarrow B[J] \times C[J]$$

Después de N repeticiones de los cálculos, todos los elementos de los arreglos han sido procesados y el control se transfiere a la siguiente manifestación en el programa.

En cualquier manifestación en el programa se hace necesario valuar una *función* durante el curso de ejecución de la manifestación. Por ejemplo, la manifestación de asignación

$$A \leftarrow B \times \text{COS}(C)$$

envuelve la evaluación del coseno de C . En este ejemplo, COS es el designador de función, y su uso en un programa implica que una serie específica de operaciones debe ejecutarse automáticamente, dando como resultado la evaluación del coseno de C . Ciertas funciones frecuentemente usadas, tales como el seno, coseno, raíz cuadrada, logaritmo y valor absoluto (designadas como SEN , COS , SQRT , LOG y ABS), se incorporan en lenguajes algorítmicos para la conveniencia del programista.

Otra característica importante de los lenguajes algorítmicos permite al programista usar una serie de manifestaciones como un *procedimiento* (o *subrutina* en FORTRAN), que es un tipo de subprograma. El procedimiento es un conjunto de manifestaciones que se pueden usar en varios puntos del mismo programa. También se pueden usar los procedimientos en diferentes programas sin ninguna alteración. En los programas de este capítulo se supone que se puede usar un procedimiento para invertir una matriz cuadrada no singular. En este procedimiento se supone que la matriz inversa se almacena en el mismo lugar de almacenamiento de la matriz original.

Por lo tanto, en el paso de cada programa en que se desee invertir la matriz de rigidez S , aparece una manifestación que indica que la inversión debe ser ejecutada, pero se omiten los detalles de la ejecución de la inversión.

Aunque la discusión anterior de alguna de las características de un lenguaje algorítmico es breve e incompleta, su propósito ha sido explicar las convenciones usadas en los diagramas de flujo de este capítulo. Con estas convenciones en mente, el programista puede seguir los diagramas y escribir sus propios programas.

5.3. Principales características de los programas. Las principales características de todos los programas siguen directamente de la secuencia de operaciones descritas en el Cap. 4. Sin embargo, sólo una parte de la matriz de la rigidez total de nudo S_j es generada en los programas. Ya que sólo los efectos de carga se toman en cuenta, las porciones requeridas de S_j son S y S_{RD} (véase la Ec. 4-1). Las otras dos porciones (S_{DR} y S_{RR}) no son generadas en estos programas. Sin embargo, hay tan sólo un paso adicional para generarlas y esto puede llevarse a cabo en un programa más extenso que incluya los efectos de los desplazamientos de apoyo (véase el Art. 6.5).

Las matrices de rotación transformadas se usan únicamente en el programa para el análisis de marcos en el espacio, porque de lo contrario los cálculos para un marco en el espacio se hacen muy complejos. Para todas las otras estructuras, sin embargo, los cálculos se llevan a cabo directamente por medio de las fórmulas encontradas en el Cap. 4.

Ya que los pasos detallados en un programa de computación se relacionan con la forma en que los datos se preparan, cada programa está precedido por un resumen que explica la preparación de los datos necesarios. Además, algunas de las variables en un programa serán del tipo de números enteros, mientras que otras son del tipo de puntos flotantes. Por lo tanto, a cada diagrama de flujo le precede una lista del tipo de variables de número entero. Las variables que están suscritas en el programa (y las que necesitan partes de almacenamiento en la computadora) también se enlistan al principio de cada diagrama de flujo.

Las características principales de todos los programas se muestran en los cinco siguientes pasos, cada uno de los cuales se explica con más detalle en relación con los diagramas de flujo:

1. Entrada e impresión de los datos de la estructura
 - (a) Parámetros estructurales y módulos de elasticidad
 - (b) Coordenadas de los nudos (excepto vigas continuas)

- (c) Designación de los miembros, propiedades y orientaciones
- (d) Lista de restricciones de nudo; lista de restricciones acumulativas
- 2. Matriz de rigidez de la estructura
 - (a) Formación de la matriz de rigidez
 - (b) Inversión de la matriz de rigidez
- 3. Entrada e impresión de los datos de carga
 - (a) Número de los nudos y miembros cargados
 - (b) Acciones aplicadas en los nudos
 - (c) Acciones en los extremos de miembros restringidos debidas a las cargas
- 4. Construcción de los vectores asociados con las cargas
 - (a) Cargas equivalentes de nudo
 - (b) Cargas combinadas de nudo
- 5. Cálculo y salida de resultados
 - (a) Desplazamientos de nudo y reacciones de apoyo
 - (b) Acciones de extremo de los miembros

Los pasos arriba bosquejados se repiten en los diagramas de flujo a fin de identificar la naturaleza de las diferentes partes del programa. A los diagramas de flujo se acompañan notas explicatorias para cada paso. Estas notas se identifican por números en paréntesis en la parte izquierda del diagrama de flujo.

En el bosquejo anterior y en los programas, se supone que los datos de entrada y que ciertos encabezados descriptivos serán impresos, así como también los resultados finales. Tal información se necesita generalmente, para identificar a la estructura que se está analizando y para proporcionar al programista los resultados que constituyen la meta final del análisis. Por supuesto, es siempre posible para un programista sumar manifestaciones adicionales de salida en cualquier grado intermedio de los cálculos si se desea imprimir algunos de los resultados intermedios. Por ejemplo, bajo ciertas condiciones podría desearse imprimir la matriz de rigidez para la estructura.

El primer programa que se hará en este capítulo se presenta en forma completa. Sin embargo, algunos de los últimos programas contienen pasos que son los mismos que se presentan en programas anteriores. Cuando este traslape ocurre, los pasos no se repiten; por el contrario, el lector debe referirse a los programas anteriores en los que aparecen estos pasos.

Después de preparar su propio programa de computación para un tipo dado de estructura, el lector deseará verificarlo resolviendo, por lo menos, un ejemplo del que conozca la solución. Para este

propósito, cada programa de este capítulo se sigue por uno o más ejemplos. Estos problemas consisten de las soluciones dadas por la computadora para los ejemplos dados en el Cap. 4, así como también algunos problemas adicionales de naturaleza más compleja. Estos problemas fueron resueltos usando los programas de computación de este capítulo y se dan los resultados finales para cada caso.

La Tabla 5-3 resume la mayor parte de la notación de este capítulo, con los ítems enumerados aproximadamente en el orden en que aparecen en los programas. Al principio del Art. 5.9 se da más notación, que es la que se requiere únicamente para marcos en el espacio. Un símbolo en la lista que es seguido por llaves cuadradas [] indica una variable suscrita con un solo suscrito, esto es, un vector. Un símbolo seguido por llaves cuadradas que encierran a una coma [,] indica una variable suscrita (o una matriz) con dos suscritos.

Debe ser usado un sistema consistente de unidades para los datos de entrada, que incluya únicamente, unidades de fuerza y de longitud. Los resultados de los cálculos tendrán las mismas unidades que las de los datos de entrada y, además, todos los ángulos automáticamente estarán en radianes. Un ejemplo de un sistema consistente de unidades es el que da cargas en kips, longitudes en pulgadas, áreas en pulgadas cuadradas, módulo de elasticidad en kips por pulgada cuadrada, y así sucesivamente. En tal caso, todos los resultados finales se darán en kips, pulgadas y radianes. Por otro lado, si las unidades que se usan para los datos de entrada son en pies y libras, los resultados finales estarán en términos de pies, libras y radianes.

5.4. Programa para una viga continua. El programa descrito en este artículo lleva a cabo el análisis de una viga continua por las técnicas descritas en el Art. 4.8. Los datos de entrada que se requieren para el programa se discuten primero, ya que la forma del programa depende, hasta cierto punto, de la forma en que se proporcionan los datos. En seguida, se presenta el diagrama de flujo para el programa, que se acompaña de comentarios explicatorios. Finalmente, se analiza de nuevo el ejemplo de la viga continua del Art. 4.9, empleando un programa de computación.

Los datos de entrada requeridos en el programa se resumen en la Tabla 5-4. Esta tabla especifica el número de tarjetas de datos que se requieren para cada tipo de información, así como también los ítems que deben ser perforados en cada tarjeta. La primera tarjeta que se enumera en la tabla contiene el número de miembros M , el número de restricciones NR , el número de nudos restringidos NRJ , y el módulo de elasticidad E del material. La razón para incluir

TABLA 5-3. IDENTIFICADORES USADOS EN PROGRAMAS DE COMPUTACIÓN

Identificadores	Definición
M	Número de miembros
N	Número de grados de libertad
NJ	Número de nudos
NR	Número de restricciones de apoyo
NRJ	Número de nudos restringidos
E	Módulo de elasticidad a la tensión o a la compresión
G	Módulo de elasticidad al cortante
I	Índice de miembro
J, K	Índices de nudo
X[,], Y[,], Z[,]	Coordenadas X, Y y Z del nudo
JJ[,]	Designación del extremo J del miembro (nudo j)
JK[,]	Designación del extremo K del miembro (nudo k)
L[,]	Longitud del miembro
AX[,]	Área de la sección transversal del miembro
IX[,]	Constante de torsión del miembro
IY[,], IZ[,]	Momentos de inercia respecto a los ejes Y y Z
XCL, YCL, ZCL	Componentes en X, Y y Z de la longitud del miembro
CX[,], CY[,], CZ[,]	Cosenos directores en X, Y y Z del miembro
RL[,]	Lista de restricciones de nudo
CRL[,]	Lista de restricciones acumulativas
J1, ..., J6	Índices para los desplazamientos en el extremo J del miembro
K1, ..., K6	Índices para los desplazamientos en el extremo K del miembro
SCM	Constante de rigidez del miembro
SM[,]	Matriz de rigidez del miembro para los ejes orientados con el miembro
SMD[,]	Matriz de rigidez de miembro para los ejes orientados con la estructura
S[,]	Matriz de rigidez de nudo (S_j)
NLJ	Número de nudos cargados
NLM	Número de miembros cargados
A[,]	Acciones (cargas) aplicadas en los nudos (en las direcciones de los ejes de la estructura)
AML[,]	Acciones en los extremos de miembros restringidos (en las direcciones de los ejes del miembro) debidas a las cargas
AE[,]	Cargas equivalentes de nudo (en las direcciones de los ejes de la estructura)
AC[,]	Cargas combinadas de nudo (en las direcciones de los ejes de la estructura)
D[,]	Desplazamientos de nudo (en las direcciones de los ejes de la estructura)
AR[,]	Reacciones de apoyo (en las direcciones de los ejes de la estructura)
JE, KE	Índices para vectores expandidos

TABLA 5-4. PREPARACIÓN DE LOS DATOS PARA EL PROGRAMA DE UNA VIGA CONTINUA

	Datos	Número de tarjetas	Items en las tarjetas de datos
Datos de la estructura	(a) Parámetros de la estructura y módulo de elasticidad	1	M NR NRJ E
	(b) Designación y propiedades de miembros	M	I L[I] IZ[I]
	(c) Lista de restricciones de nudo	NRJ	K RL[2K - 1] RL[2K]
Datos de la carga	(a) Número de nudos y miembros cargados	1	NLJ NLM
	(b) Acciones aplicadas en los nudos	NLJ	K A[2K - 1] A[2K]
	(c) Acciones en los extremos de miembros restringidos debidas a las cargas	NLM	I AML[I, 1] AML[I, 2] AML[I, 3] AML[I, 4]

a NRJ es que el número de tarjetas de datos que se requieren para llenar la lista de restricciones de nudo (véase la línea 3 de la tabla) se reduce a un mínimo si es conocido el número de nudos restringidos.

Cada tarjeta de datos que contenga información de miembro (línea 2 de la Tabla 5-4) incluye para un miembro el número de miembro I, la longitud L[I] y el momento de inercia IZ[I] respecto del eje z. Se requiere un total M de tarjetas.

Cada una de las tarjetas en las siguientes series (un total de NRJ tarjetas) contiene un número K de nudos y dos números de clave que indican las condiciones de restricción en ese nudo. El término RL[2K - 1] indica la restricción contra translación en la dirección de y en el nudo k; el término RL[2K] indica la restricción contra el giro en el sentido de z en el nudo k. La convención adoptada en este programa es la siguiente. Si existe restricción, se asigna el número 1 como el valor de RL; si no hay restricción se asigna un valor de cero.

La primera tarjeta en los datos de carga contiene dos números. Estos son el número de nudos cargados NLJ y el número de miembros cargados NLM . Un motivo para introducir estos números es que sirven para reducir a un mínimo el número subsecuente de las tarjetas de datos de carga requeridas. Otra razón es que ciertos cálculos en el programa pueden no tomarse en cuenta si cualesquiera de NLJ o NLM es igual a cero; por ejemplo, si NLM es igual a cero, se puede omitir el cálculo del vector A_E .

Cada tarjeta de carga de nudo (un total de NLJ tarjetas) contiene un número de nudo K y las dos acciones aplicadas en ese nudo. Estas acciones son la fuerza aplicada en la dirección de y y el par aplicado en el sentido de z . Finalmente, cada tarjeta para cargas de miembro (un total de NLM tarjetas) contiene un número I y las cuatro acciones de empotramiento para ese miembro. Las acciones de empotramiento consisten en una fuerza, en la dirección de y , y en un par en el sentido de z en cada extremo del miembro.

La preparación de los datos para una estructura particular se ilustra en el problema ejemplo al final de este artículo.

Al principio de un programa de computación hay varios temas preliminares que deben tomarse en cuenta. Es buena práctica introducir un programa con una descripción de su contenido mismo. Esto incluye el alcance del programa, un bosquejo de los pasos en el programa, la notación usada y los datos requeridos. Ya que esto se ha hecho primeramente para la conveniencia del programista, no se incluye en los diagramas de flujo de este capítulo.

Otro tema preliminar es señalar aquellos identificadores en un programa que han de ser números enteros en oposición a aquellos que han de ser números decimales. Los siguientes identificadores del tipo de números enteros aparecen en el programa de la viga continua:

$I, J, JE, J1, J2, K, KE, K1, K2, M, N,$

$NJ, NR, NRJ, NLJ, NLM, RL, CRL$

y para este efecto se debe hacer una elección apropiada.

Además, el almacenamiento en la memoria unitaria de una computadora se debe reservar para las variables suscritas en el programa. Para el programa de la viga continua las variables suscritas son las siguientes:

$L[], IZ[], RL[], CRL[], A[], AML[],$

$AE[], AC[], SM[], S[], D[], AR[]$

Finalmente, cualquier procedimiento que se use en el programa (tal como el procedimiento de inversión de matriz) debe insertarse

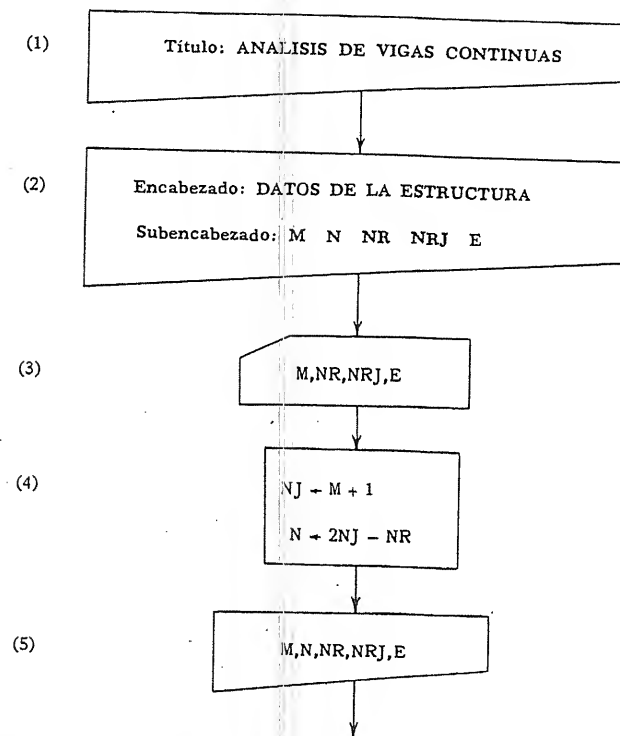
al principio del mismo, a fin de tenerlo disponible para usos posteriores.

A continuación se muestra el diagrama de flujo para la viga continua. Las principales características del programa se intercalan en el diagrama; los comentarios anotados por los números en paréntesis se dan al final del diagrama.

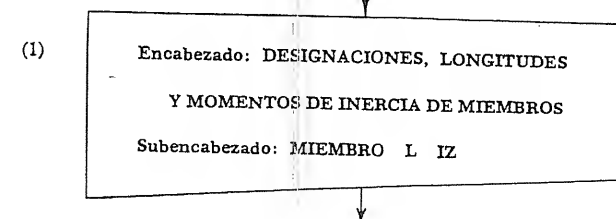
DIAGRAMA DE FLUJO PARA UN PROGRAMA DE VIGA CONTINUA

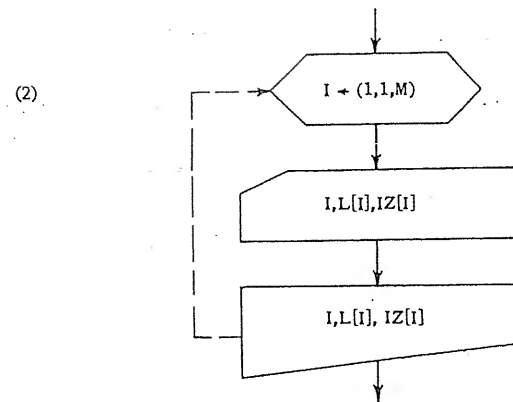
1. Entrada e impresión de datos de la estructura

a. Parámetros de la estructura y módulo elástico

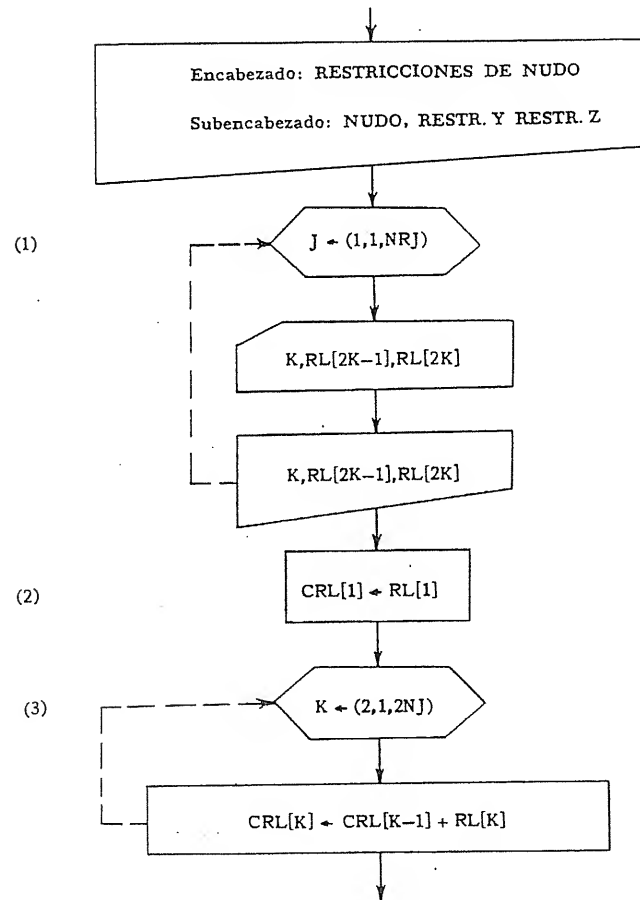


b. Designaciones y propiedades de miembros



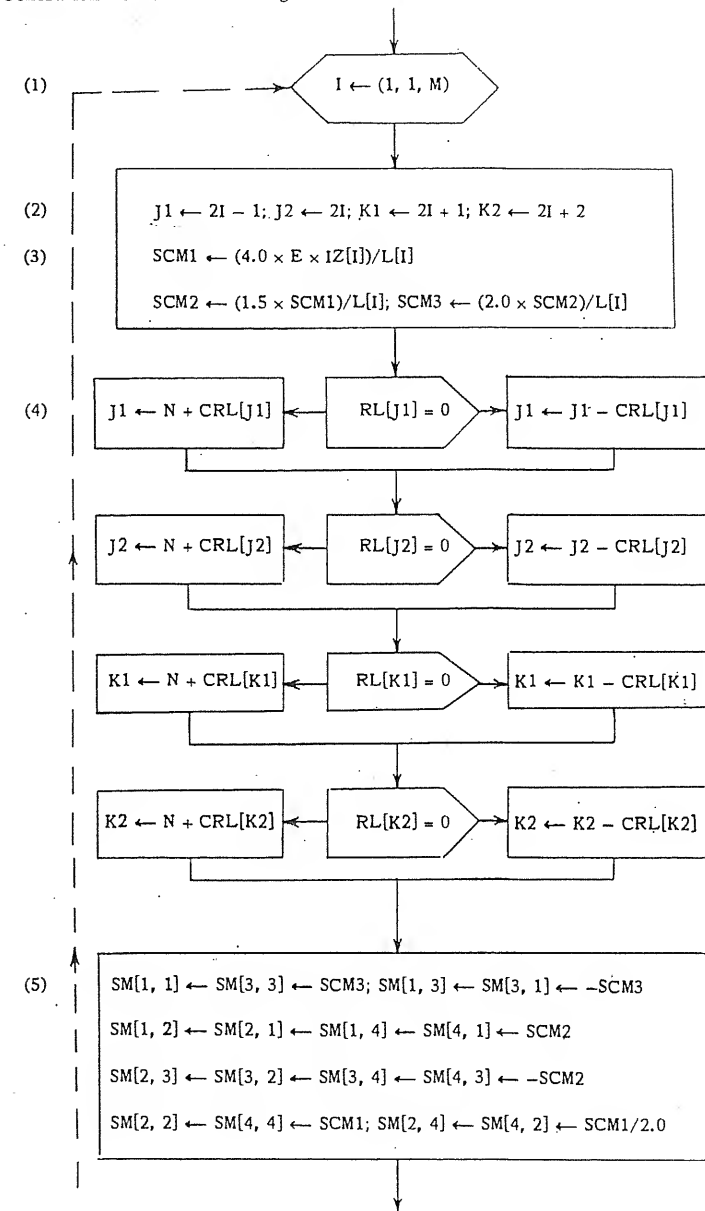


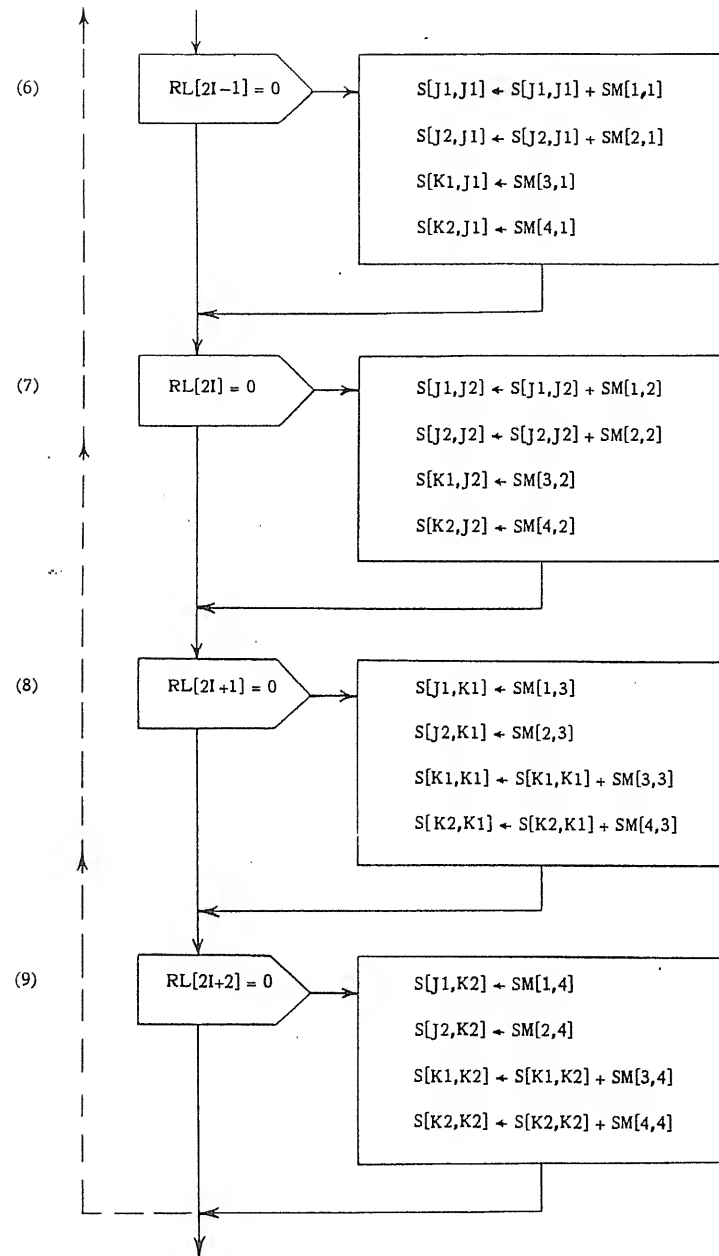
c. Lista de restricciones de nudo; lista de restricciones acumulativas



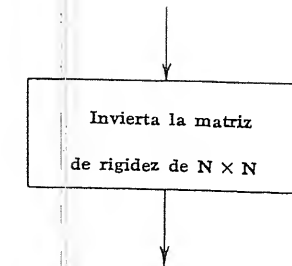
2. Matriz de rigidez de la estructura

a. Generación de la matriz de rigidez



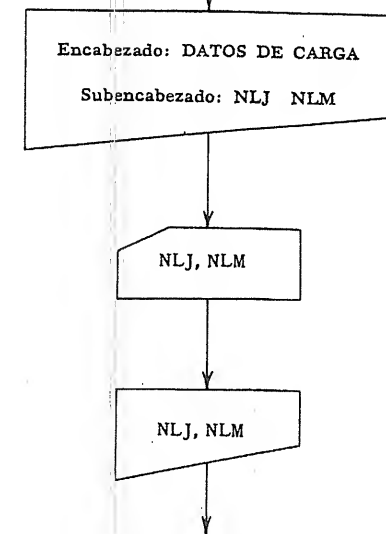


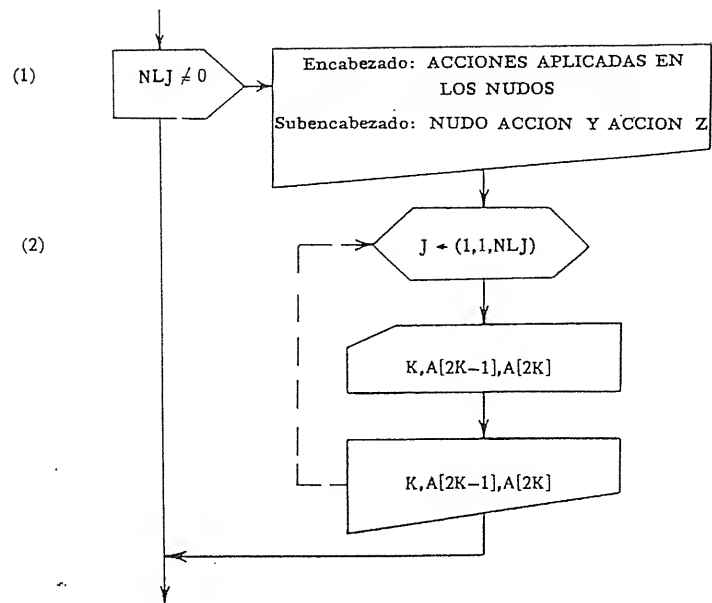
b. Inversión de la matriz de rigidez



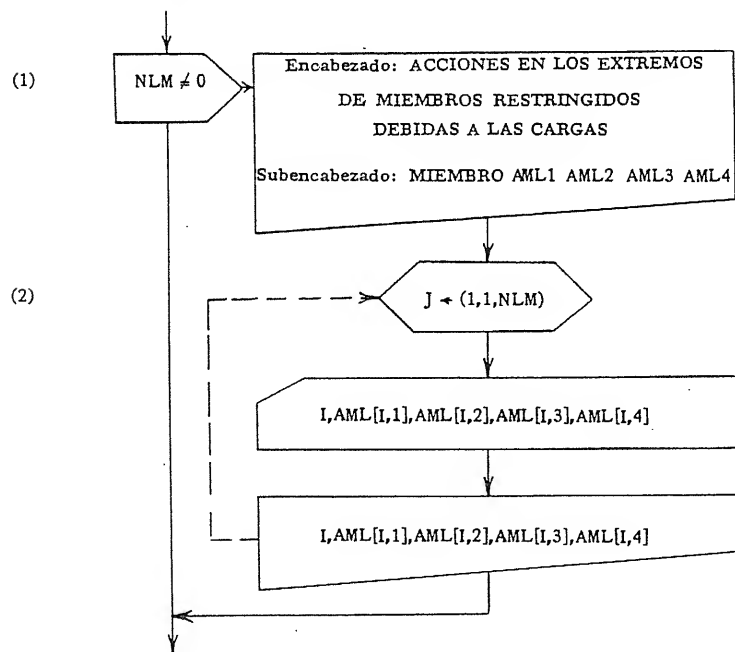
3. Entrada e impresión de datos de carga

a. Números de nudos y miembros cargados



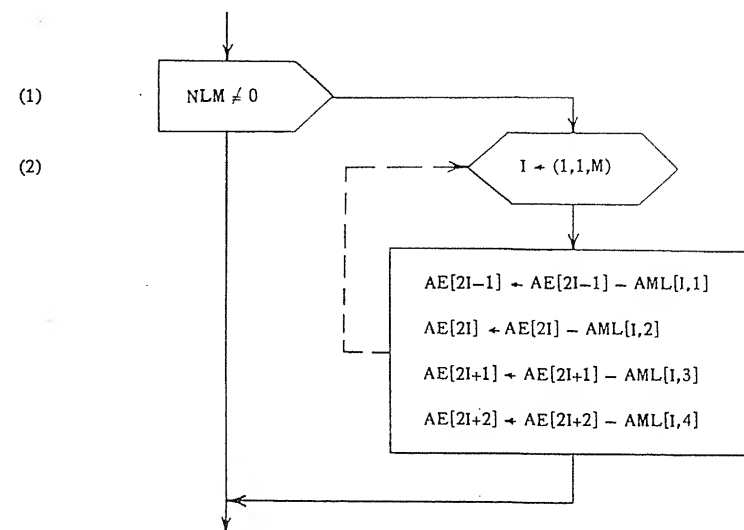


c. Acciones en los extremos de miembros restringidos debidas a las cargas

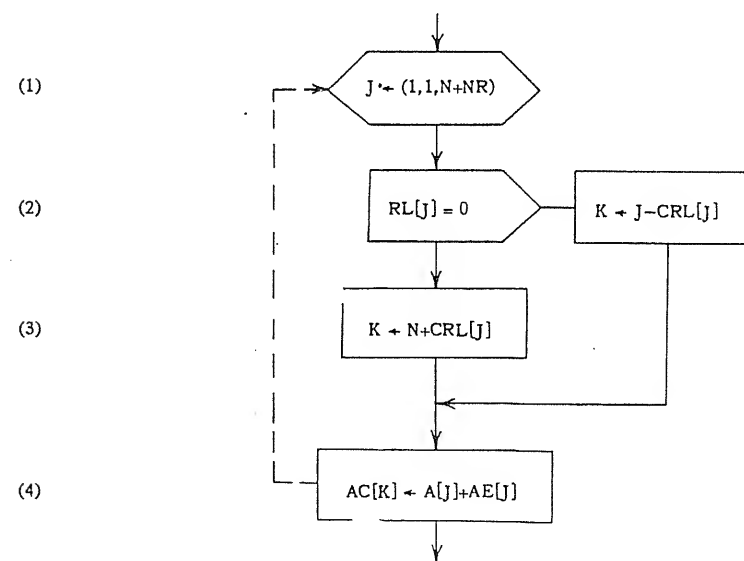


4. Construcción de vectores asociados con cargas

a. Cargas de nudo equivalentes

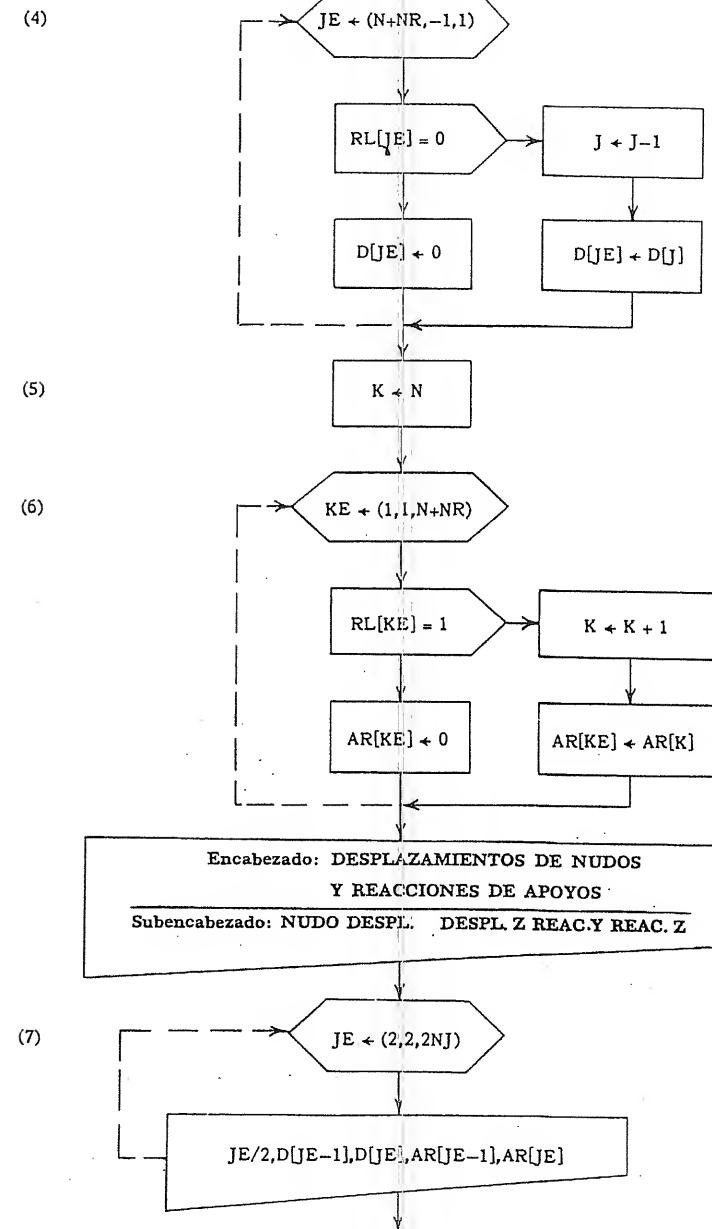
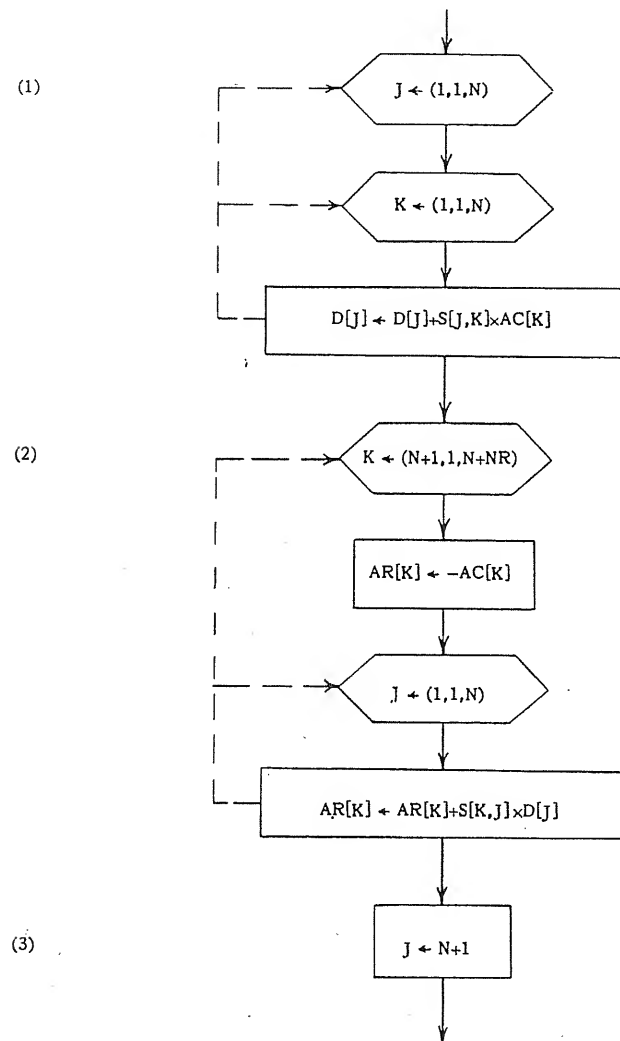


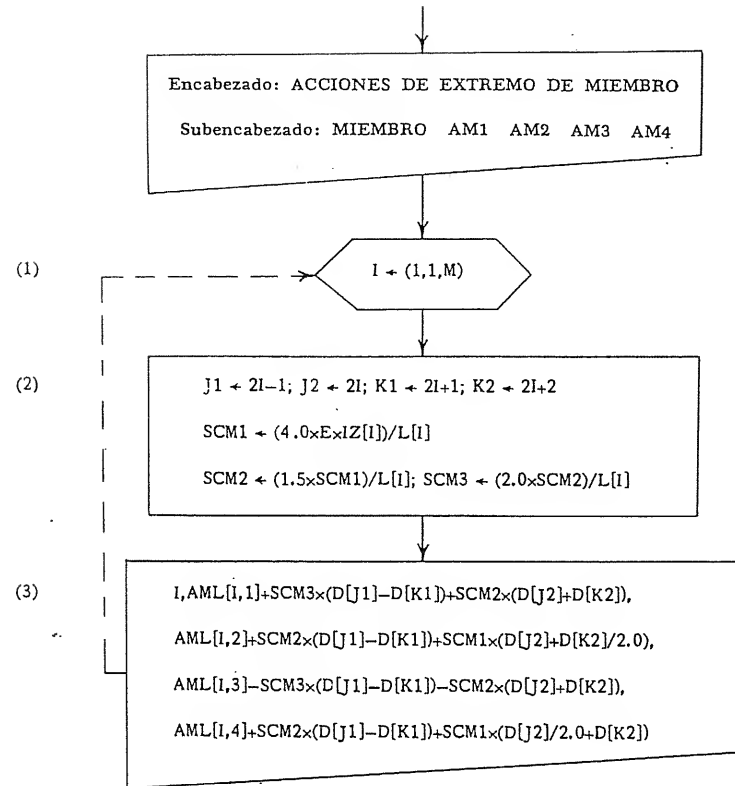
b. Cargas de nudo combinadas



5. Cálculo y salida de resultados

a. Desplazamientos de nudos y reacciones de apoyos





Explicación del diagrama de flujo para el programa de una viga continua

- | Item No. | Observaciones |
|-----------|---|
| 1. a. (1) | Se imprime un título apropiado para el programa. |
| (2) | Se imprimen un título y un subtítulo para los datos de la estructura. |
| (3) | Se lee dentro del almacenamiento la primera tarjeta de datos, que contiene los parámetros de la estructura y el módulo de elasticidad (véase la Tabla 5-4). |
| (4) | Se calculan el número de nudos y el número de grados de libertad. |
| (5) | Se imprimen bajo los títulos apropiados los datos de entrada, aumentados por N. |
| b. (1) | Se imprimen para la información de miembro un título y un subtítulo. |
| (2) | En una manifestación de control iterativo se leen las M tarjetas que contienen las designaciones y propiedades de miembro (véase la Tabla 5-4). La misma información también se imprime bajo los subtítulos apropiados. |
| c. (1) | En una manifestación de control iterativo se leen las NRJ tarjetas que contienen las designaciones de nudo y restricciones de nudo (véase la Tabla 5-4). También se imprime la misma información. |
| (2) | En esta parte del programa se calcula la lista de restricciones acumulativas CRL. Esta lista consiste en las sumas acumulativas de los números en la lista de restricciones RL. Como ejemplo, se |

muestra la lista de restricciones para el problema del Art. 4.9 en la Tabla 4-8. La lista correspondiente a las restricciones acumulativas consiste de lo siguiente:

$$CRL = \{1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5\}$$

Nótese que el primer elemento de CRL es siempre igual al primer elemento de RL, y el último elemento de CRL es numéricamente igual al número total de restricciones NR. El primer paso en la formación de CRL es asignar RL[1] a CRL[1].

- (3) En una manifestación de control iterativo, se calculan en orden todos los otros elementos de CRL.
2. a. (1) Manifestación de control iterativo en miembros, para M miembros.
- (2) Los dos posibles desplazamientos para el nudo a la izquierda (J1 y J2) y para el nudo a la derecha (K1 y K2) del miembro I se indican en orden ascendiente de acuerdo con el sistema de numeración para los miembros.
- (3) Se calculan las tres constantes de rigidez para el miembro I y se almacenan a fin de evitar la repetición de estas expresiones cuando se forme la matriz de rigidez de miembro. Estas constantes son:

$$SCM1 = \frac{4EI_z}{L} \quad SCM2 = \frac{6EI_z}{L^2} \quad SCM3 = \frac{12EI_z}{L^3}$$

- (4) Usando como guía la lista de restricciones de nudo, se vuelven a indicar los dos posibles desplazamientos para los nudos en cada extremo del miembro, ya sea que los nudos se puedan mover o no. Esto es, si cierto desplazamiento es libre de ocurrir, el índice se disminuye por el correspondiente elemento de CRL, colocándolo en el orden apropiado entre los grados de libertad. Por otro lado, si un desplazamiento no es libre de ocurrir, el índice se vuelve a poner a N más el correspondiente elemento de CRL, colocándolo en el orden apropiado entre las restricciones de apoyo.
- (5) La matriz de rigidez de miembro de 4×4 SM para el miembro I se forma (véase la Tabla 4-2, Art. 4.3) usando las constantes de rigidez previamente valuadas.
- (6) Si el índice $2I - 1$ (el valor original de J1) corresponde a los grados de libertad, la primera columna de SM se cambia a la matriz de rigidez de nudo para la estructura (véanse las Ecs. 4-13). Sin embargo, si $2I - 1$ corresponde a una restricción, la primera columna de SM no es tomada en cuenta. Por este artificio únicamente se forman las porciones requeridas de la matriz de la rigidez total de nudo. (El resultado es un arreglo rectangular consistente de la matriz S en la parte superior y de la matriz S_{RD} en la parte inferior. Sin embargo, en el programa el arreglo total se identifica como S). Los elementos de S, que incluyen el empalme de J1 y J2, son acumulativos porque, en general, reciben contribuciones de más de un miembro. Por otro lado, los elementos de S que incluyen el empalme de J1 con K1 y K2 son valores únicos.
- (7) Similar a (6), pero para $2I$, que es el valor original de J2 (véanse las Ecs. 4-14).
- (8) Similar a (6), pero para $2I + 1$, que es el valor original de K1 (véanse las Ecs. 4-15).

- (9) Similar a (6), pero para $2I + 2$, que es el valor original de $K2$ (véanse las Ecs. 4-16).
- b. La parte superior del arreglo rectangular (del orden de $N \times N$) se invierte, usando un procedimiento.
3. a. Se leen y se imprimen los números de los nudos cargados y miembros cargados (véase la Tabla 5-4).
- b. (1) Si el número de nudos cargados no es igual a cero, se deben leer e imprimir las acciones aplicadas en los nudos.
- (2) En una manifestación de control iterativa se leen e imprimen las NLJ tarjetas (véase la Tabla 5-4) que contienen las designaciones de nudo y las acciones aplicadas en los nudos (véase la Fig. 4-11).
- c. (1) Si el número de miembros cargados no es igual a cero, se deben leer e imprimir los datos concernientes a las cargas sobre los miembros.
- (2) En una manifestación de control iterativa se leen e imprimen las NLM tarjetas (véase la Tabla 5-4) que contienen las designaciones de miembro y las acciones en los extremos de los miembros restringidos debidas a las cargas (véase la Fig. 4-12).
4. a. (1) Si NLM no es igual a cero, las cargas equivalentes de nudo se deben calcular.
- (2) En una manifestación de control iterativa para M miembros, las contribuciones a AE de cada miembro se identifican y se cambian (véanse las Ecs. 4-20). Nótese que el cálculo de las cargas equivalentes de nudo también considera los valores negativos de las acciones de empotramiento para los miembros. Cada una de las manifestaciones para generar a un elemento de AE consiste de una suma de contribuciones de más de un miembro, porque únicamente los puntos de extremo de la viga continua reciben contribuciones de un solo miembro.
- b. (1) Manifestación de control iterativa sobre todos los posibles desplazamientos de nudo ($N + NR$ desplazamientos).
- (2) Si el posible desplazamiento J ésimo no está restringido, el índice K para un elemento de AC se coloca en la posición correcta en la primera parte del vector: $K \leftarrow J - CRL[J]$.
- (3) Por otro lado, el posible desplazamiento J ésimo está restringido; por lo tanto, el índice K se coloca en la posición correcta en la parte última del vector: $K \leftarrow N + CRL[J]$.
- (4) Los elementos de AC se calculan como las sumas de los elementos de A y AE . Debido al hecho de que los índices han sido colocados de nuevo según se describió arriba, se forma el vector AC en la forma dada por la Ec. (4-6).
5. a. (1) Dentro de dos manifestaciones de control iterativas los desplazamientos se calculan por multiplicaciones matriciales, usando la Ec. (4-8).
- (2) Dentro de dos manifestaciones de control iterativas, las reacciones de apoyo se calculan por álgebra matricial, usando la Ec. (4-4).
- (3) En preparación para expandir el vector desplazamiento, J se afecta por $N + 1$.
- (4) En una manifestación de control iterativa con valores descendientes de la variable JE , el vector desplazamiento se extiende de acuerdo con los grados de libertad indicados por la lista de restricciones

de nudo. J es el índice para la forma condensada de D ; JE es el índice para la forma extendida de D (definida en el Cap. 4 como D_J).

- (5) En preparación para extender el vector de reacciones de apoyo, K se afecta por N .
- (6) En una manifestación de control iterativa, se extiende el vector de reacciones de apoyo de acuerdo con las restricciones anotadas por la lista de restricciones de nudo. K es el índice para la forma condensada de AR , y KE es el índice para la forma extendida de AR .
- (7) En una manifestación de control iterativa para todos los nudos, el número de nudo, los desplazamientos de nudo y las reacciones de apoyo se imprimen en orden.
- b. (1) Manifestación de control iterativa sobre miembros, para M miembros.
- (2) Se calcula la misma información de miembro como en los pasos 2a(2) y (3) previamente dados.
- (3) Para cada miembro se imprime el número de miembro y se calculan e imprimen las cuatro acciones de extremo del miembro. Los cálculos se hacen en la base de un miembro a la vez, usando las Ecs. (4-23). Por lo tanto, todos los resultados han sido impresos y el programa está completo.

TABLA 5-5. TARJETAS DE DATOS PARA EL EJEMPLO DE LA VIGA CONTINUA

Tipo de datos		Datos numéricos en tarjetas					Tarjeta No.
Datos de la estructura	(a)	3	5	3	10000.0		1
	(b)	1	100.0	1000.0			2
		2	100.0	2000.0			3
		3	200.0	2000.0			4
	(c)	1	1	1			5
		3	1	0			6
		4	1	1			7
Datos de carga	(a)	2	3				8
	(b)	2	-10.0	1000.0			9
		3	-10.0	0			10
	(c)	1	10.0	250.0	10.0	-250.0	11
		2	10.0	250.0	10.0	-250.0	12
		3	10.0	333.333	10.0	-333.333	13

EJEMPLO: La estructura de viga continua analizada en el Art. 4.9 (véase la Fig. 4-13) se presenta como ejemplo del uso de un programa de computación. Para los cálculos de la máquina se suponen los siguientes valores numéricos:

$$E = 10\,000 \text{ kips/plg}^2 \quad L = 100 \text{ plg} \quad P = 10 \text{ kips} \quad IZ = 1\,000 \text{ plg}^4$$

Los datos de entrada que se requieren para el programa de computación se resumen en la Tabla 5-5. El formato de las tarjetas sigue al que se describió en la Tabla 5-4, con las primeras siete tarjetas conteniendo los datos de la estructura y las últimas seis tarjetas conteniendo los datos de carga.

En la Tabla 5-6 se da el resultado del programa de computación.

5.5. Programa para una armadura plana. El programa presentado en este artículo lleva a cabo el análisis de armaduras planas por el método dado en el Art. 4.11. Los pasos en este programa son muy similares a los del programa de una viga continua (véase el Art. 5.4), debido al hecho de que ambos tipos de estructuras tienen dos posibles desplazamientos en cada nudo. Por lo tanto, a fin de evitar la repetición, la siguiente discusión destaca aquellas partes del programa que son diferentes del programa de la viga continua.

Los datos de entrada que se requieren para el programa de la armadura plana se muestran en la Tabla 5-7, la que tiene la misma forma de la Tabla 5-4 para vigas continuas. La primera tarjeta escrita en la tabla contiene los parámetros de la estructura (esto es, los números de miembros, nudos, restricciones y nudos restringidos) y el módulo de elasticidad. En seguida, se requiere un grupo de tarjetas (un total de NJ tarjetas) para especificar las coordenadas de los nudos. Cada tarjeta de este grupo contiene un número de nudo J , la coordenada $X[J]$ del nudo en el eje x y la coordenada $Y[J]$ en el eje y del nudo.

En cada una de las tarjetas que se refieren a las designaciones de miembro y a las propiedades, primero se enumera el miembro I y es seguido por el nudo j número $JJ[I]$ y el nudo k número $JK[I]$ para los dos extremos del miembro. La elección de cuál extremo del miembro es j y cuál es k la hace arbitrariamente el programista. El último ítem en cada tarjeta es el área $AX[I]$ de la sección transversal del miembro.

Las tarjetas de datos para la lista de las restricciones de nudo son similares a las del programa de la viga continua, excepto que los tipos de restricciones son diferentes. Para la armadura plana, los términos $RL[2K - 1]$ y $RL[2K]$ indican las restricciones contra translación en las direcciones de x y y , respectivamente, en el nudo k . De modo similar, las tarjetas para los datos de carga son simbólicas.

TABLA 5-6. RESULTADO DEL PROGRAMA DE COMPUTACION PARA EL EJEMPLO DE LA VIGA CONTINUA

ANÁLISIS DE VIGAS CONTINUAS

DATOS DE LA ESTRUCTURA

M	N	NR	NRJ	E
3	3	5	3	10000.0

DESIGNACION DE MIEMBROS, LONGITUDES Y MOMENTOS DE INERCIA

MIEMBRO	L	IZ
1	100.0	1000.0
2	100.0	2000.0
3	200.0	2000.0

RESTRICCIONES DE NUDO

NUDO	RESTN. Y	RESTN. Z
1	1	1
3	1	0
4	1	1

DATOS DE CARGA

NLJ	NLM
2	3

ACCIONES APLICADAS EN LOS NUDOS

NUDO	ACCION EN Y	ACCION EN Z
2	-10.0	1000.0
3	-10.0	0

ACCIONES EN LOS EXTREMOS DE MIEMBROS RESTRINGIDOS DEBIDAS A LAS CARGAS

MIEMBRO	AML1	AML2	AML3	AML4
1	10.0	250.0	10.0	-250.0
2	10.0	250.0	10.0	-250.0
3	10.0	333.333	10.0	-333.333

DESPLAZAMIENTOS DE NUDO Y REACCIONES DE APOYO

NUDO	DESPL. Y	DESPL. Z	REAC. Y	REAC. Z
1	0	0	33.06	1281.75
2	-0.1316	0.001210	0	0
3	0	0.000843	39.47	0
4	0	0	7.47	-164.68

ACCIONES DE EXTREMO DE LOS MIEMBROS

MIEMBRO	AM1	AM2	AM3	AM4
1	33.06	1281.75	-13.06	1023.81
2	3.06	-23.81	16.94	-670.64
3	12.53	670.64	7.47	-164.68

mente las mismas que para el programa de una viga continua, pero las acciones aplicadas A consisten de las fuerzas en las direcciones de x y y , y las acciones AML consisten de fuerzas en las direcciones de x_M y y_M en los extremos de los miembros.

TABLA 5-7. PREPARACION DE DATOS PARA EL PROGRAMA DE UNA ARMADURA PLANA

Datos		Número de tarjetas	Items en las tarjetas de datos
Datos de la estructura	(a) Parámetros de la estructura y módulo de elasticidad	1	M NJ NR NRJ E
	(b) Coordenadas de los nudos	NJ	J X(J) Y(J)
	(c) Designaciones y propiedades de miembro	M	I JJ(I) JK(I) AX(I)
	(d) Lista de restricciones de nudo	NRJ	K RL(2K - 1) RL(2K)
Datos de carga	(a) Números de nudos y miembros cargados	1	NLJ NLM
	(b) Acciones aplicadas en los nudos	NLJ	K A(2K - 1) A(2K)
	(c) Acciones en los extremos de miembros restringidos debidas a las cargas	NLM	I AML(I, 1) AML(I, 2) AML(I, 3) AML(I, 4)

Los identificadores del tipo de números enteros en el programa de la armadura plana son los mismos que en el programa de la viga continua, con la adición de las designaciones de nudo JJ y JK . Las variables suscritas, para las que el almacenamiento se debe reservar, son las siguientes:

$X[], Y[], JJ[], JK[], AX[], L[], CX[], CY[], RL[], CRL[],$

$A[], AML[], AE[], AC[], SMD[], S[], D[], AR[]$

Explicación del diagrama de flujo para el programa de la armadura plana

Item No.

Observaciones

1. b. En una manifestación de control iterativa, se leen las NJ tarjetas que contienen los números de nudo y las coordenadas x y y de los

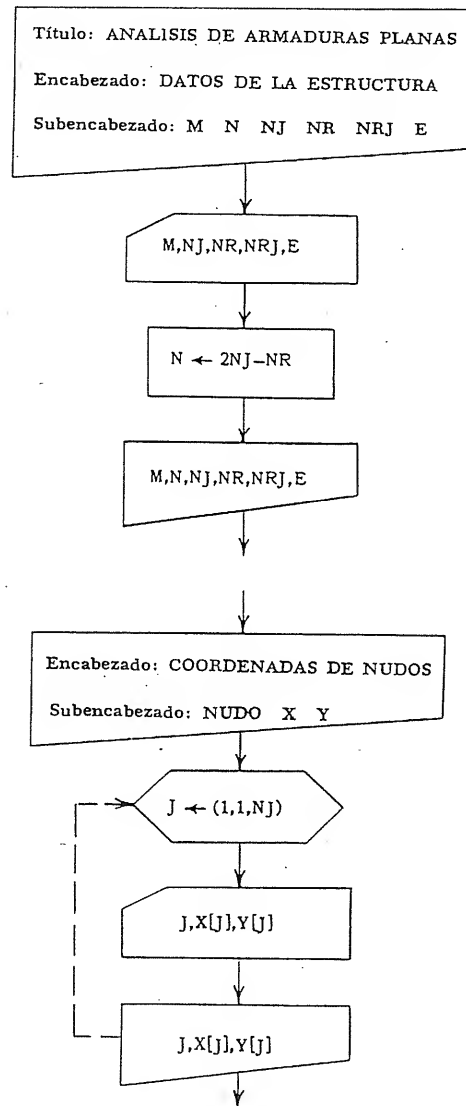
nudos (véase la Tabla 5-7). La misma información también se imprime.

- c. (1) En una manifestación de control iterativa, se lee una serie de M tarjetas, cada una de las cuales contiene las designaciones de miembro y el área de la sección transversal para un miembro dado (véase la Tabla 5-7).
- (2) Se calcula la componente en x de la longitud del miembro (llamada en el programa XCL) tomando la diferencia entre las coordenadas x de los nudos en los extremos del miembro. Similarmemente, se calcula la componente en y (YCL) de la longitud como la diferencia entre las coordenadas y .
- (3) Se calcula la longitud real del miembro como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes en x y y de la longitud.
- (4) Se calculan los cosenos directores en x y y del miembro, dividiendo las componentes en x y y de la longitud entre la longitud del miembro mismo.
- (5) Se imprime para cada miembro la información de entrada más la longitud y los cosenos directores.
2. a. (1) Una manifestación de control iterativa en miembros, para M miembros.
- (2) Los dos posibles desplazamientos se indican para el nudo J ($J1$ y $J2$) y para el nudo K ($K1$ y $K2$) del miembro I .
- (3) Se calcula la constante de rigidez para deformación axial y se almacena a fin de evitar repetición de esta expresión cuando se forme la matriz de rigidez de miembro.
- (4) A los dos posibles desplazamientos de los nudos en cada extremo del miembro se les vuelve a poner índice por el mismo método usado en el programa de una viga continua.
- (5) Se forma para el miembro I la matriz de rigidez de miembro SMD de 4×4 (véase la Tabla 4-15, Art. 4.10).
4. a. (1) Si NLM no es igual a cero, se deben calcular las cargas equivalentes de nudo.
- (2) En una manifestación de control iterativa, para M miembros, se identifican y se cambian las contribuciones a AE de cada miembro (véanse las Ecs. 4-33).
5. b. (1) Se calcula, para cada miembro, la misma información como en las Secs. 2a(2) y (3), previamente dadas.
- (2) Se imprime el número de miembros y se calculan e imprimen, usando las Ecs. (4-34), las cuatro acciones de extremo de miembro.

DIAGRAMA DE FLUJO PARA UN PROGRAMA DE ARMADURA PLANA

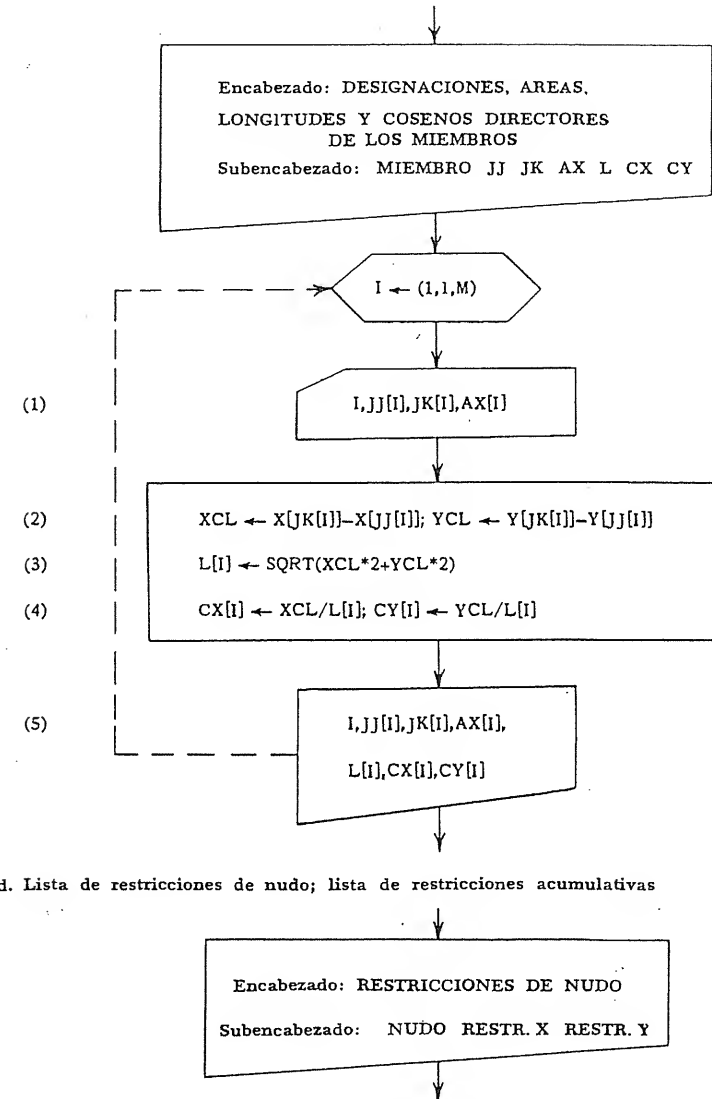
1. Datos de entrada y de impresión de la estructura

a. Parámetros de la estructura y módulo elástico



b. Coordenadas de nudo

c. Designaciones y propiedades de los miembros

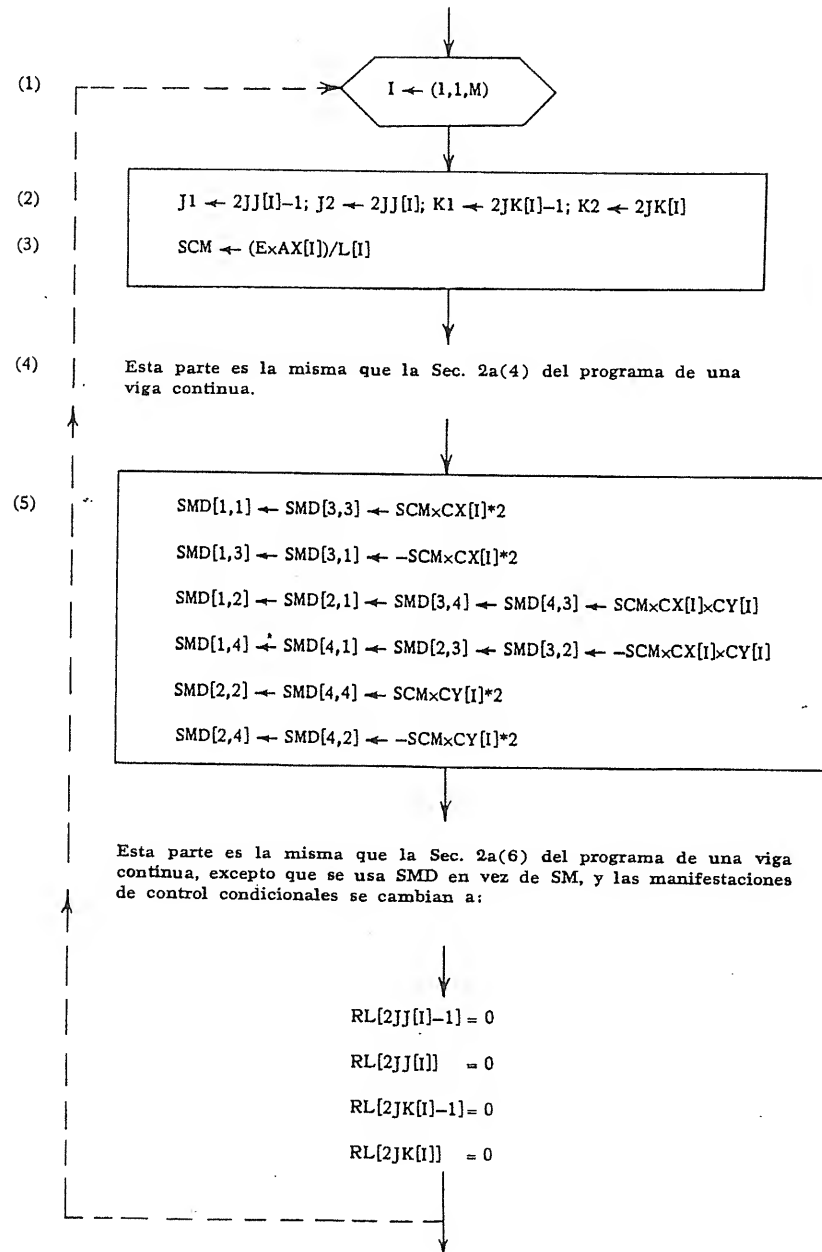


d. Lista de restricciones de nudo; lista de restricciones acumulativas

La parte restante de esta sección es la misma que en la Sec. 1c del programa de una viga continua.

2. Matriz de rigidez de la estructura

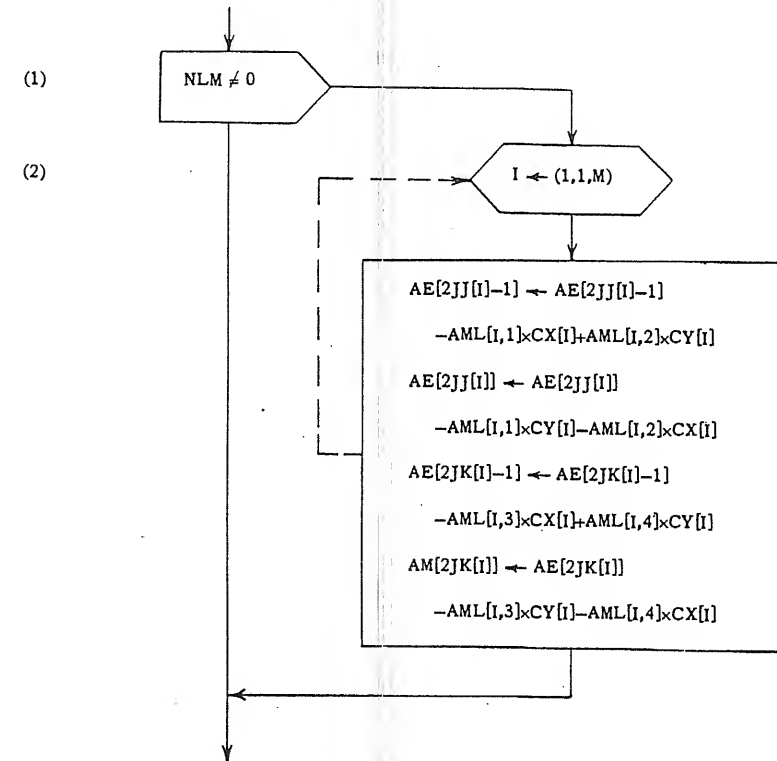
a. Generación de la matriz de rigidez



Las Secs. 2b y 3a, b, c son iguales a las secciones correspondientes en el programa de una viga continua, excepto que los encabezados ACCION Y y ACCION Z se cambian a ACCION X y ACCION Y, respectivamente.

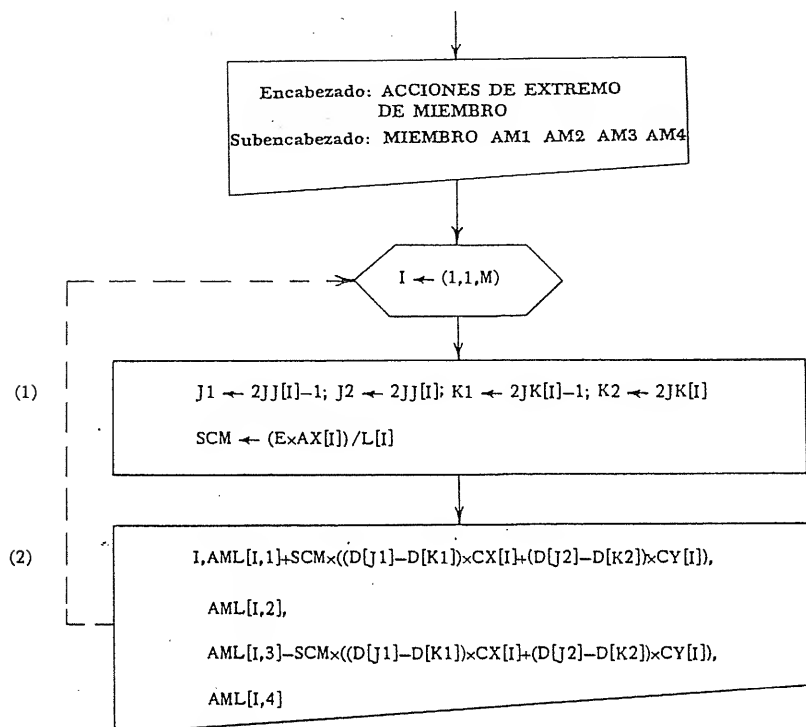
4. Construcción de vectores asociados con cargas

a. Cargas de nudo equivalentes



Las Secs. 4b y 5a son las mismas que en el programa de una viga continua, excepto que los subencabezados DESPL. Y, DESPL. Z, REAC. Y y REAC. Z, se cambian a DESPL. X, DESPL. Y, REAC. X y REAC. Y, respectivamente.

5b. Acciones de extremo de miembro



EJEMPLO: El siguiente ejemplo muestra el análisis de la estructura de armadura plana del Art. 4.12 (véase la Fig. 4-23), usando el programa de computación. Se supone que los siguientes valores numéricos son los parámetros del problema:

$$E = 10\,000 \text{ kips/plg}^2 \quad L = 100 \text{ plg} \quad P = 10 \text{ kips} \quad AX = 10 \text{ plg}^2$$

La Tabla 5-8 contiene los datos de entrada requeridos para el programa; la Tabla 5-9 muestra el programa de computación a su salida.

5.6. Programa para un marco plano. Este artículo contiene un programa para el análisis de marcos planos rígidos utilizando los conceptos descritos en el Art. 4.17. Ya que este tipo de estructura tiene tres posibles desplazamientos en cada nudo, los pasos detallados en el programa serán algo diferentes de los programas de vigas continuas y armaduras planas. Sin embargo, toda la metodología es la misma y el lector se dará cuenta que el único cambio en ciertas manifestaciones es que el número 2, el cual representa el número de desplazamientos posibles de un nudo, se reemplaza por el número 3.

La Tabla 5-10 resume los datos de entrada que se requieren para el programa de un marco plano. Esta tabla contiene información

TABLA 5-8. TARJETAS DE DATOS PARA EL EJEMPLO DE LA ARMADURA PLANA

Tipo de datos		Datos numéricos en tarjetas					Tarjeta No.
Datos de la estructura	(a)	6	4	4	2	10000.0	1
	(b)	1	0		80.0		2
		2	60.0		80.0		3
		3	0		0		4
		4	60.0		0		5
	(c)	1	1	2	6.0		6
		2	3	4	6.0		7
		3	3	1	8.0		8
		4	4	2	8.0		9
		5	1	4	10.0		10
		6	3	2	10.0		11
	(d)	3	1	1			12
		4	1	1			13
Datos de carga	(a)	1	4				14
	(b)	2	20.0		10.0		15
	(c)	1	0	-20.0	0	20.0	16
		2	0	10.0	0	10.0	17
		3	0	10.0	0	10.0	18
		4	5.0	5.0	5.0	5.0	19

muy similar a la de la Tabla 5-7 para armaduras planas. Sin embargo, se requiere una propiedad adicional de miembro I_z (momento de inercia de la sección transversal) en cada una de las tarjetas que se relacionan con las designaciones de miembro y propiedades.

Cada una de las tarjetas en la serie de restricciones de nudo contienen un número de nudo K y tres números clave que indican las condiciones de restricción en cada nudo. Los términos $RL[3K - 2]$, $RL[3K - 1]$ y $RL[3K]$ indican las restricciones contra translación en las direcciones de x y y y rotación en el sentido de z , respectivamente, en el nudo k .

Cada tarjeta de cargas de nudo contiene un nudo número K y tres acciones aplicadas en ese nudo. Estas acciones son las fuerzas aplicadas en las direcciones de x y y y el par en el sentido de z . Además, cada tarjeta para cargas de miembro contiene un miembro

TABLA 5-9. PROGRAMA DE COMPUTACION A SU SALIDA PARA EL EJEMPLO DE LA ARMADURA PLANA

ANALISIS DE ARMADURAS PLANAS

DATOS DE LA ESTRUCTURA

M	N	NJ	NR	NRJ	E
6	4	4	4	2	10000.0

COORDENADAS DE NUDOS

NUDO	X	Y
1	0	80.0
2	60.0	80.0
3	0	0
4	60.0	0

DESIGNACIONES DE MIEMBRO, AREAS, LONGITUDES Y COSENOS DIRECTORES

MIEMBRO	JJ	JK	AX	L	CX	CY
1	1	2	6.0	60.0	1.0	0
2	3	4	6.0	60.0	1.0	0
3	3	1	8.0	80.0	0	1.0
4	4	2	8.0	80.0	0	1.0
5	1	4	10.0	100.0	0.6	-0.8
6	3	2	10.0	100.0	0.6	0.8

RESTRICCIONES DE NUDO

NUDO	RESTR. X	RESTR. Y
3	1	1
4	1	1

DATOS DE CARGA

NLJ	NLM
1	4

ACCIONES APLICADAS EN LOS NUDOS

NUDO	ACCION EN X	ACCION EN Y
2	20.0	10.0

TABLA 5-9 (Continuación)

ACCIONES EN LOS EXTREMOS DE MIEMBROS RESTRINGIDOS DEBIDAS A LAS CARGAS

MIEMBRO	AML1	AML2	AML3	AML4
1	0	-20.0	0	20.0
2	0	10.0	0	10.0
3	0	10.0	0	10.0
4	5.0	5.0	5.0	5.0

DESPLAZAMIENTOS DE NUDO Y REACCIONES DE APOYO

NUDO	DESPL. EN X	DESPL. EN Y	REAC. EN X	REAC. EN Y
1	0.1000	0.04147	0	0
2	0.1061	-0.04020	0	0
3	0	0	-28.90	-56.67
4	0	0	-21.10	76.67

ACCIONES DE EXTREMO DE LOS MIEMBROS

MIEMBRO	AM1	AM2	AM3	AM4
1	-6.10	-20.00	6.10	20.00
2	0	10.00	0	10.00
3	-41.47	10.00	41.47	10.00
4	45.20	5.00	-35.20	5.00
5	26.83	0	-26.83	0
6	-31.50	0	31.50	0

número I y seis acciones en los extremos del miembro restringido. Estas acciones consisten de fuerzas en las direcciones de x_M y y_M y un par en el sentido de z_M (o z) en los extremos j y k , respectivamente.

Los identificadores del tipo de número entero en el programa del marco plano son los mismos que los del programa de la armadura plana, con la adición de los índices de desplazamiento $J3$ y $K3$. Además, las variables suscritas son también las mismas, excepto que $IZ[]$ se añade a la lista.

TABLA 5-10. PREPARACION DE DATOS PARA EL PROGRAMA DE MARCO PLANO

Datos		Número de tarjetas	Items en las tarjetas de datos
Datos de la estructura	(a) Parámetros de la estructura y módulo de elasticidad	1	M NJ NR NRJ E
	(b) Coordenadas de nudos	NJ	J X[J] Y[J]
	(c) Designaciones y propiedades de miembros	M	I JJ[I] JK[I] AX[I] IZ[I]
	(d) Lista de restricciones de nudo	NRJ	K RL[3K - 2] RL[3K - 1] RL[3K]
Datos de carga	(a) Números de nudos y miembros cargados	1	NLJ NLM
	(b) Acciones aplicadas en los nudos	NLJ	K A[3K - 2] A[3K - 1] A[3K]
	(c) Acciones en los extremos de miembros restringidos debidas a las cargas	NLM	I AML[I, 1] AML[I, 2] AML[I, 3] AML[I, 4] AML[I, 5] AML[I, 6]

Item No.

Observaciones

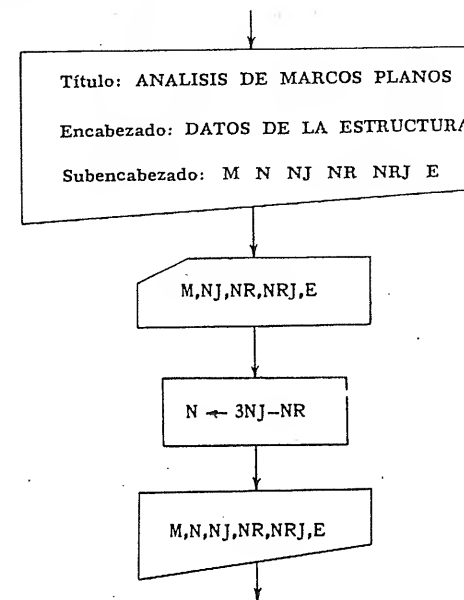
2. a. (1) Manifestación de control iterativa en miembros, para M miembros.
 (2) Los tres posibles desplazamientos se indican para el nudo J ($J1$, $J2$ y $J3$) y el nudo K ($K1$, $K2$ y $K3$) del miembro I .
 (3) Se calculan las cuatro constantes de rigidez para el miembro I y se almacenan a fin de evitar la repetición de estas expresiones cuando se forme la matriz de rigidez de miembro.
 (4) Usando como guía la lista de restricciones de nudo, a los tres posibles desplazamientos para los nudos en cada extremo del miembro se les vuelve a poner índice, según si los miembros se puedan mover o no. Las manifestaciones del programa requeridas para este propósito son similares a las del programa de una viga continua.
 (5) La matriz de rigidez de 6×6 SMD para el miembro I se genera (véase la Tabla 4-27, Art. 4.16).
 (6) Si el índice $3JJ[I] - 2$ (el valor original de $J1$) corresponde a un grado de libertad, la primera columna de SMD es cambiada a la

(Las observaciones continúan en la Pág. 404).

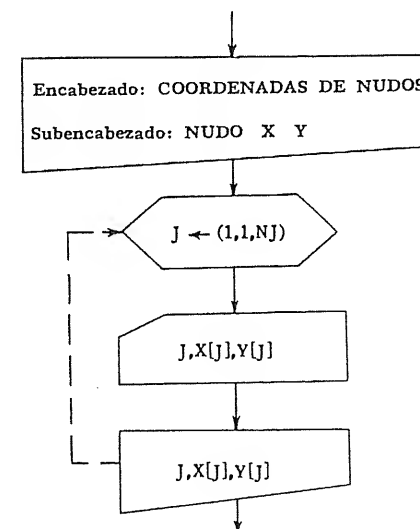
DIAGRAMA DE FLUJO PARA UN PROGRAMA DE MARCO PLANO

1. Datos de entrada y de impresión de la estructura

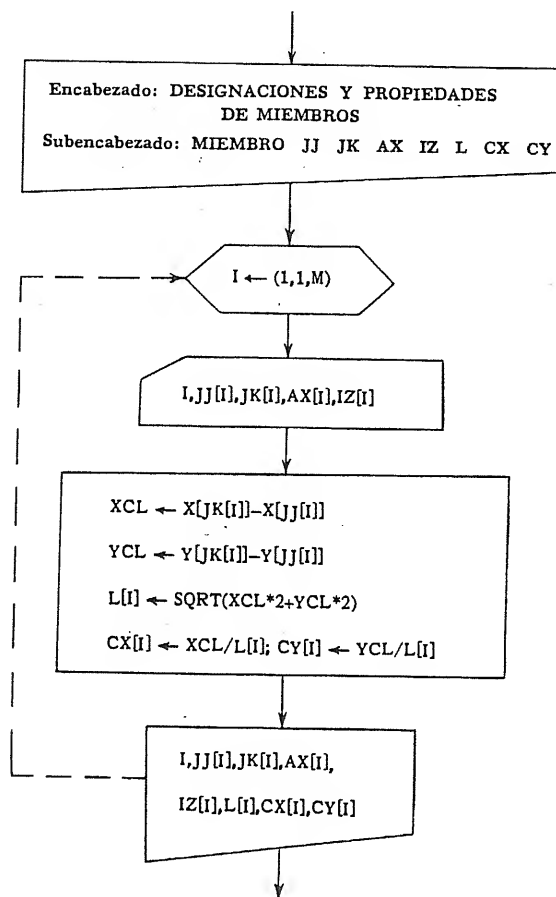
a. Parámetros de la estructura y módulo elástico



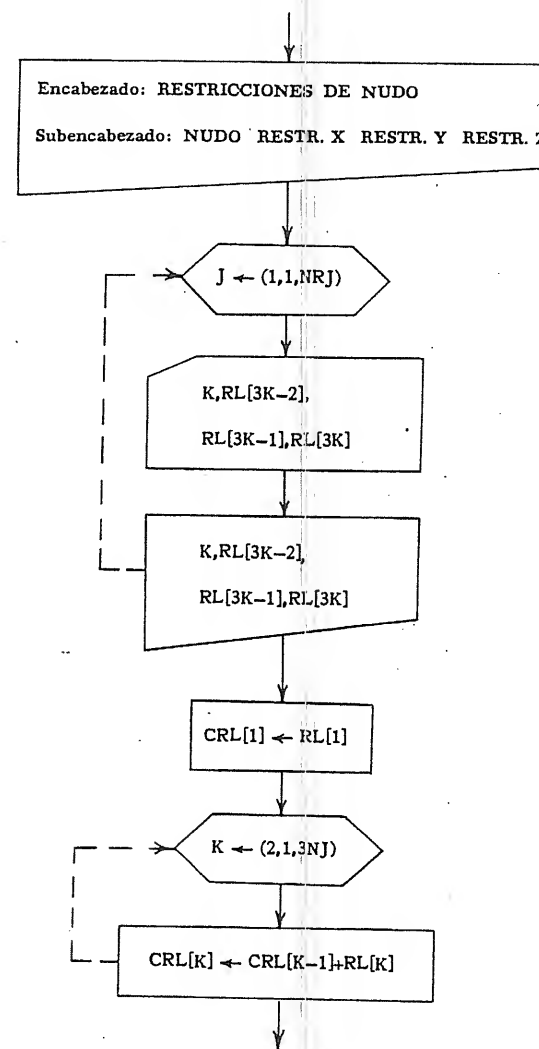
b. Coordenadas de nudo



c. Designaciones y propiedades de miembros

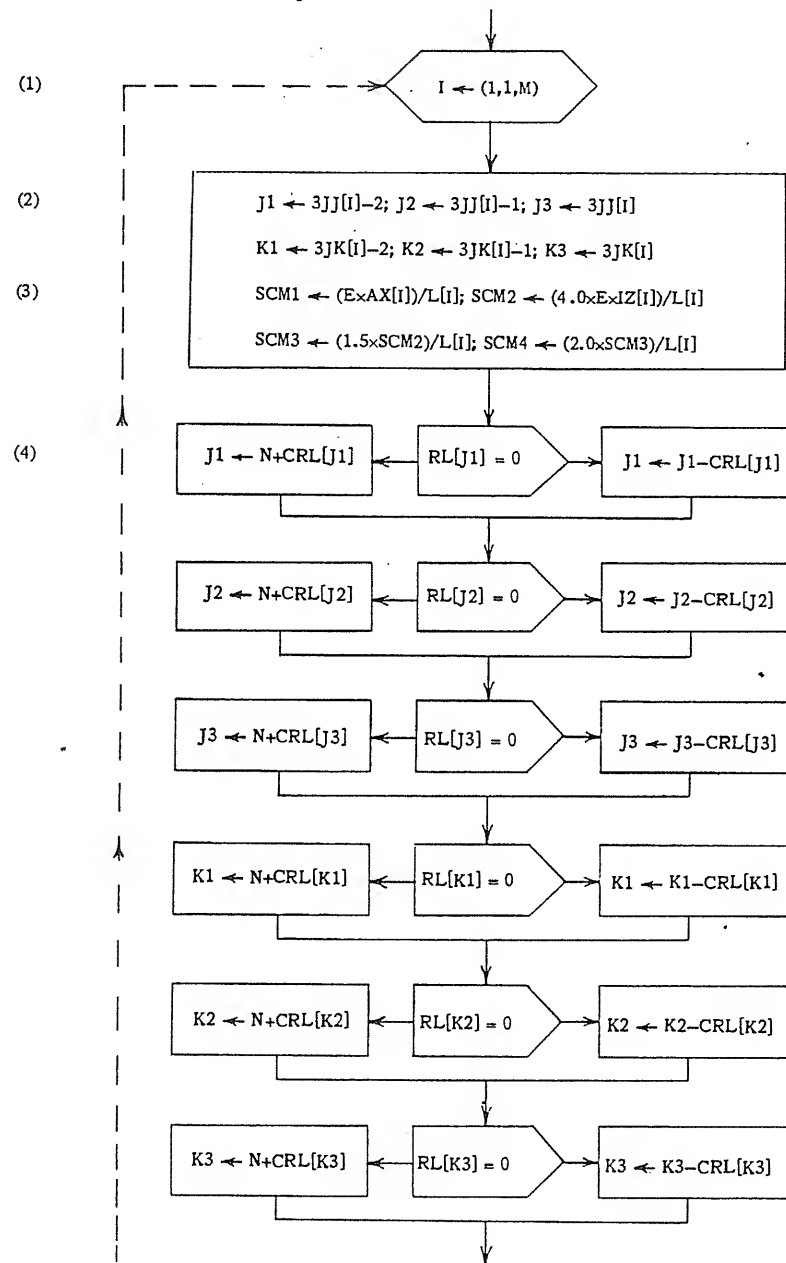


d. Lista de restricciones de nudo; lista de restricciones acumulativas



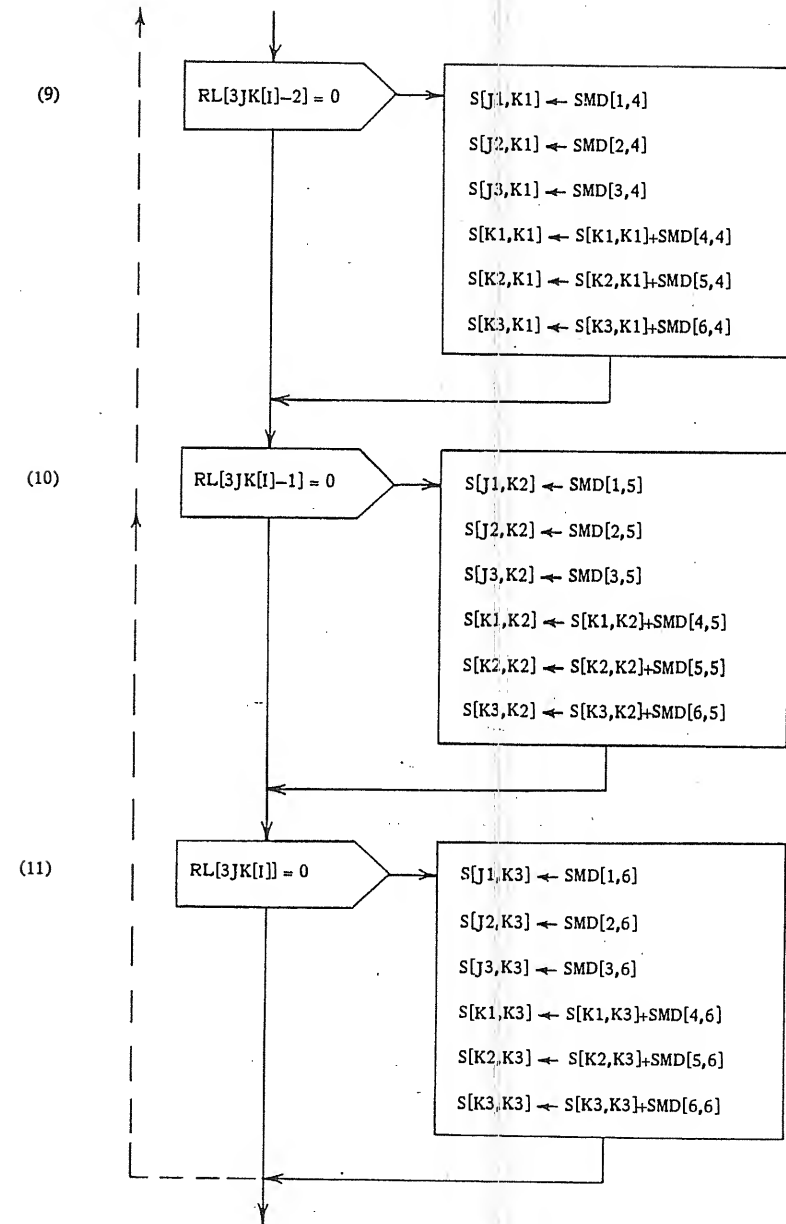
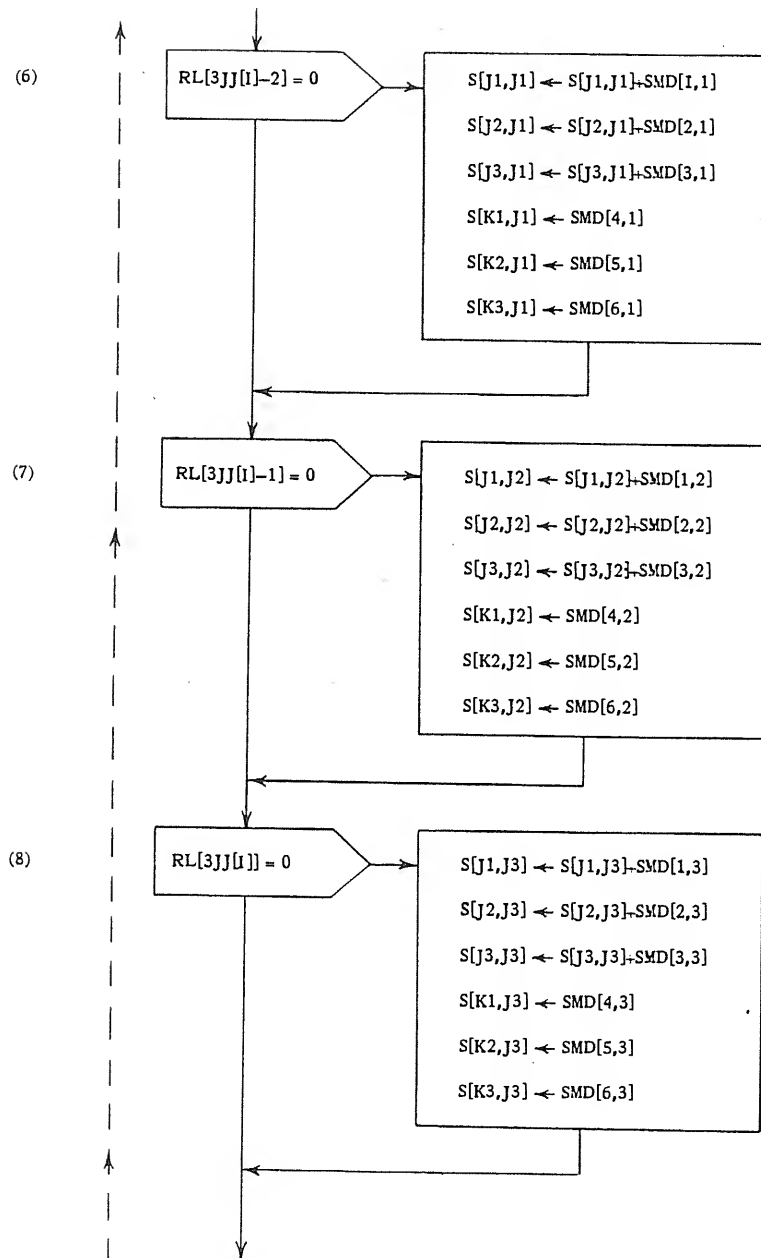
2. Matriz de rigidez de la estructura

a. Generación de la matriz de rigidez



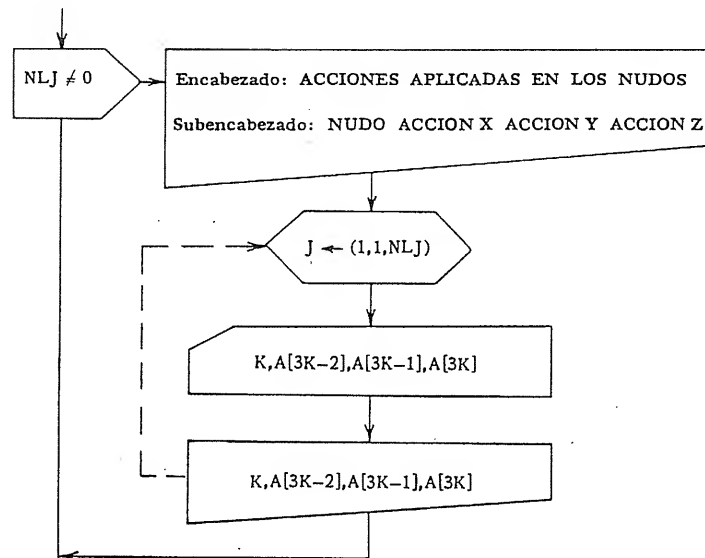
(5)

$SMD[1,1] \leftarrow SMD[4,4] \leftarrow SCM1 \times CX[I]^2 + SCM4 \times CY[I]^2$
 $SMD[1,4] \leftarrow SMD[4,1] \leftarrow -SMD[1,1]$
 $SMD[1,2] \leftarrow SMD[2,1] \leftarrow (SCM1 - SCM4) \times CX[I] \times CY[I]$
 $SMD[4,5] \leftarrow SMD[5,4] \leftarrow SMD[1,2]$
 $SMD[1,5] \leftarrow SMD[5,1] \leftarrow SMD[2,4] \leftarrow SMD[4,2] \leftarrow -SMD[1,2]$
 $SMD[1,3] \leftarrow SMD[3,1] \leftarrow SMD[1,6] \leftarrow SMD[6,1] \leftarrow -SCM3 \times CY[I]$
 $SMD[3,4] \leftarrow SMD[4,3] \leftarrow SMD[4,6] \leftarrow SMD[6,4] \leftarrow -SMD[1,3]$
 $SMD[2,2] \leftarrow SMD[5,5] \leftarrow SCM1 \times CY[I]^2 + SCM4 \times CX[I]^2$
 $SMD[2,5] \leftarrow SMD[5,2] \leftarrow -SMD[2,2]$
 $SMD[2,3] \leftarrow SMD[3,2] \leftarrow SMD[2,6] \leftarrow SMD[6,2] \leftarrow SCM3 \times CX[I]$
 $SMD[3,5] \leftarrow SMD[5,3] \leftarrow SMD[5,6] \leftarrow SMD[6,5] \leftarrow -SMD[2,3]$
 $SMD[3,3] \leftarrow SMD[6,6] \leftarrow SCM2$
 $SMD[3,6] \leftarrow SMD[6,3] \leftarrow SCM2/2.0$

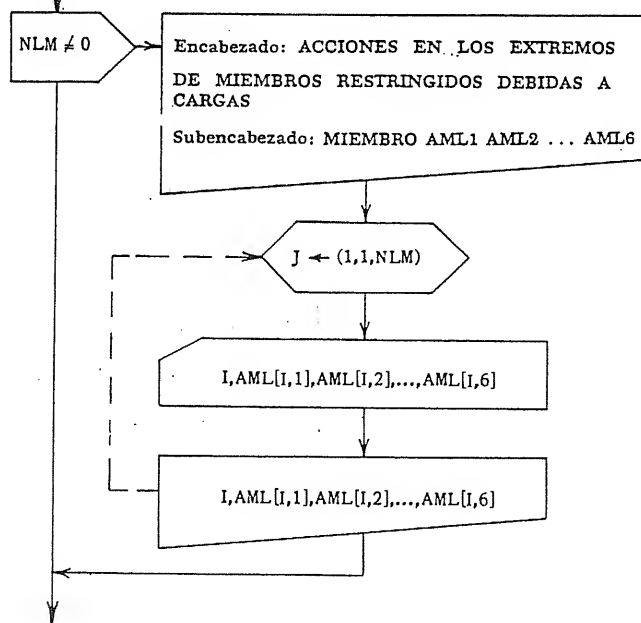


Las Secs. 2b y 3a son las mismas que para el programa de una viga continua.

3b. Acciones aplicadas en los nudos.

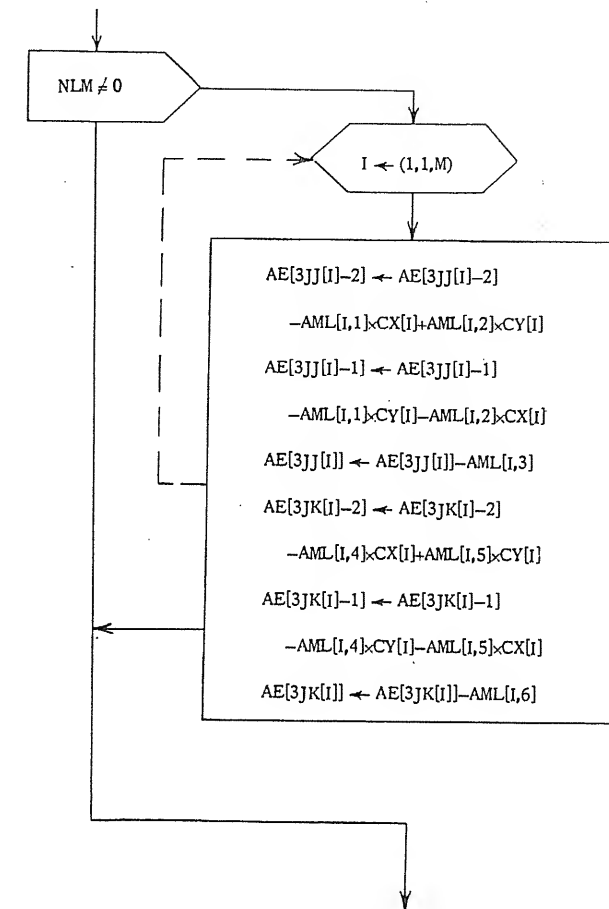


c. Acciones en los extremos de miembros restringidos debidas a cargas

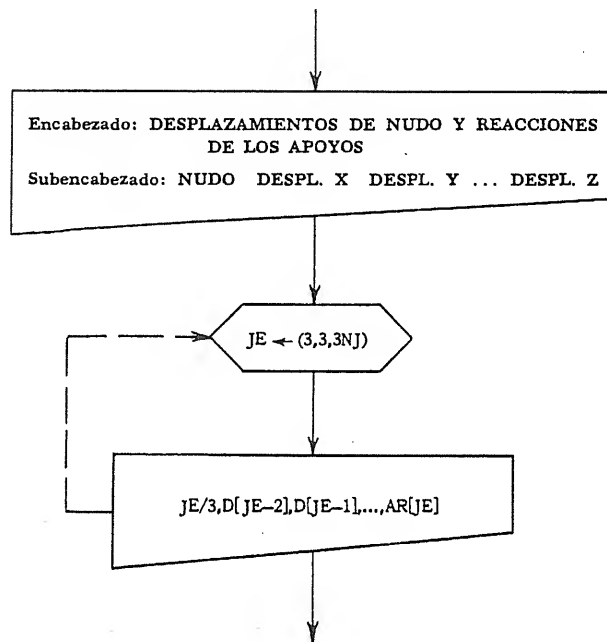


4. Construcción de vectores asociados con cargas

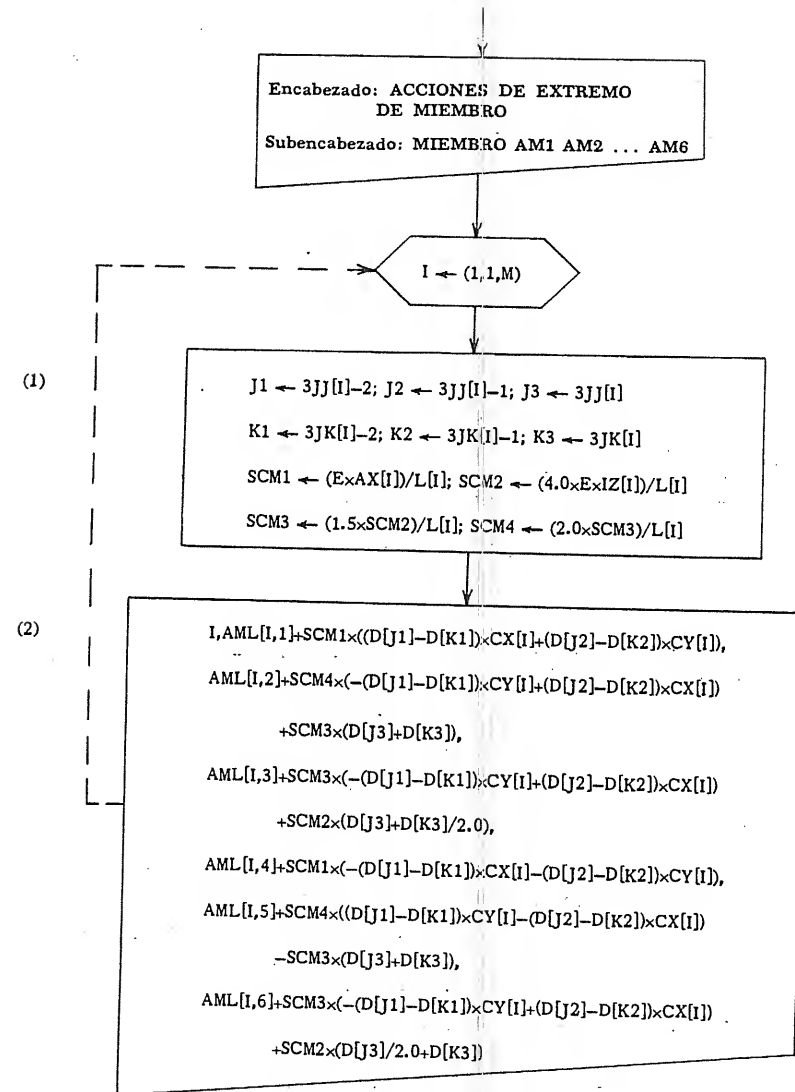
a. Cargas de nudo equivalentes



Las Secs. 4b y 5a son las mismas que las del programa de una viga continua, a excepción que la siguiente impresión se hace en la Sec. 5a:



5b. Acciones de extremo de miembro



matriz de rigidez de nudo para la estructura (véanse las Ecs. 4-67). Sin embargo, si $3JJ[I] - 2$ corresponde a una restricción, la primera columna de SMD no se toma en cuenta. Los elementos de S , que incluyen el empalme de $J1$ con $J2$ y $J3$ son acumulativos, debido a que, en general, reciben contribuciones de más de un miembro. Por otro lado, los elementos de S , que incluyen el empalme de $J1$ con $K1$, $K2$ y $K3$, son valores únicos.

- (7) Similar a (6), pero para $3JJ[I] - 1$, que es el valor original de $J2$ (véanse las Ecs. 4-68).
 - (8) Similar a (6), pero para $3JJ[I]$, que es el valor original de $J3$ (véanse las Ecs. 4-69).
 - (9) Similar a (6), pero para $3JK[I] - 2$, que es el valor original de $K1$ (véanse las Ecs. 4-70).
 - (10) Similar a (6), pero para $3JK[I] - 1$, que es el valor original de $K2$ (véanse las Ecs. 4-71).
 - (11) Similar a (6), pero para $3JK[I]$, que es el valor original de $K3$ (véanse las Ecs. 4-72).
4. a. Si NLM no es igual a cero, las contribuciones a AE de cada miembro se identifican y se cambian (véanse las Ecs. 4-75).
 5. b. (1) Para cada miembro, la misma información se calcula como en las Secs. 2a(2) y (3), previamente dadas.
 - (2) Se imprime el número de miembro y se calculan e imprimen, utilizando las Ecs. (4-77), las seis acciones de extremo de los miembros.

EJEMPLO: El marco plano, analizado en el Art. 4.18 (véase la Fig. 4-31), se da como ejemplo para usar el programa de computación. Los valores numéricos utilizados en el ejemplo son los siguientes:

$$E = 10\,000 \text{ kips/plg}^2 \quad L = 100 \text{ plg} \quad P = 10 \text{ kips} \quad AX = 10 \text{ plg}^2 \\ IZ = 1\,000 \text{ plg}^4$$

Los datos de entrada para el problema se indican en la Tabla 5-11; el programa de computación a su salida aparece en la Tabla 5-12.

5.7. Programa para una parrilla. En este artículo se da un programa para el análisis de estructuras de parrilla, usando los métodos descritos anteriormente en el Art. 4.20. El análisis de parrillas es simbólicamente similar al análisis de marcos planos. Por lo tanto, la siguiente discusión subraya únicamente aquellas partes del programa para parrilla que son diferentes del programa para marco plano.

Los datos de entrada que se requieren para el programa de parrilla son casi los mismos que los mostrados en la Tabla 5-10 para marcos planos. Sin embargo, en la primera tarjeta de datos se requiere una propiedad adicional del material (el módulo de elasticidad al cortante G). También, en las tarjetas que contienen las designaciones de miembro y propiedades, el área de la sección transversal AX y el momento de inercia IZ , se deben reemplazar por la constante de torsión IX y por el momento de inercia IY , respectivamente.

TABLA 5-11. TARJETAS DE DATOS PARA EL EJEMPLO DEL MARCO PLANO

Tipo de datos		Datos numéricos en las tarjetas							Tarjeta No.	
Datos de la estructura	(a)	2	3	6	2	10000.0			1	
	(b)	1	100.0		75.0					2
		2	0		75.0					3
		3	200.0		0					4
	(c)	1	2	1	10.0	1000.0			5	
		2	1	3	10.0	1000.0			6	
	(d)	2	1	1	1				7	
		3	1	1	1				8	
Datos de carga	(a)	1	2						9	
	(b)	1	0	-10.0	-1000.0					10
	(c)	1	0	12.0	200.0	0	12.0	-200.0	11	
		2	-6.0	8.0	250.0	-6.0	8.0	-250.0	12	

Las tarjetas de datos para la lista de restricciones de nudo son similares a las del programa del marco plano, excepto que la naturaleza de las restricciones es diferente. Para el programa de la parrilla, los términos $RL[3K - 2]$, $RL[3K - 1]$ y $RL[3K]$ indican las restricciones contra giros en los sentidos de x y y , así como la translación en la dirección de z , respectivamente, en el nudo k .

De manera similar, las tarjetas para los datos de carga son simbólicamente las mismas que las del programa del marco plano, pero el significado es diferente. Para una estructura de parrilla, las acciones aplicadas en los nudos consisten en pares en los sentidos de x y y , así como una fuerza en la dirección de z . Finalmente, las acciones AML en los extremos de los miembros restringidos debidas a las cargas son pares en los sentidos de x_M y y_M y una fuerza en la dirección de z_M (o z) en los extremos j y k , respectivamente.

Los identificadores del tipo del número entero en el programa de una parrilla son exactamente los mismos que los del programa del marco plano. La lista de variables suscritas es casi la misma, pero $AX[]$ e $IZ[]$ se reemplazan por $IX[]$ e $IY[]$. El diagrama de flujo principia en la Pág. 407.

TABLA 5-12. PROGRAMA DE COMPUTACION A SU SALIDA PARA EL EJEMPLO DEL MARCO PLANO

ANALISIS DE MARCOS PLANOS

DATOS DE LA ESTRUCTURA

M	N	NJ	NR	NRJ	E
2	3	3	6	2	10000.0

COORDENADAS DE NUDOS

NUDO	X	Y
1	100.0	75.0
2	0	75.0
3	200.0	0

DESIGNACIONES DE MIEMBRO Y PROPIEDADES

MIEMBRO	JJ	JK	AX	IZ	L	CX	CY
1	2	1	10.0	1000.0	100.0	1.0	0
2	1	3	10.0	1000.0	125.0	0.8	-0.6

RESTRICCIONES DE NUDO

NUDO	RESTRIC. EN X	RESTRIC. EN Y	RESTRIC. EN Z
2	1	1	1
3	1	1	1

DATOS DE CARGA

NLJ	NLM
1	2

ACCIONES APLICADAS EN LOS NUDOS

NUDO	ACCION EN X	ACCION EN Y	ACCION EN Z
1	0	-10.00	-1000.00

ACCIONES EN LOS EXTREMOS DE MIEMBROS RESTRINGIDOS DEBIDAS A LAS CARGAS

MIEMBRO	AML1	AML2	AML3	AML4	AML5	AML6
1	0	12.0	200.0	0	12.0	-200.0
2	-6.0	8.0	250.0	-6.0	8.0	-250.0

DESPLAZAMIENTOS DE NUDO Y REACCIONES DE APOYO

NUDO	DESP. EN X	DESP. EN Y	DESP. EN Z	REAC. EN X	REAC. EN Y	REAC. EN Z
1	-0.02026	-0.09936	-0.001797	0	0	0
2	0	0	0	20.26	13.14	436.6
3	0	0	0	-20.26	40.86	-889.5

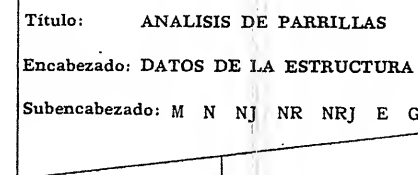
ACCIONES DE EXTREMO DE LOS MIEMBROS

MIEMBRO	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	20.26	13.14	436.6	-20.26	10.86	-322.9
2	28.72	-4.53	-677.1	-40.73	20.53	-889.5

DIAGRAMA DE FLUJO PARA EL PROGRAMA DE UNA PARRILLA

1. Datos de entrada y de impresión de la estructura

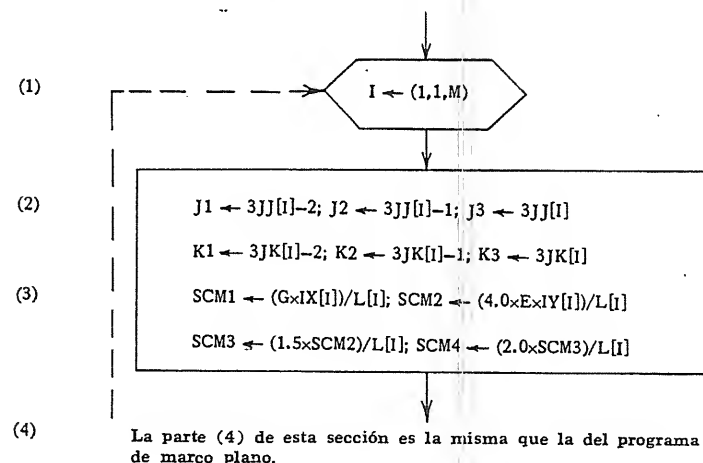
a. Parámetros de la estructura y módulos elásticos

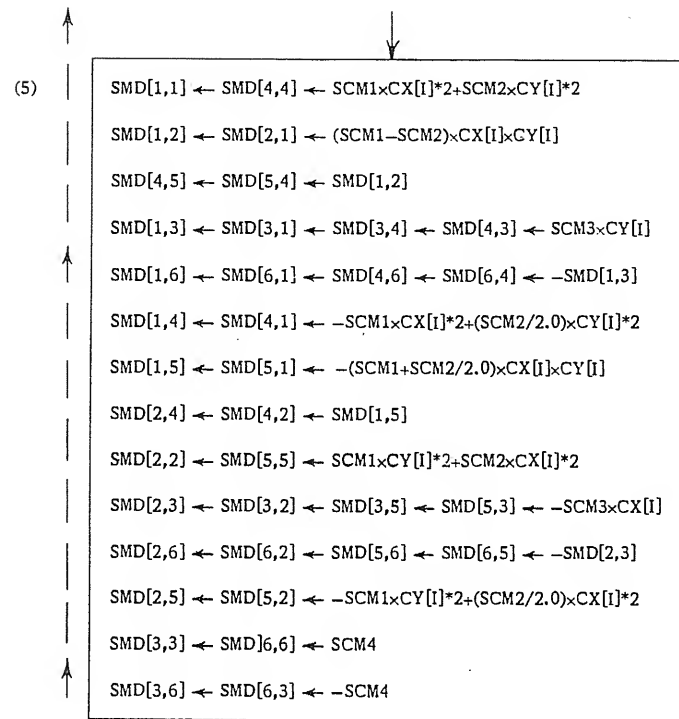


La Sec. 1 de este programa es similar al programa de marco plano, excepto que el módulo de cortante G se agrega, y las propiedades de miembro AX e IZ se reemplazan por IX e IY.

2. Matriz de rigidez de la estructura

a. Generación de la matriz de rigidez

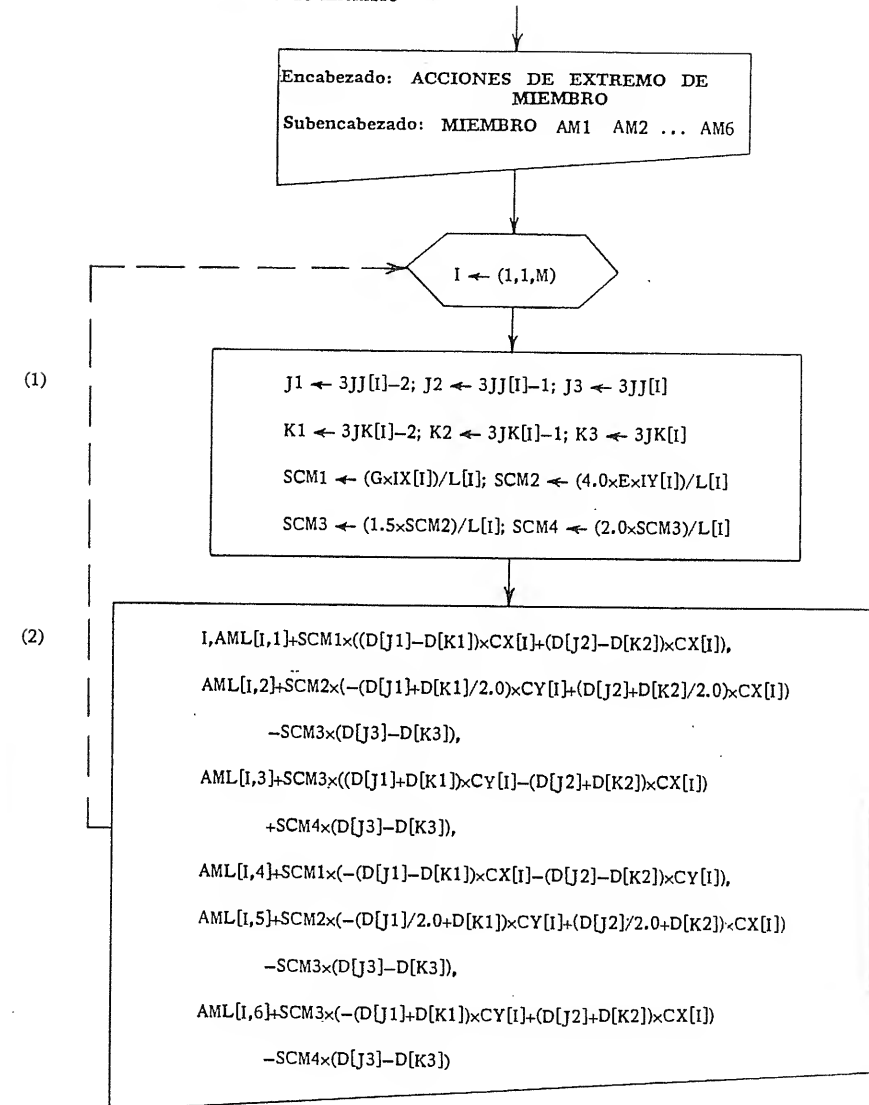




El restante de la Sec. 2 es el mismo que en el programa de marco plano.

Las Secs. 3a hasta 5a son las mismas que en el programa de marco plano.

5b. Acciones de extremo de miembro



Explicación del diagrama de flujo para el programa de la parrilla

- | Item No. | Observaciones |
|-----------|--|
| 2. a. (1) | Manifestación de control iterativa en miembros, para M miembros. |
| (2) | Los tres posibles desplazamientos se indican para los nudos J y K del miembro I . |
| (3) | Se calculan las cuatro constantes de rigidez para el miembro I y se almacenan a fin de evitar la repetición de esas expresiones cuando se forme la matriz de rigidez de miembro. |
| (4) | Los tres posibles desplazamientos para los nudos en cada extremo del miembro se vuelven a marcar con índice por el método usado en el programa del marco plano. |
| (5) | La matriz de rigidez de miembro de 6×6 SMD para el miembro I es formada (véase la Tabla 4-38, Art. 4.19). |
| 5. b. (1) | Se calcula para cada miembro la misma información como en las Secs. 2a(2) y (3) previamente dadas. |
| (2) | Se imprime el número de miembro y se calculan e imprimen las seis acciones de extremo de los miembros, usando las Ecs. (4-78). |

EJEMPLO 1: La Fig. 5-2a muestra una estructura de parrilla que tiene sus propiedades geométricas y cargas similares a las del problema del marco plano en el Art. 4.18 (véase la Fig. 4-31a). Supóngase que las propiedades de la sección transversal de ambos miembros de la parrilla son las mismas y que se aplican los siguientes valores numéricos:

$$\begin{aligned} E &= 10\,000 \text{ kips/plg}^2 & P &= 10 \text{ kips} & IX &= 1\,000 \text{ plg}^4 \\ G &= 4\,000 \text{ kips/plg}^2 & L &= 100 \text{ plg} & IY &= 1\,000 \text{ plg}^4 \end{aligned}$$

Un sistema de numeración para miembros y nudos se da en la Fig. 5-2b, la cual muestra a la estructura restringida. El sistema de numeración es, el mismo del ejemplo anterior del marco plano.

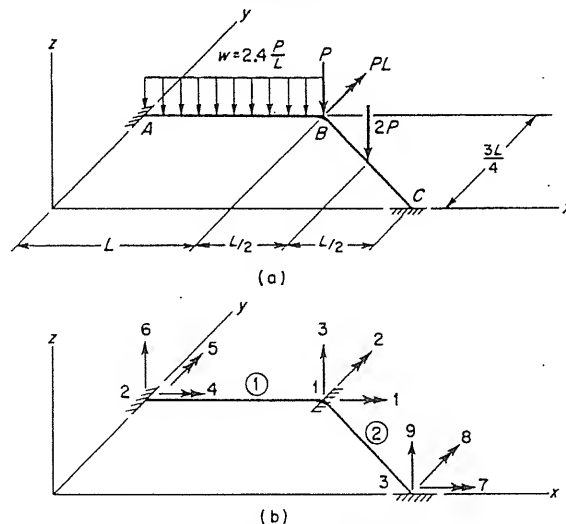


FIG. 5-2. Ej. 1 (parrilla)

TABLA 5-13. TARJETAS DE DATOS PARA EL EJ. 1 DE UNA PARRILLA

Tipo de datos		Datos numéricos en las tarjetas							Tarjeta No.
Datos de la estructura	(a)	2	3	6	2	10000.0	4000.0		1
	(b)	1	100.0	75.0					2
		2	0	75.0					3
		3	200.0	0					4
	(c)	1	2	1	1000.0	1000.0			5
		2	1	3	1000.0	1000.0			6
	(d)	2	1	1	1				7
		3	1	1	1				8
Datos de carga	(a)	1	2						9
	(b)	1	0	1000.0	-10.0				10
	(c)	1	0	-200.0	12.0	0	200.0	12.0	11
		2	0	-312.5	10.0	0	312.5	10.0	12

Los valores numéricos que se deben proporcionar en las tarjetas de datos se muestran en la Tabla 5-13. (Obsérvese la similitud de los datos en esta tabla con los datos en la Tabla 5-11 para el marco plano). El programa de computación a su salida se da en la Tabla 5-14.

EJEMPLO 2: Un segundo problema, el cual consiste de una parrilla rectangular, se muestra en la Fig. 5-3a. Esta estructura tiene cinco miembros, seis nudos, doce restricciones y seis grados de libertad. Se supone que las propiedades de la sección transversal de todos los miembros son las mismas; las constantes numéricas en el problema son las siguientes:

$$\begin{aligned} E &= 30\,000 \text{ kips/plg}^2 & P &= 16 \text{ kips} & IX &= 2\,000 \text{ plg}^4 \\ G &= 12\,000 \text{ kips/plg}^2 & L &= 60 \text{ plg} & IY &= 1\,000 \text{ plg}^4 \end{aligned}$$

La Fig. 5-3b muestra en la estructura restringida un sistema de numeración para los miembros y los nudos. Como en los problemas anteriores, los nudos que están libres de desplazarse se numeran primero.

La Tabla 5-15 contiene los datos de entrada para este problema y la solución se da en la Tabla 5-16, que muestra únicamente los resultados finales del programa de computación.

5.8. Programa para una armadura en el espacio. El programa en este artículo lleva a cabo el análisis de armaduras en el espacio por los métodos dados en el Art. 4.23. Los pasos en este programa son similares a los programas del marco plano y de la parrilla (Arts. 5.6 y 5.7), debido a que los tres tipos de estructuras tienen tres

posibles desplazamientos en cada nudo. El programa de la armadura en el espacio también posee una gran similitud con el programa de la armadura plana, pero la naturaleza tridimensional de las armaduras en el espacio producen algunas complicaciones adicionales.

Los datos de entrada que se requieren para el programa de la armadura en el espacio son similares a los mostrados en la Tabla

TABLA 5-14. PROGRAMA DE COMPUTACION A SU SALIDA PARA EL EJEMPLO 1 DE UNA PARRILLA

ANÁLISIS DE PARRILLAS

DATOS DE LA ESTRUCTURA

M	N	NJ	NR	NRJ	E	G
2	3	3	6	2	10000.0	4000.0

COORDENADAS DE NUDOS

NUDO	X	Y
1	100.0	75.0
2	0	75.0
3	200.0	0

DESIGNACIONES Y PROPIEDADES DE MIEMBRO

MIEMBRO	JJ	JK	IX	IY	L	CX	CY
1	2	1	1000.0	1000.0	100.0	1.0	0
2	1	3	1000.0	1000.0	125.0	0.8	-0.6

RESTRICCIONES DE NUDO

NUDO	RESTR. EN X	RESTR. EN Y	RESTR. EN Z
2	1	1	1
3	1	1	1

DATOS DE CARGA

NLJ	NLM
1	2

ACCIONES APLICADAS EN LOS NUDOS

NUDO	ACCION EN X	ACCION EN Y	ACCION EN Z
1	0	1000.0	-10.0

ACCIONES EN LOS EXTREMOS DE MIEMBROS RESTRINGIDOS DEBIDAS A LAS CARGAS

MIEMBRO	AML1	AML2	AML3	AML4	AML5	AML6
1	0	-200.0	12.0	0	200.0	12.0
2	0	-312.5	10.0	0	312.5	10.0

TABLA 5-14. (Continuación)

DESPLAZAMIENTOS DE NUDO Y REACCIONES DE APOYO

NUDO	DESPL. — EN X	DESPL. — EN Y	DESPL. — EN Z	REAC. — EN X	REAC. — EN Y	REAC. — EN Z
1	-0.007599	0.005095	-0.3551	0	0	0
2	0	0	0	303.9	-1311.5	24.04
3	0	0	0	1193.1	1103.5	29.96

ACCIONES DE EXTREMO DE LOS MIEMBROS

MIEMBRO	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	303.9	-1311.5	24.04	-303.9	107.5	-0.0397
2	-292.3	896.4	-9.96	292.3	1598.7	29.96

5-10 para marcos planos, con algunas excepciones. Por ejemplo, cada una de las tarjetas que contienen las coordenadas de nudo deben proporcionar no tan sólo las coordenadas x y y , sino también la coordenada z del nudo. También, en las tarjetas que contienen las designaciones de miembro y propiedades, no se requiere el momento de inercia I_z .

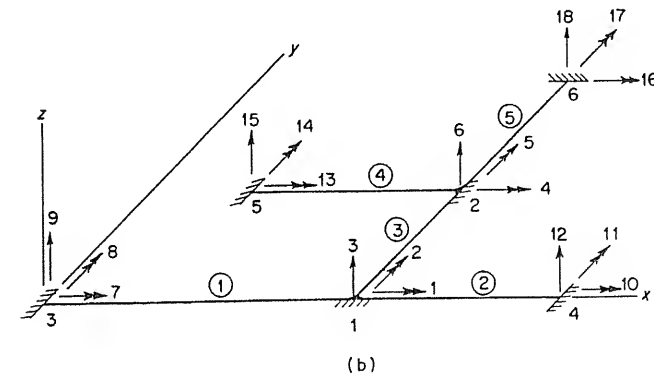
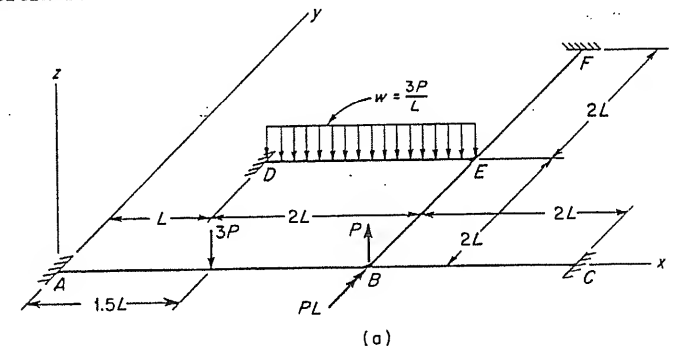


Fig. 5-3. Ej. 2 (parrilla)

Las tarjetas de datos para la lista de restricciones de nudo son similares a las del programa del marco plano, excepto que la naturaleza de las restricciones es diferente. Para el programa de la armadura en el espacio, los términos $RL[3K - 2]$, $RL[3K - 1]$ y $RL[3K]$ indican las restricciones contra las translaciones en las direcciones de x , y y z , respectivamente, en el nudo k .

Similarmente, las tarjetas para los datos de carga son, de modo simbólico, las mismas que las del programa del marco plano, pero los significados son diferentes. Las acciones aplicadas en los nudos consisten en fuerzas en las direcciones de x , y y z , y las acciones de extremo AML consisten en fuerzas en las direcciones de x_M , y_M y z_M en cada extremo de un miembro cargado.

Los identificadores del tipo de número entero en el programa de la armadura en el espacio son exactamente los mismos que los del programa del marco plano. Sin embargo, la lista de variables suscritas requiere la cancelación de $IZ[]$ y la adición de $Z[]$ y $CZ[]$. Además, el identificador Q se usa en el programa para almacenamiento temporal de una expresión de raíz cuadrada [véase la Sec. 4a(2)]. El diagrama de flujo principia en la Pág. 416.

TABLA 5-15. TARJETAS DE DATOS PARA EL EJ. 2 DE UNA PARRILLA

Tipo de datos		Datos numéricos en las tarjetas						Tarjeta No.
Datos de la estructura	(a)	5	6	12	4	30,000.0	12,000.0	1
	(b)	1	180.0		0			2
		2	180.0		120.0			3
		3	0		0			4
		4	300.0		0			5
		5	60.0		120.0			6
		6	180.0		240.0			7
	(c)	1	3	1	2000.0	1000.0		8
		2	1	4	2000.0	1000.0		9
		3	1	2	2000.0	1000.0		10
		4	5	2	2000.0	1000.0		11
		5	2	6	2000.0	1000.0		12
	(d)	3	1	1	1			13
		4	1	1	1			14
		5	1	1	1			15
		6	1	1	1			16
Datos de carga	(a)	1	2					17
	(b)	1	0	960.0	16.0			18
	(c)	1	0	-1080.0	24.0	0	1080.0	19
		4	0	-960.0	48.0	0	960.0	20

TABLA 5-16. RESULTADOS FINALES PARA EL EJ. 2 DE UNA PARRILLA

DESPLAZAMIENTOS DE NUDO Y REACCIONES DE APOYO

NUDO	DESPL. EN X	DESPL. EN Y	DESPL. EN Z	REAC. EN X	REAC. EN Y	REAC. EN Z
1	-0.000684	-0.000288	-0.07017	0	0	0
2	0.000554	0.000353	-0.12092	0	0	0
3	0	0	0	91.13	-1565.7	29.93
4	0	0	0	136.70	733.4	11.02
5	0	0	0	-110.81	-2295.1	68.78
6	0	0	0	-1234.4	-70.56	18.27

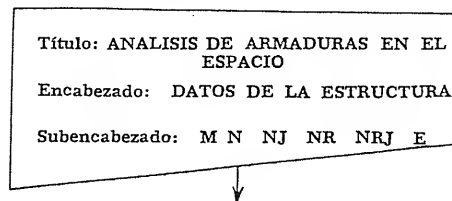
ACCIONES DE EXTREMO DE LOS MIEMBROS

MIEMBRO	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	91.13	-1565.7	29.93	-91.13	498.5	18.07
2	-136.70	589.6	-11.02	136.70	733.4	11.02
3	-128.07	-227.8	8.95	128.07	-846.6	-8.95
4	-110.81	-2295.1	68.78	110.81	-198.6	27.22
5	70.56	957.4	-18.27	-70.57	1234.4	18.27

DIAGRAMA DE FLUJO PARA UN PROGRAMA DE ARMADURA EN EL ESPACIO

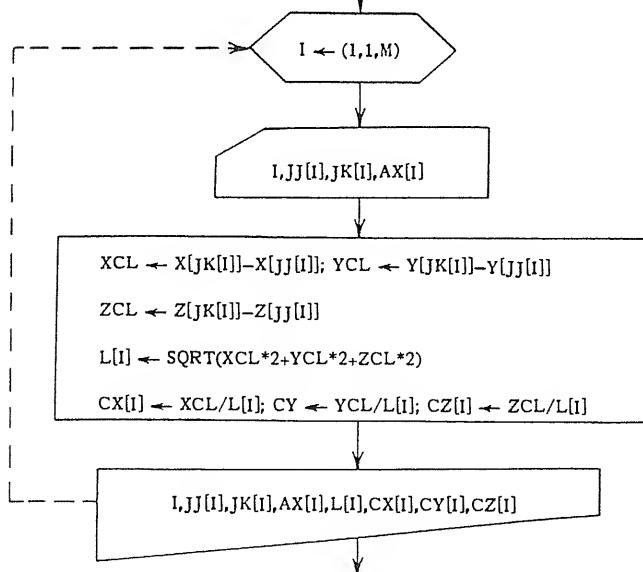
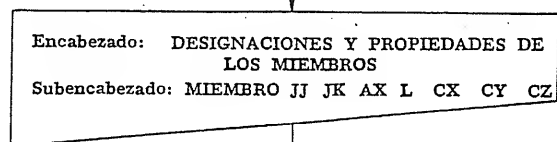
1. Datos de entrada y de impresión de la estructura

a. Parámetros de la estructura y módulo elástico



Las Secs. 1a y 1b de este programa son similares a las del programa de marco plano, excepto que también se necesitan coordenadas en Z para los nudos.

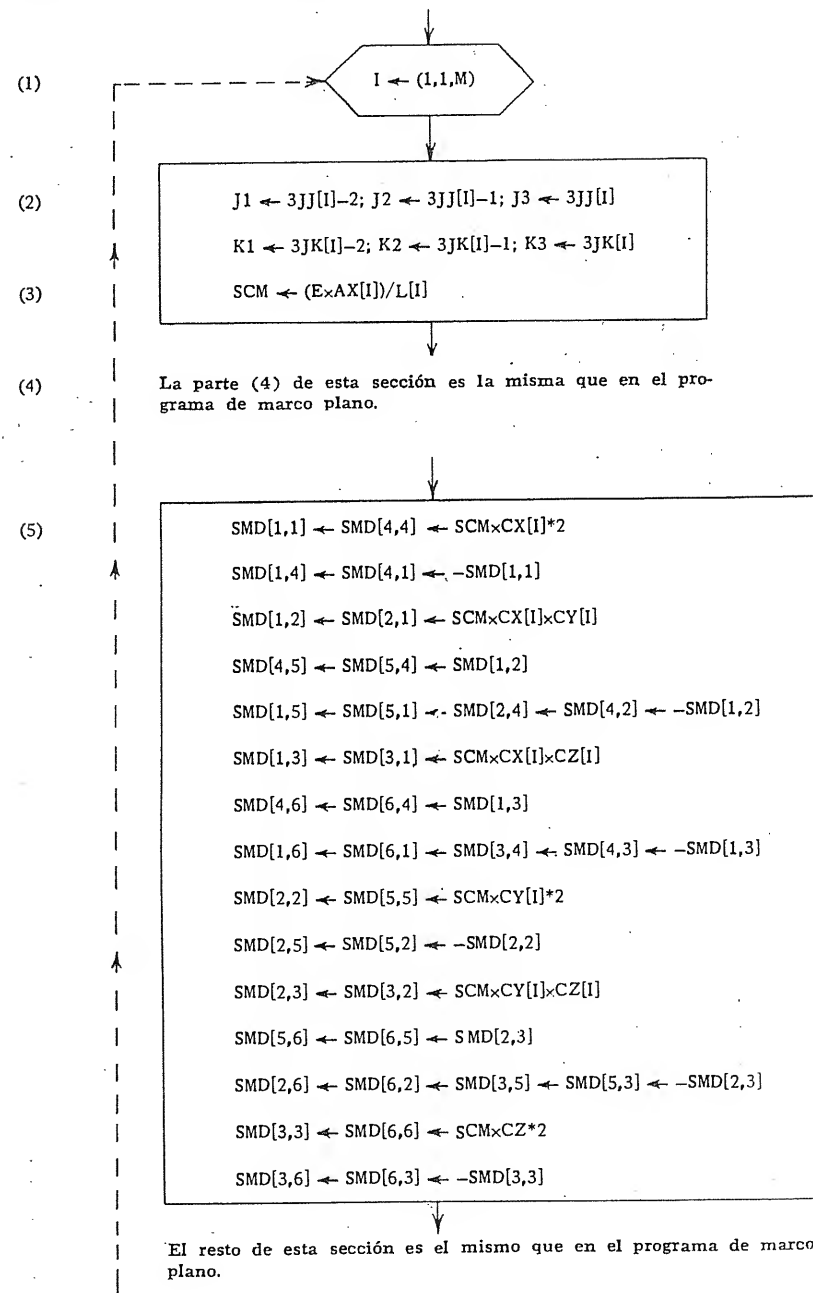
c. Designaciones y propiedades de los miembros



La Sec. 1d es la misma que en el programa de marco plano.

2. Matriz de rigidez de la estructura

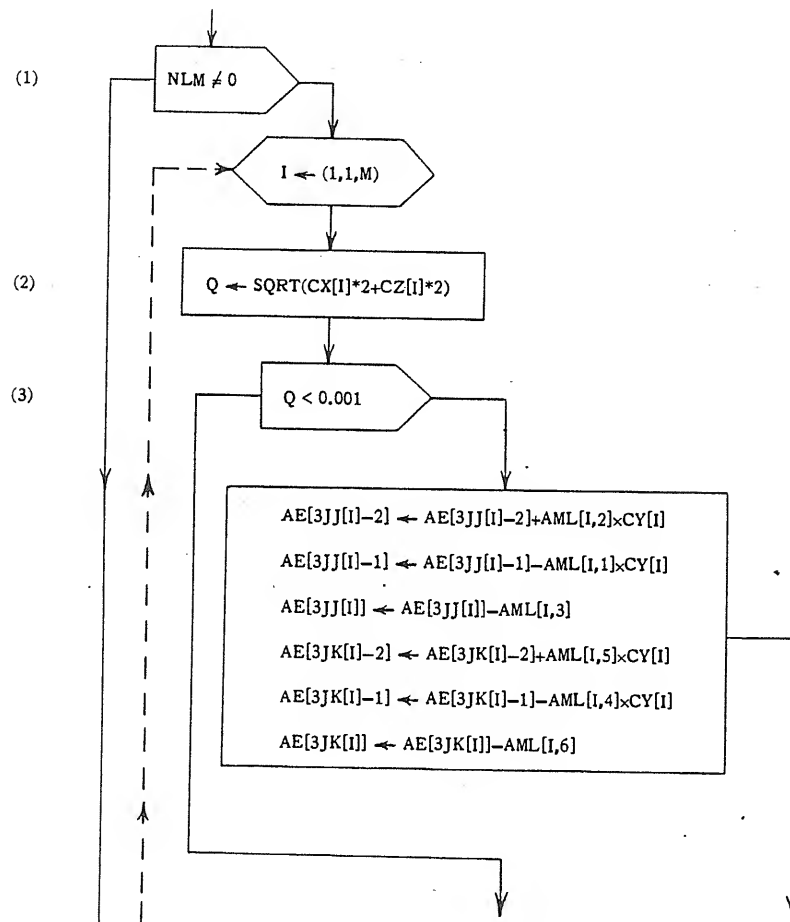
a. Generación de la matriz de rigidez



La Sec. 3 es la misma que en el programa de marco plano

4. Construcción de vectores asociados con cargas

a. Cargas de nudo equivalentes

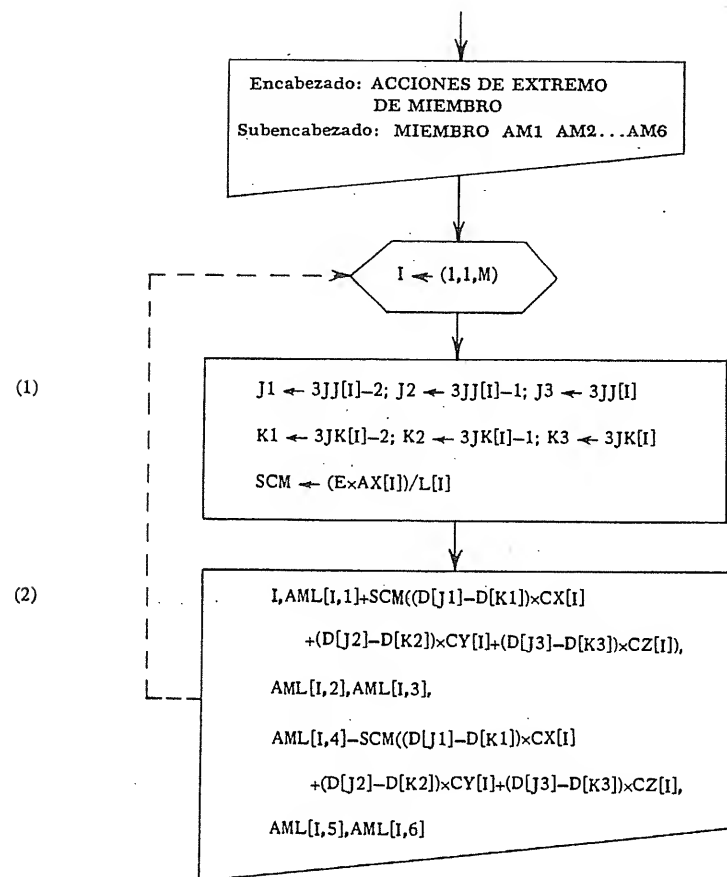


(4)

$AE[3JJ[I]-2] \leftarrow AE[3JJ[I]-2] - AML[I, 1] \times CX[I]$
 $+ (AML[I, 2] \times CX[I] \times CY[I] + AML[I, 3] \times CZ[I]) / Q$
 $AE[3JJ[I]-1] \leftarrow AE[3JJ[I]-1] - AML[I, 1] \times CY[I]$
 $- AML[I, 2] \times Q$
 $AE[3JJ[I]] \leftarrow AE[3JJ[I]] - AML[I, 1] \times CZ[I]$
 $+ (AML[I, 2] \times CY[I] \times CZ[I] - AML[I, 3] \times CX[I]) / Q$
 $AE[3JK[I]-2] \leftarrow AE[3JK[I]-2] - AML[I, 4] \times CX[I]$
 $+ (AML[I, 5] \times CX[I] \times CY[I] + AML[I, 6] \times CZ[I]) / Q$
 $AE[3JK[I]-1] \leftarrow AE[3JK[I]-1] - AML[I, 4] \times CY[I]$
 $- AML[I, 5] \times Q$
 $AE[3JK[I]] \leftarrow AE[3JK[I]] - AML[I, 4] \times CZ[I]$
 $+ (AML[I, 5] \times CY[I] \times CZ[I] - AML[I, 6] \times CX[I]) / Q$

Las Secs. 4b y 5a son las mismas que en el programa de marco plano.

5b. Acciones de extremo de miembro



Explicación del diagrama de flujo para el programa de armadura en el espacio

- | Item. No. | Observaciones |
|-----------|---|
| 2. a. (1) | Manifestación de control iterativa en miembros, para M miembros. |
| (2) | Se indican los tres posibles desplazamientos para los nudos J y K del miembro I. |
| (3) | Se calcula la constante de rigidez para la deformación axial del miembro. |
| (4) | A los tres posibles desplazamientos para los nudos en cada extremo del miembro se les vuelve a poner índice por el mismo método usado para el programa del marco plano. |
| (5) | La matriz de rigidez de miembro de 6×6 SMD para el miembro I es formada (véase la Tabla 4-40, Art. 4.21). |

4. a. (1) Si NLM no es igual a cero, se deben calcular y cambiar las contribuciones de AML a AE para cada miembro.
- (2) Se calcula la cantidad $Q = \sqrt{C_x^2 + C_z^2}$ y se almacena a fin de evitar repeticiones en cálculos posteriores.
- (3) Si Q es cero o muy pequeño, el miembro se toma como vertical y las contribuciones a AE de AML se sacan de la Tabla 4-42 en el Art. 4.23.
- (4) Por otra parte, si Q no es pequeño, el miembro se toma como inclinado y las contribuciones a AE de AML se sacan de la Tabla 4-41 en el Art. 4.23.
5. b. (1) Se calcula para cada miembro la misma información como en las Secs. 2a(2) y (3) previamente dadas.
- (2) Se imprime el número de miembro y se calculan e imprimen las seis acciones de extremo de los miembros usando las Ecs. (4-87).

EJEMPLO 1: La estructura de armadura en el espacio mostrada en la Fig. 5-4a tiene seis miembros, cuatro nudos, nueve restricciones y tres grados de libertad. En la figura las flechas cruzadas por una pequeña línea indican que existe en ese punto una restricción de apoyo y se evita el movimiento en la dirección de la flecha. Por otro lado, las cargas se representan por flechas sencillas. Supóngase que todos los miembros tienen la misma área de sección transversal y que los valores numéricos en el problema son como sigue:

$$E = 10\,000 \text{ kips/plg}^2 \quad L = 25 \text{ plg} \quad P = 10 \text{ kips} \quad AX = 10 \text{ plg}^2$$

La Fig. 5-4b muestra a la estructura restringida con un sistema de numeración para miembros y nudos. Debido a los lugares de las restricciones, en el análisis se requiere un nuevo arreglo de los términos en las matrices.

La Tabla 5-17 muestra las tarjetas de datos de entrada para el problema; la Tabla 5-18 muestra el programa de computación a su salida.

EJEMPLO 2: La Fig. 5-5a muestra un segundo ejemplo que tiene siete miembros, cinco nudos, nueve restricciones y seis grados de libertad. Se supone

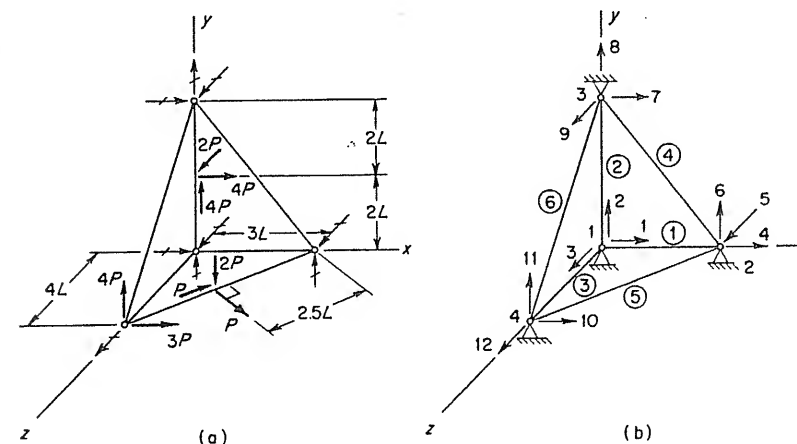


FIG. 5-4. Ej. 1 (armadura en el espacio)

que las áreas de las secciones transversales de todos los miembros son las mismas y que se aplican los siguientes valores numéricos:

$$E = 30\,000 \text{ kips/plg}^2 \quad L = 120 \text{ plg} \quad P = 20 \text{ kips} \quad AX = 10 \text{ plg}^2$$

La Fig. 5-5b muestra la estructura restringida y un sistema de numeración que se requiere para el nuevo arreglo de matrices en el análisis.

Los datos de entrada que se requieren para el problema se indican en la Tabla 5-19; los resultados finales del programa de computación se dan en la Tabla 5-20.

5.9. Programa para un marco en el espacio. Este artículo contiene un programa para el análisis de marcos en el espacio por los métodos dados en el Art. 4.25. Los pasos en este programa son considerablemente diferentes de aquellos de los programas anteriores por dos razones principales. Primero, el análisis se complica por el hecho de que cada nudo tiene seis posibles desplazamientos en vez de tres; segundo, el programa incorpora el uso de matrices de rotación. No fue necesario el uso de matrices de rotación en los programas ante-

TABLA 5-17. TARJETAS DE DATOS PARA EL EJ. 1 DE UNA ARMADURA EN EL ESPACIO

Tipo de datos		Datos numéricos en las tarjetas						Tarjeta No.
Datos de la estructura	(a)	6	4	9	4	10000.0		1
	(b)	1	0	0	0			2
		2	75.0	0	0			3
		3	0	100.0	0			4
		4	0	0	100.0			5
	(c)	1	1	2	10.0			6
		2	1	3	10.0			7
		3	1	4	10.0			8
		4	2	3	10.0			9
		5	2	4	10.0			10
		6	3	4	10.0			11
	(d)	1	1	1	1			12
		2	0	1	1			13
		3	1	1	1			14
		4	0	0	1			15
Datos de carga	(a)	1	2					16
	(b)	4	30.0	40.0	0			17
	(c)	2	-20.0	20.0	-10.0	-20.0	20.0	18
		5	5.0	10.0	5.0	5.0	10.0	19

TABLA 5-18. PROGRAMA DE COMPUTACION A SU SALIDA PARA EL EJ. 1 DE UNA ARMADURA EN EL ESPACIO

ANÁLISIS DE ARMADURAS EN EL ESPACIO

DATOS DE LA ESTRUCTURA

M	N	NJ	NR	NRJ	E
6	3	4	9	4	10000.0

COORDENADAS DE LOS NUDOS

NUDO	X	Y	Z
1	0	0	0
2	75.0	0	0
3	0	100.0	0
4	0	0	100.0

DESIGNACIONES DE MIEMBRO Y PROPIEDADES

MIEMBRO	JJ	JK	AX	L	CX	CY	CZ
1	1	2	10.0	75.0	1.000	0	0
2	1	3	10.0	100.0	0	1.000	0
3	1	4	10.0	100.0	0	0	1.000
4	2	3	10.0	125.0	-0.600	0.800	0
5	2	4	10.0	125.0	-0.600	0	0.800
6	3	4	10.0	141.4	0	-0.707	0.707

RESTRICCIONES DE NUDO

NUDO RESTR. EN X RESTR. EN Y RESTR. EN Z

1	1	1	1
2	0	1	1
3	1	1	1
4	0	0	1

DATOS DE CARGA

NLJ	NLM
1	2

ACCIONES APLICADAS EN LOS NUDOS

NUDO ACCION EN X ACCION EN Y ACCION EN Z

4	30.0	40.0	0
---	------	------	---

ACCIONES EN LOS EXTREMOS DE MIEMBROS RESTRINGIDOS DEBIDAS A LAS CARGAS

MIEMBRO	AML1	AML2	AML3	AML4	AML5	AML6
2	-20.0	20.0	-10.0	-20.0	20.0	-10.0
5	5.0	10.0	5.0	5.0	10.0	5.0

DESPLAZAMIENTOS DE NUDO Y REACCIONES DE APOYO

NUDO	DESPL. EN X	DESPL. EN Y	DESPL. EN Z	REAC. EN X	REAC. EN Y	REAC. EN Z
1	0	0	0	-56.18	-20.00	-10.00
2	0.02714	0	0	0	-0.42	50.33
3	0	0	0	-27.82	-39.58	20.00
4	0.1556	0.08485	0	0	0	-78.33

TABLA 5-18. Continuación)

ACCIONES DE EXTREMO DE LOS MIEMBROS

MIEMBRO	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	-36.18	0	0	36.18	0	0
2	-20.00	20.00	-10.00	-20.00	20.00	-10.00
3	0	0	0	0	0	0
4	-13.03	0	0	13.03	0	0
5	66.67	10.00	5.00	-56.67	10.00	5.00
6	42.43	0	0	-42.43	0	0

riores, pero la naturaleza compleja de marcos en el espacio hace que su uso sea casi esencial.

Se requieren varios identificadores adicionales en el programa de un marco en el espacio que no fueron necesarios anteriormente. Estos identificadores se enumeran en la Tabla 5-21.

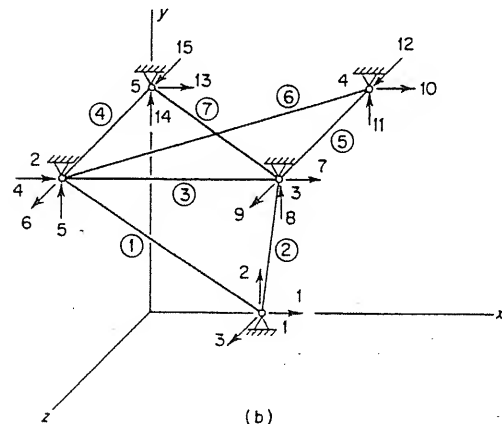
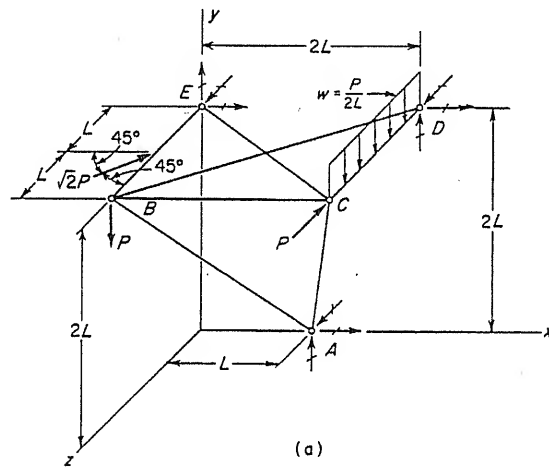


FIG. 5-5. Ej. 2 (armadura en el espacio)

TABLA 5-19. TARJETAS DE DATOS PARA EL EJ. 2 DE UNA ARMADURA EN EL ESPACIO

Tipo de datos		Datos numéricos en las tarjetas							Tarjeta No.
Datos de la estructura	(a)	7	5	9	3	30000.0			1
	(b)	1	120.0	0	0				2
		2	0	240.0	240.0				3
		3	240.0	240.0	240.0				4
		4	240.0	240.0	0				5
		5	0	240.0	0				6
	(c)	1	1	2	10.0				7
		2	1	3	10.0				8
		3	2	3	10.0				9
		4	2	5	10.0				10
		5	3	4	10.0				11
		6	2	4	10.0				12
		7	3	5	10.0				13
	(d)	1	1	1	1				14
		4	1	1	1				15
		5	1	1	1				16
Datos de carga	(a)	2	2						17
	(b)	2	0	-20.0	0				18
		3	0	0	-20.0				19
	(c)	4	-10.0	0	-10.0	-10.0	0	-10.0	20
		5	0	10.0	0	0	10.0	0	21

TABLA 5-20. RESULTADOS FINALES PARA EL EJ. 2 DE UNA ARMADURA EN EL ESPACIO

DESPLAZAMIENTOS DE NUDO Y REACCIONES DE APOYO

NUDO	DESPL. EN X	DESPL. EN Y	DESPL. EN Z	REAC. EN X	REAC. EN Y	REAC. EN Z
1	0	0	0	-5.00	30.00	30.00
2	0.01477	-0.05638	0.009769	0	0	0
3	0.01654	-0.02504	-0.01023	0	0	0
4	0	0	0	-2.21	10.00	15.00
5	0	0	0	-12.79	0	-5.00

ACCIONES DE EXTREMO DE LOS MIEMBROS

MIEMBRO	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
1	30.00	0	0	-30.00	0	0
2	15.00	0	0	-15.00	0	0
3	-2.21	0	0	2.21	0	0
4	-22.21	0	-10.0	2.21	0	-10.0
5	12.79	10.0	0	-12.79	10.0	0
6	3.13	0	0	-3.13	0	0
7	-3.94	0	0	3.94	0	0

TABLA 5-21. IDENTIFICADORES ADICIONALES USADOS EN EL PROGRAMA DE UN MARCO EN EL ESPACIO

Identificador	Definición
AA	Identificador usado para indicar si el ángulo α es o no cero
XP, YP, ZP	Coordenadas x , y y z del punto p
XPS, YPS, ZPS	Coordenadas x_s , y_s y z_s del punto p
YPG, ZPG	Coordenadas y_y y z_y del punto p
Q, SQ	Identificadores usados para almacenamiento temporal de las expresiones de raíz cuadrada
SINA, COSA	Seno y coseno del ángulo α
R[,]	Matriz de rotación
SMR[,]	Identificador usado para almacenamiento temporal del producto $S_M R_T$

Los datos de entrada que se requieren para el programa del marco en el espacio se resumen en la Tabla 5-22, la que es muy similar

TABLA 5-22. PREPARACION DE DATOS PARA EL PROGRAMA DEL MARCO EN EL ESPACIO

Datos		Número de tarjetas	Items en las tarjetas de datos
Datos de la estructura	(a) Parámetros de la estructura y módulo de elasticidad	1	M NJ NR NRJ E G
	(b) Coordenadas de nudos	NJ	J X[J] Y[J] Z[J]
	(c) Designaciones de miembros, propiedades y orientaciones	M	I JJ[I] JK[I] AX[I] IX[I] IY[I] IZ[I] AA
	Coordenadas del punto p (requeridas cuando $AA = 1$)		I XP YP ZP
	(d) Lista de restricciones de nudo	NRJ	K RL[6K-5] RL[6K-4] RL[6K-3] RL[6K-2] RL[6K-1] RL[6K]
Datos de carga	(a) Números de nudos y miembros cargados	1	NLJ NLM
	(b) Acciones aplicadas en los nudos	NLJ	K A[6K-5] A[6K-4] A[6K-3] A[6K-2] A[6K-1] A[6K]
	(c) Acciones en los extremos de miembros restringidos debidas a las cargas	2NLM	I AML[I,1] AML[I,2] AML[I,3] AML[I,4] AML[I,5] AML[I,6] AML[I,7] AML[I,8] AML[I,9] AML[I,10] AML[I,11] AML[I,12]

a la Tabla 5-10 para marcos planos. Sin embargo, la primera tarjeta de datos incluye el módulo de cortante G , así como el módulo E , y cada una de las tarjetas que contienen coordenadas de nudo deben proporcionar tanto la coordenada z como las coordenadas x y y de un nudo.

Las tarjetas que se refieren a las designaciones de miembro, propiedades y orientaciones, deben incluir las propiedades de sección transversal AX , IX , IY e IZ . Además, se debe proporcionar un identificador AA a fin de indicar si el ángulo de rotación α es o no cero (véase el Art. 4.24 para el significado del ángulo α). Si el ángulo α es cero para un miembro dado, se asigna el valor de cero a AA . Por otro lado, si el ángulo α no es cero, se asigna el número 1. Esta regla es una convención arbitraria que sirve para indicar que el miembro tiene sus ejes principales en direcciones inclinadas. Bajo estas condiciones, los ejes principales se localizan por medio de las coordenadas de un punto p en el plano x_M - y_M (véanse las Figs. 4-45 y 4-46), pero no sobre el eje del miembro. Por lo tanto, cada tarjeta de datos para la que AA es igual a 1, debe ser seguida por una tarjeta adicional de datos en la que se den el índice del miembro I y las tres coordenadas XP , YP y ZP . Estas coordenadas se usan para obtener la matriz de rotación como se describió en el Art. 4.24.

Un método alternativo de programación, sería prever la contingencia de que el ángulo α es conocido, en cuyo caso no sería necesario dar las coordenadas de un punto p . El valor original de α podría ser asignado al identificador AA , después de lo cual la matriz de rotación se puede calcular directamente de la Ec. (4-90) o de la Ec. (4-96).

Cada una de las tarjetas en la serie de restricciones de nudo contiene un número de nudo K y seis números en clave que indican las condiciones de restricción en ese nudo. Los términos $RL[6K-5]$ hasta $RL[6K]$ indican las restricciones contra translación y rotación en las direcciones de x , y y z en el nudo k .

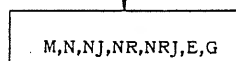
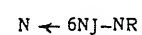
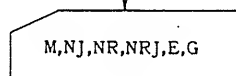
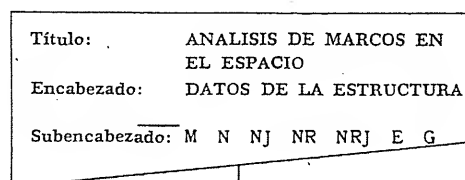
Cada tarjeta de cargas de nudo contiene un número de nudo K y las seis acciones aplicadas en ese nudo. Estas acciones son las componentes del vector fuerza y del vector momento aplicados en las direcciones de x , y y z .

En la última serie, se deben proporcionar dos tarjetas para cada miembro al que se le aplican las cargas debido a que la información puede no caber en una tarjeta. La primera tarjeta contiene un número de miembro I y las seis acciones en el extremo j del miembro restringido. La segunda tarjeta proporciona las seis acciones en el extremo k del miembro. Las acciones en cada extremo son fuerzas y pares en las direcciones de x_M , y_M y z_M .

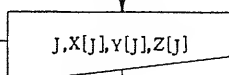
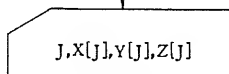
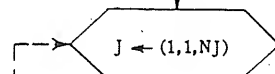
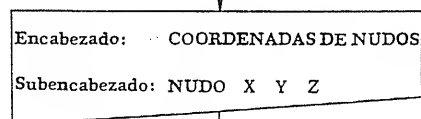
DIAGRAMA DE FLUJO PARA UN PROGRAMA DE MARCO EN EL ESPACIO

1. Datos de entrada y de impresión de la estructura

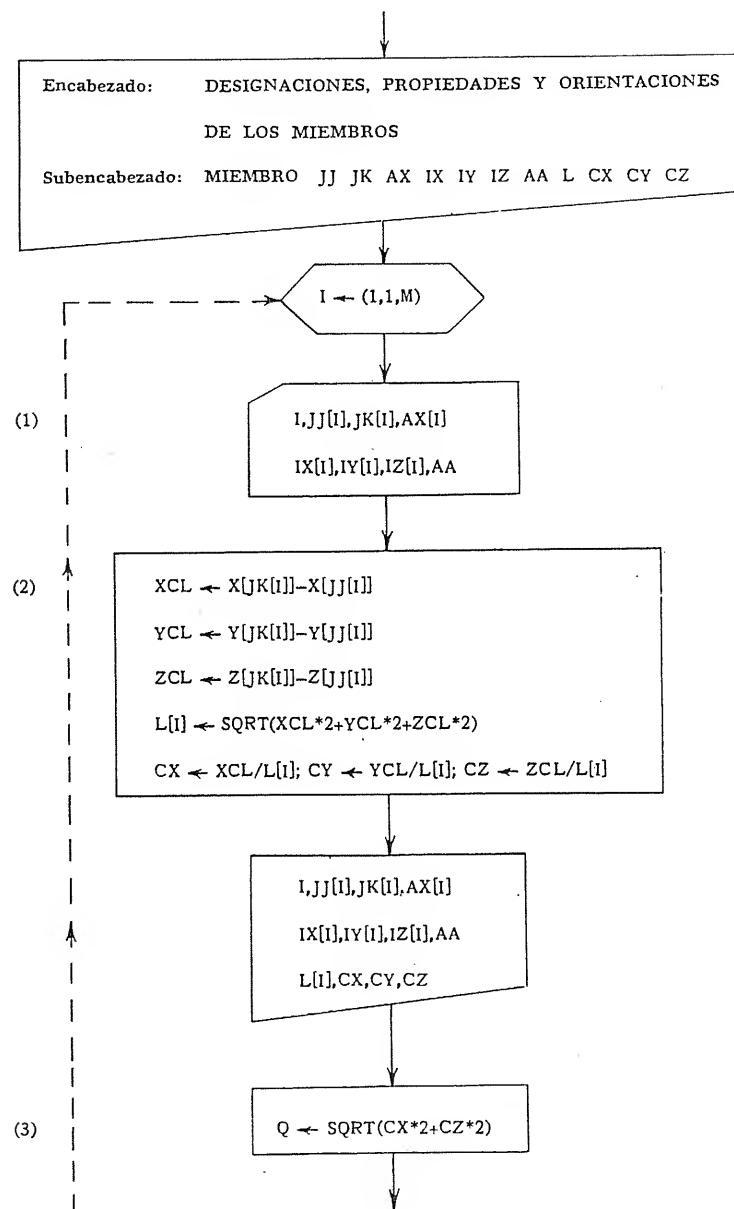
a. Parámetros de la estructura y módulos elásticos

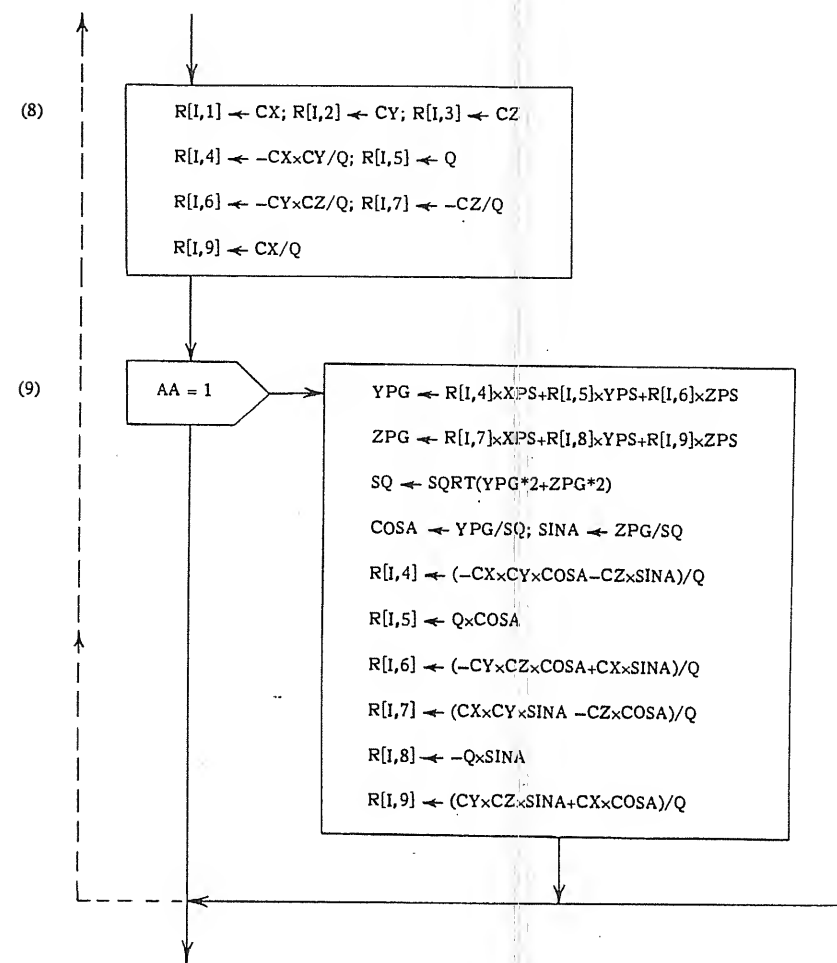
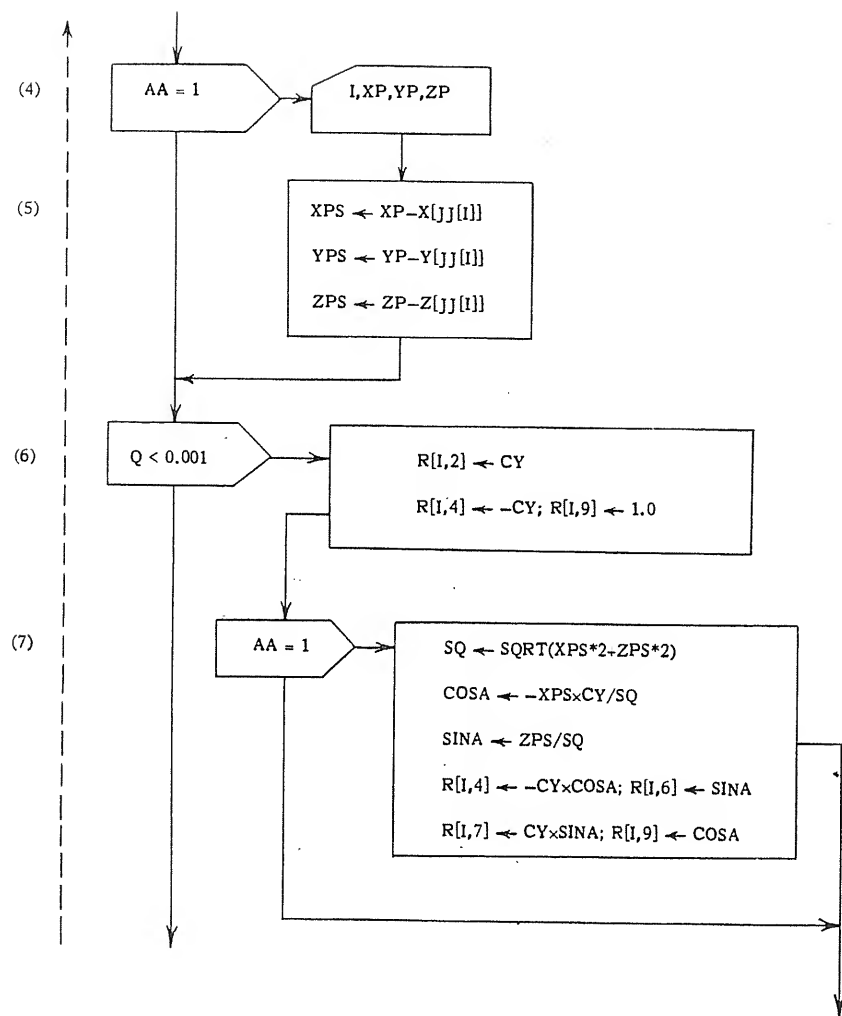


b. Coordenadas de nudos

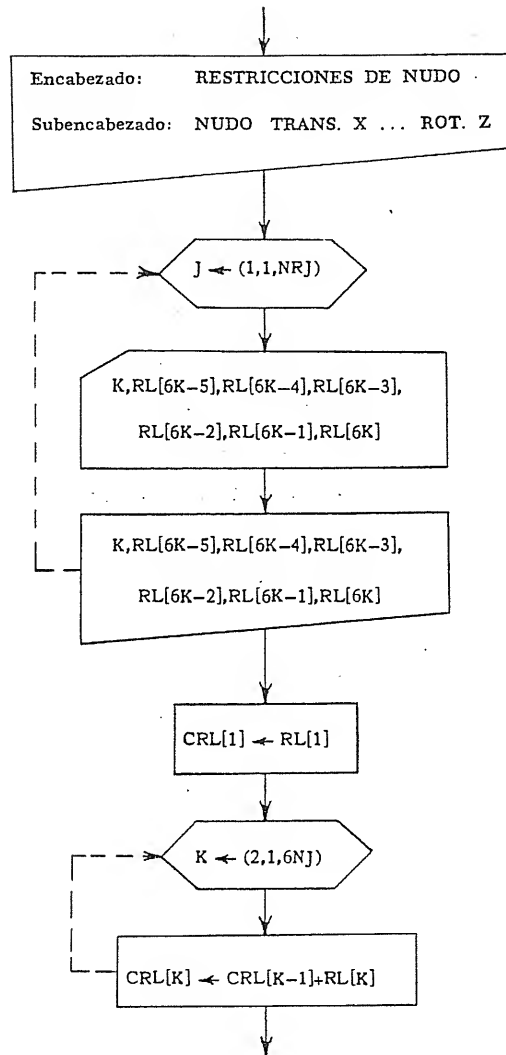


c. Designaciones, propiedades y orientaciones de los miembros



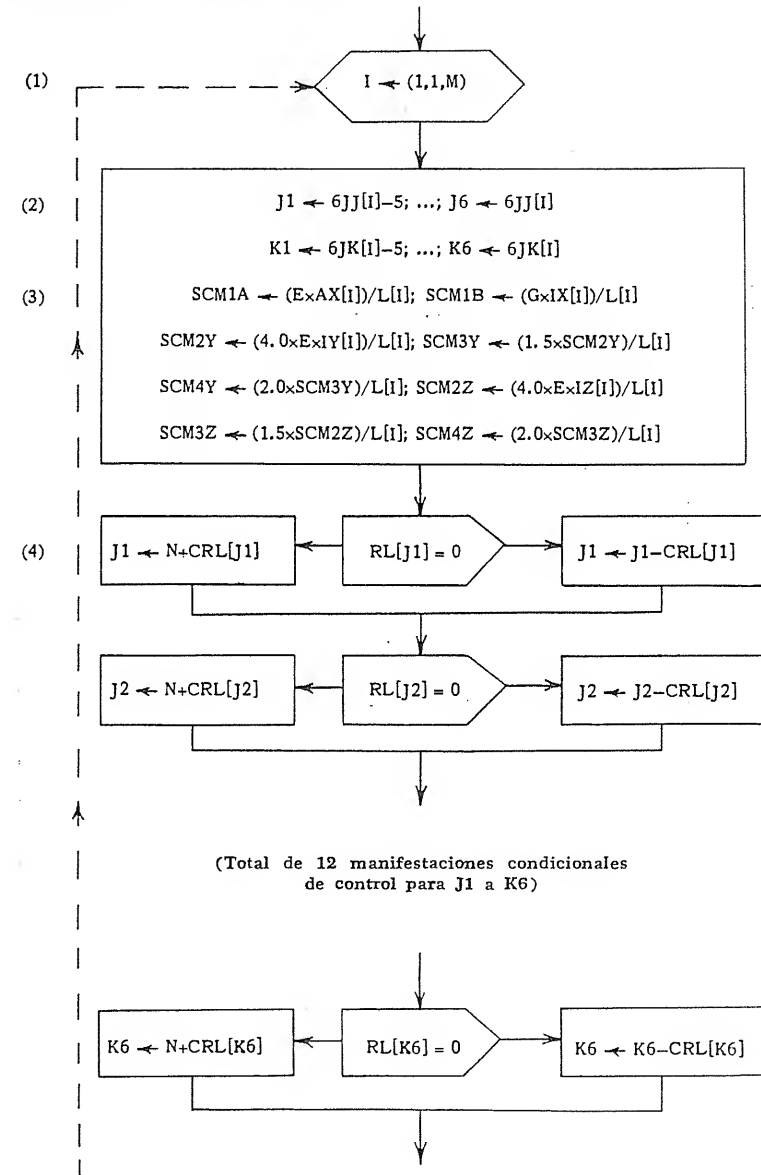


d. Lista de restricciones de nudo: lista de restricciones acumulativas

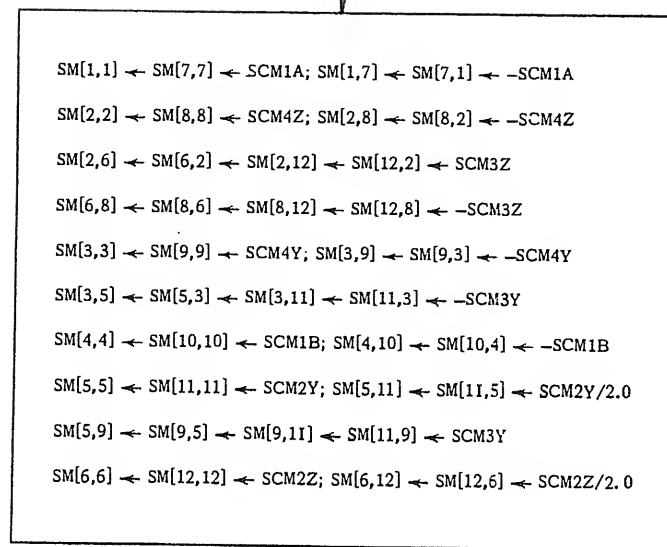


2. Matriz de rigidez de la estructura

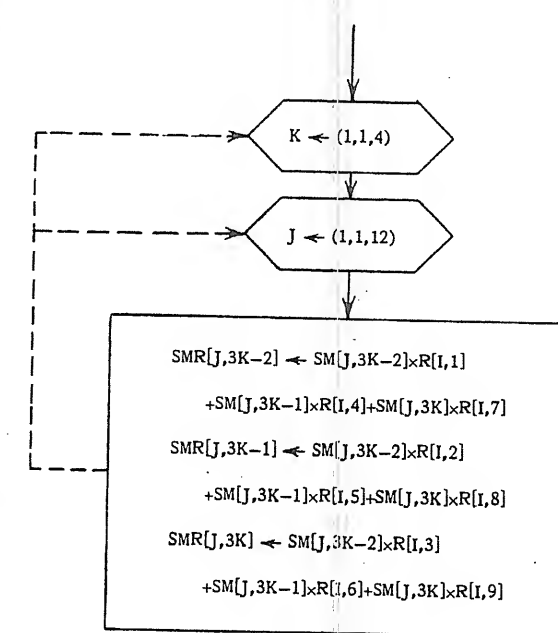
a. Generación de la matriz de rigidez



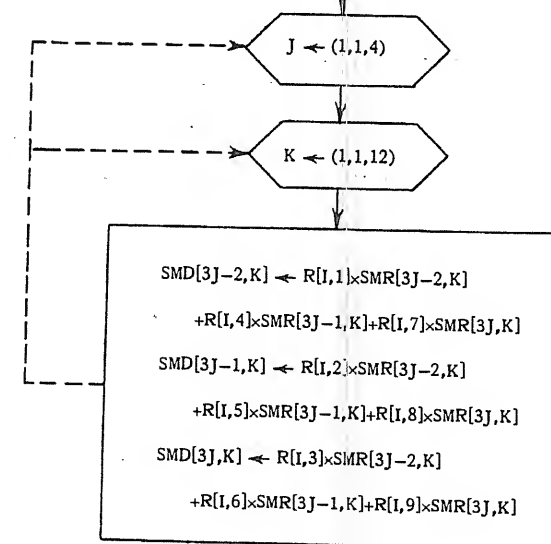
(5)

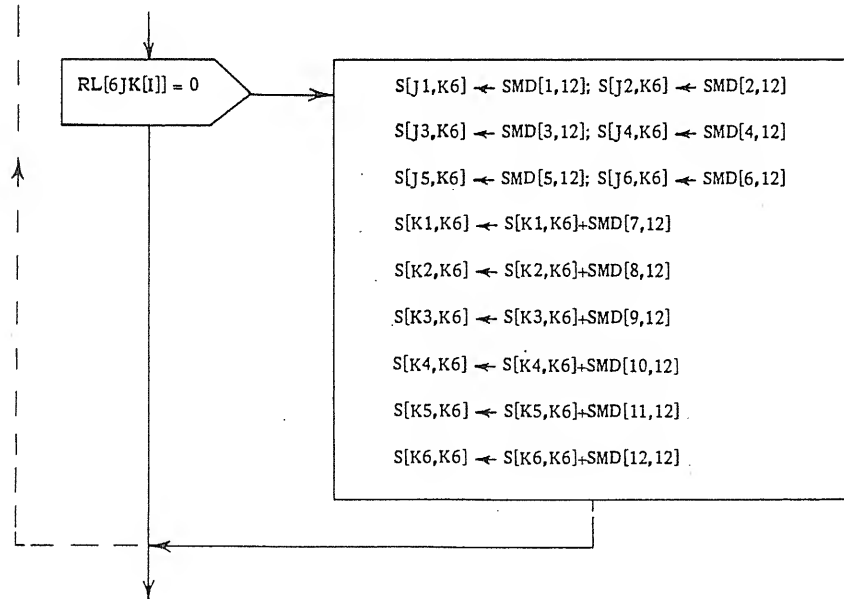
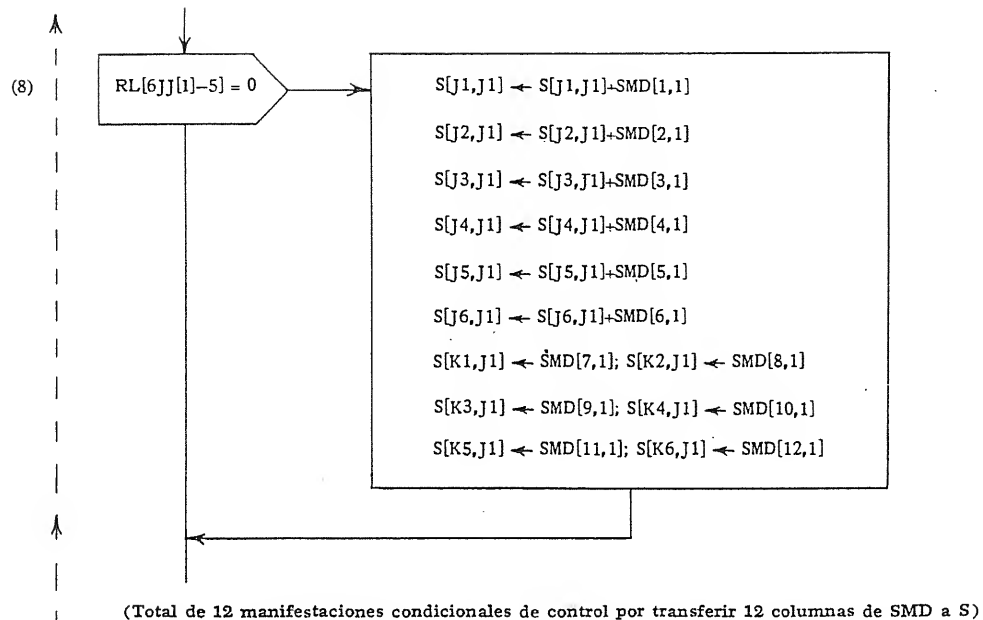


(6)



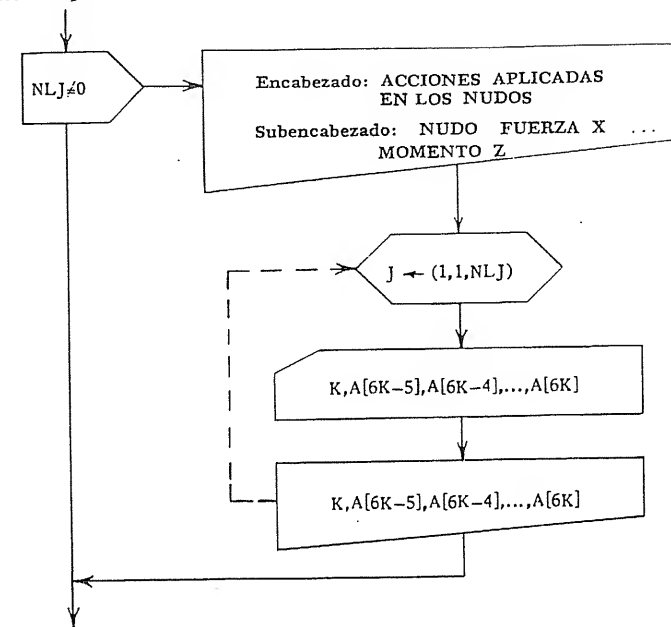
(7)



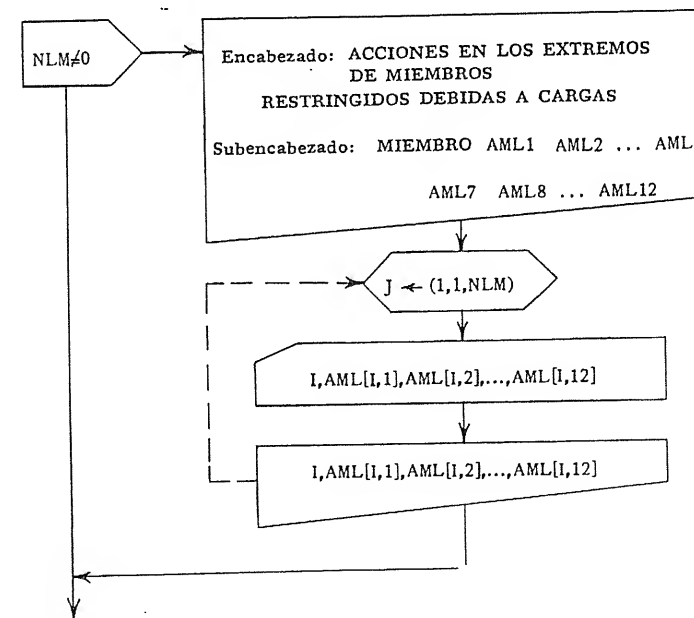


Las Secs. 2b y 3a son las mismas que en el programa de una viga continua

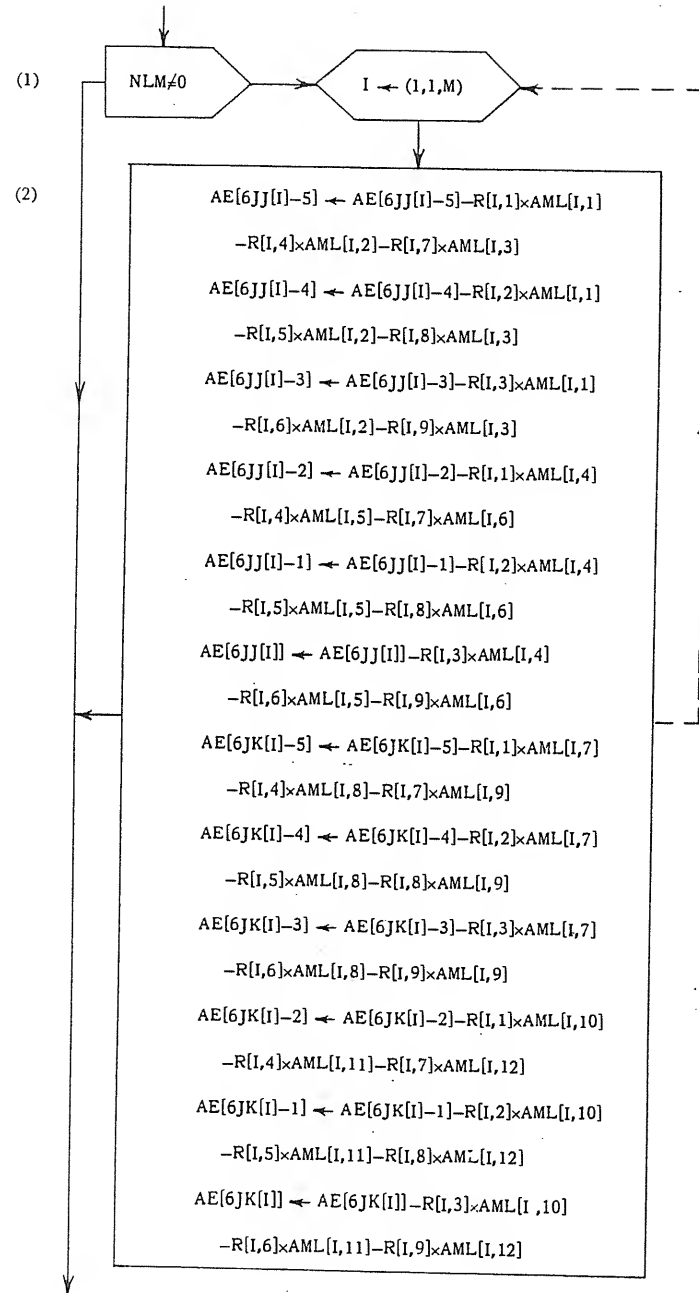
3b. Acciones aplicadas en los nudos



c. Acciones en los extremos de miembros restringidos debidas a cargas

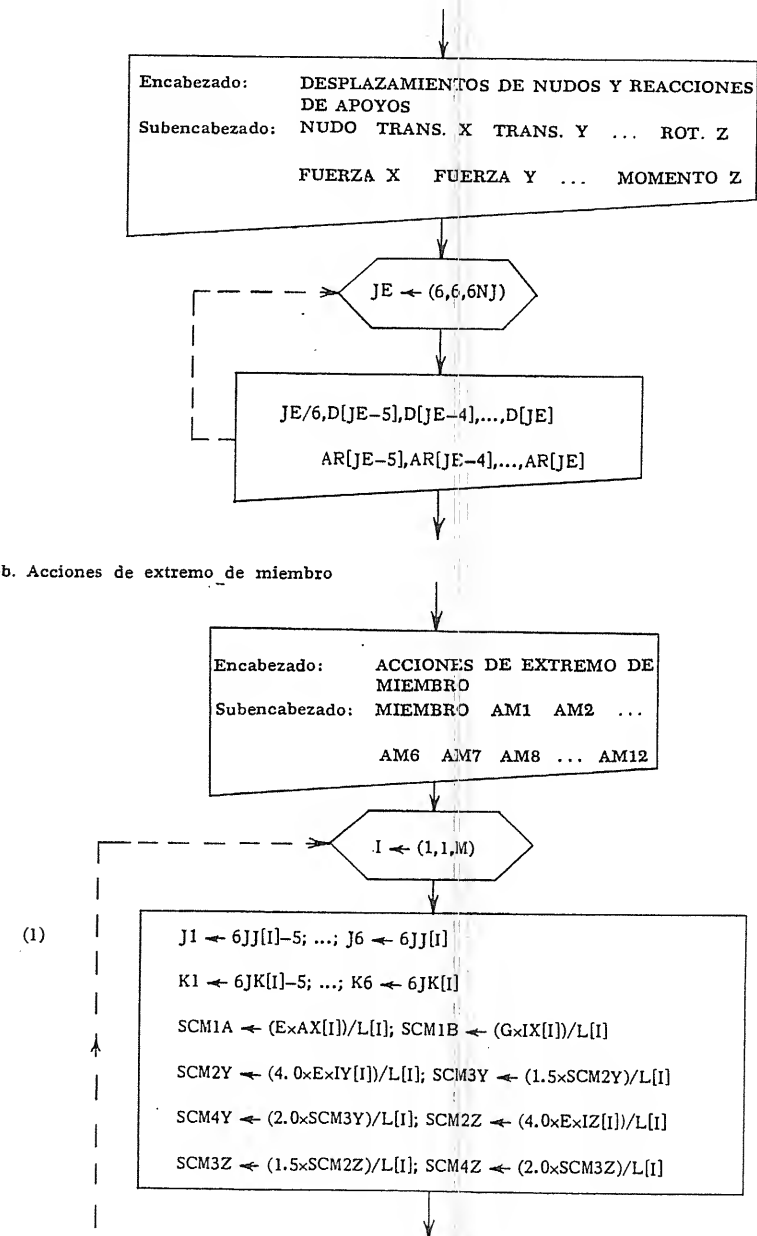


a. Cargas de nudo equivalentes



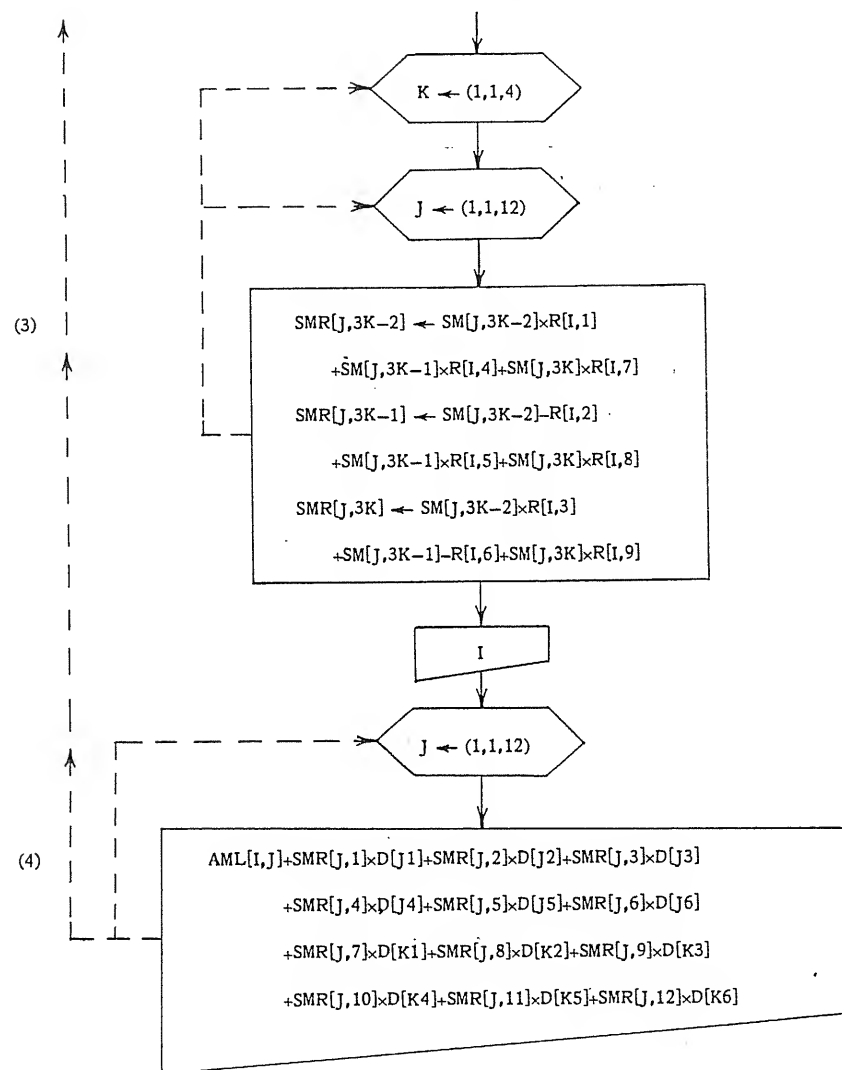
Las Secs. 4b y 5a son las mismas que en el programa de marco plano, excepto que la impresión siguiente se hace en la Sec. 5a:

5b. Acciones de extremo de miembro



(2)

(Genere SM como en la Sec. 2a; después haga lo siguiente:)



Los identificadores del tipo de número entero en el programa de marco en el espacio son los mismos que los del programa del marco plano, con la adición de los índices J_4 , J_5 , J_6 , K_4 , K_5 y K_6 y el identificador AA . La lista de variables suscritas requiere la cancelación de $CX[]$ y $CY[]$ y la adición de $Z[]$, $IX[]$, $IY[]$, $SM[,]$, $SMR[,]$ y $R[,]$.

Explicación del diagrama de flujo para el programa de marco en el espacio

Item No.

Observaciones

1. c. (1) Además de los índices y propiedades de los miembros, se lee el identificador AA . Este identificador indica si el ángulo α es cero ($AA = 0$) o si no es cero ($AA = 1$).
- (2) Se calculan, para cada miembro, las componentes de la longitud, longitud real y cosenos directores.
- (3) Se calcula el valor de Q y se almacena a fin de evitar repeticiones en los cálculos posteriores.
- (4) Si el ángulo α no es cero, se lee una segunda tarjeta de datos para el miembro I . Esta tarjeta contiene las coordenadas x , y y z para el punto p que descansa en el plano principal del miembro x_M - y_M , pero no sobre el eje del miembro.
- (5) Se calculan para el punto p , las coordenadas x_s , y_s y z_s .
- (6) Si Q es cero o muy pequeño, el miembro se toma como vertical y los elementos diferentes de cero de la matriz de rotación R se calculan para el caso de un miembro vertical que tenga $\alpha = 0$ (véase la Ec. 4-86). La matriz de rotación R de 3×3 se almacena como un vector $R[I,1], \dots, R[I,9]$, que es el I -ésimo renglón de una matriz rectangular.
- (7) Si el ángulo α es diferente de cero, se revisa R para ver si corresponde al caso de un miembro vertical con $\alpha \neq 0$ (véase la Ec. 4-96). El identificador SQ se usa como almacenamiento temporal para el término de raíz cuadrada.
- (8) Por otro lado, si Q no es pequeña (por lo tanto, el miembro no es vertical), se forma la matriz R sobre la base de $\alpha = 0$ para un miembro inclinado (véase la Ec. 4-85).
- (9) Si α es diferente de cero, se revisa R para ver si corresponde al caso de un miembro de completa orientación general en el espacio (véase la Ec. 4-90). Esta operación incluye el cálculo de las coordenadas y_γ y z_γ del punto p .
2. a. (1) Manifestación de control iterativa en miembros, para M miembros.
- (2) Se indican los seis posibles desplazamientos para los nudos J (de J_1 al J_6) y K (de K_1 al K_6) del miembro I .
- (3) Se calculan ocho constantes de rigidez para las deformaciones axial, torsional y por flexión del miembro.
- (4) Usando como guía la lista de restricciones de nudo, a los seis posibles desplazamientos, para los nudos en cada extremo del miembro, se les vuelve a poner índice según si los miembros se puedan mover o no.
- (5) Se forma, para los ejes principales del miembro, la matriz de rigidez de miembro SM , de 12×12 , para el miembro I (véase la Tabla 4-1, Art. 4.3).

- (6) Se calcula una matriz SMR como un paso intermedio en la transformación de la matriz SM a la matriz SMD , usando la Ec. (4-92). Esta matriz intermedia se calcula multiplicando posteriormente la matriz SM por la matriz de rotación transformada RT como sigue:

$$S_{MR} = S_M R_T$$

En el programa, la matriz RT no está formada realmente, pero se usa la matriz de rotación R (que se convierte en RT).

- (7) En seguida, se calcula la matriz SMD multiplicando antes la matriz SMR por el transpuesto de RT :

$$S_{MD} = R_T^T S_{MR}$$

- (8) Si el índice $6JJ[I]-5$ (el valor original de $J1$) corresponde a un grado de libertad, la primera columna de SMD se cambia a la matriz de rigidez de nudo para la estructura (véanse las Ecs. 4-100). Por otro lado, si $6JJ[I]-5$ corresponde a una restricción, la primera columna de SMD no se toma en cuenta. Los elementos de S , que incluyen el empalme de $J1$ con $J2$ hasta $J6$, son acumulativos debido a que, en general, reciben contribuciones de más de un miembro. Sin embargo, los elementos de S , que incluyen el empalme de $J1$ con $K1$ hasta $K6$, son valores únicos. Este proceso de cambio se repite para las 12 columnas de SMD .

4. a. (1) Si NLM no es igual a cero, se deben calcular y transferir las contribuciones de AE de cada miembro.
- (2) Se calculan las contribuciones a AE del producto de la matriz $[R_T]_i$ y el vector $\{A_{ML}\}_i$.
5. a. (1) Se calcula para cada miembro la misma información como en las Secs. 2a(2) y (3) previamente dadas.
- (2) La matriz SM se forma exactamente como antes en la Sec. 2a(5).
- (3) La matriz SMR se calcula como en la Sec. 2a(6).
- (4) Se imprime el número de miembro y se calculan e imprimen las doce acciones de extremo de los miembros usando la Ec. (4-103).

EJEMPLO 1: En la Fig. 5-6a se muestra un marco en el espacio que tiene tres miembros y cuatro nudos. Una observación de la figura muestra que existen doce grados de libertad (seis en cada uno de los nudos B y C) y doce restricciones (seis en cada uno de los puntos A y D). Las cargas de nudo en el marco consisten en una fuerza $2P$ en la dirección positiva de x en el punto B ; una fuerza P en la dirección negativa de y en el punto C y un par PL en el sentido negativo de z en C . El miembro BC está sujeto a una fuerza $4P$ en la dirección positiva de z aplicada a la mitad de la longitud del miembro.

El plano $x-y$ es un plano principal para los miembros AB y BC ; el miembro CD tiene un plano principal paralelo al eje y . Por lo tanto, todos los miembros tienen el ángulo α igual a cero. Se supone que todos los miembros tienen las mismas propiedades en sus secciones transversales y que los valores numéricos en el problema son los siguientes:

$$\begin{aligned} E &= 30\,000 \text{ kips/plg}^2 & P &= 1 \text{ kip} & AX &= 11 \text{ plg}^2 \\ G &= 12\,000 \text{ kips/plg}^2 & L &= 120 \text{ plg} & IX &= 83 \text{ plg}^4 \\ & & & & IY &= IZ = 56 \text{ plg}^4 \end{aligned}$$

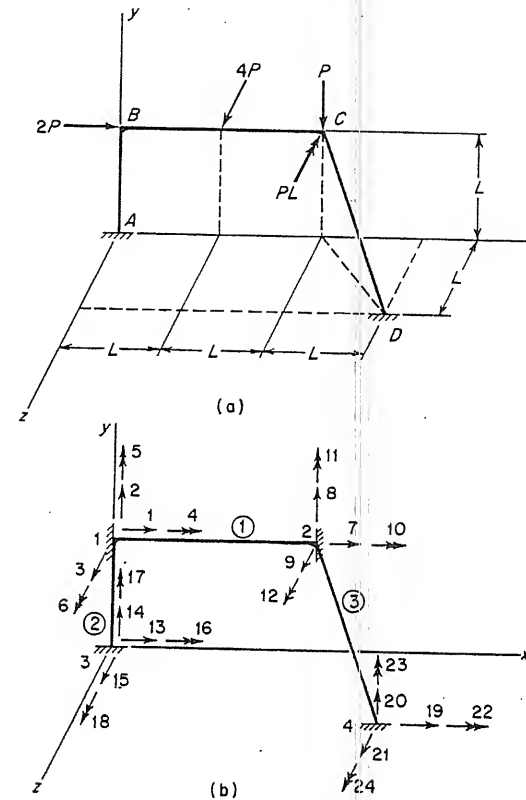


FIG. 5-6. Ej. 1 (marco en el espacio)

La Fig. 5-6b muestra a la estructura restringida con un sistema de numeración para miembros y nudos. El sistema de numeración para los desplazamientos se deriva, por supuesto, del sistema de numeración para los nudos.

Las tarjetas de datos de entrada requeridas para el programa de computación se dan en la Tabla 5-23. Nótese que el identificador AA es cero en cada tarjeta que contiene información de miembro. La Tabla 5-24 muestra el programa de computación a su salida.

EJEMPLO 2: La Fig. 5-7a muestra un marco en el espacio que tiene tres miembros, cuatro nudos, seis grados de libertad (en el nudo A) y dieciocho restricciones (seis en cada uno de los puntos B , C y D). El marco se carga en el punto A con una fuerza P en la dirección negativa de z y con un par $PL/4$ en el sentido negativo de x . Además, una fuerza en magnitud P que actúa en la dirección negativa de z se aplica a la mitad del miembro AB y una fuerza P que actúa en la dirección negativa de y se aplica en el punto medio del miembro AD . Todos los miembros en el marco tienen un plano principal x_M-y_M que contiene el punto p indicado en la Fig. 5-7a. El punto p se localiza en el plano contenido en los nudos B , C y D (esto es, el plano $x-y$).

TABLA 5-23. TARJETAS DE DATOS PARA EL EJ. 1 DE UN MARCO EN EL ESPACIO

Tipo de datos		Datos numéricos en las tarjetas							Tarjeta No.
Datos de la estructura	(a)	3	4	12	2	30000.0	12000.0		1
	(b)	1	0		120.0	0			2
		2	240.0		120.0	0			3
		3	0		0	0			4
		4	360.0		0	120.0			5
	(c)	1	1	2	11.0	83.0	56.0	56.0	0
		2	3	1	11.0	83.0	56.0	56.0	0
		3	2	4	11.0	83.0	56.0	56.0	0
	(d)	3	1	1	1	1	1	1	9
		4	1	1	1	1	1	1	10
Datos de carga	(a)	2	1						11
	(b)	1	2.0	0	0	0	0	0	12
		2	0	-1.0	0	0	0	-120.0	13
	(c)	1	0	0	-2.0	0	120.0	0	14
			0	0	-2.0	0	-120.0	0	15

Cualquier punto de la línea pA (excepto el punto A) será suficiente para definir los planos principales en este problema. Ya que un plano principal para el miembro AB es paralelo al eje y , el ángulo α se toma como cero para este miembro. Para los miembros AC y AD los planos principales se localizan dando las coordenadas del punto p .

Se supone que las propiedades de las secciones transversales de todos los miembros son las mismas y que las constantes numéricas en el problema son como sigue:

$$\begin{aligned}
 E &= 10\,000 \text{ kips/plg}^2 & P &= 5 \text{ kips} & AX &= 9 \text{ plg}^2 & IY &= 28 \text{ plg}^4 \\
 G &= 4\,000 \text{ kips/plg}^2 & L &= 96 \text{ plg} & IX &= 64 \text{ plg}^4 & IZ &= 80 \text{ plg}^4
 \end{aligned}$$

La Fig. 5-7b muestra la estructura con todos los nudos restringidos. También aparece en la figura un sistema de numeración para miembros, nudos y desplazamientos.

TABLA 5-24. PROGRAMA DE COMPUTACION A SU SALIDA PARA EL EJ. 1 DE UN MARCO EN EL ESPACIO

ANÁLISIS DE MARCOS EN EL ESPACIO

DATOS DE LA ESTRUCTURA

M	N	NJ	NR	NRJ	E	G
3	12	4	12	2	30000.0	12000.0

COORDENADAS DE LOS NUDOS

NUDO	X	Y	Z
1	0	120.0	0
2	240.0	120.0	0
3	0	0	0
4	360.0	0	120.0

DESIGNACIONES DE MIEMBRO, PROPIEDADES Y ORIENTACIONES

MIEMBRO	JJ	JK	AX	IX	IY	IZ	AA	L	CX	CY	CZ
1	1	2	11.0	83.0	56.00	56.0	0	240.0	1.000	0	0
2	3	1	11.0	83.0	56.00	56.0	0	120.0	0	1.000	0
3	2	4	11.0	83.0	56.00	56.0	0	207.8	0.577	-0.577	0.577

RESTRICCIONES DE NUDO

NUDO	TRANS. EN X	TRANS. EN Y	TRANS. EN Z	ROT. EN X	ROT. EN Y	ROT. EN Z
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1

DATOS DE CARGA

NLJ	NLM
2	1

ACCIONES APLICADAS A LOS NUDOS

NUDO	FUERZA EN X	FUERZA EN Y	FUERZA EN Z	MOMENTO EN X	MOMENTO EN Y	MOMENTO EN Z
1	2.0	0	0	0	0	0
2	0	-1.0	0	0	0	-120.0

ACCIONES EN LOS EXTREMOS DE MIEMBROS RESTRINGIDOS DEBIDAS A LAS CARGAS

MIEMBRO	AML1	AML2	AML3	AML4	AML5	AML6
	AML7	AML8	AML9	AML10	AML11	AML12
1	0	0	-2.0	0	120.0	0
	0	0	-2.0	0	-120.0	0

DESPLAZAMIENTOS DE NUDO Y REACCIONES DE APOYO

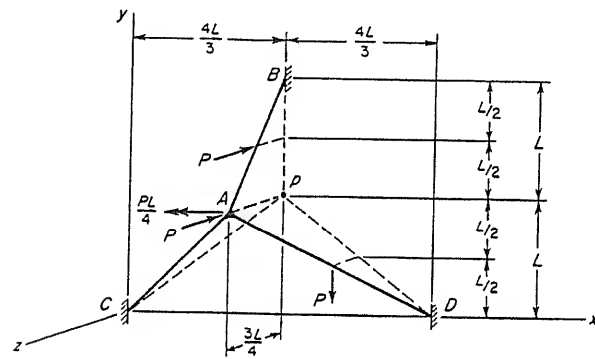
NUDO	TRANS. EN X	TRANS. EN Y	TRANS. EN Z	ROT. EN X	ROT. EN Y	ROT. EN Z
	FUERZA EN X	FUERZA EN Y	FUERZA EN Z	MOMENTO EN X	MOMENTO EN Y	MOMENTO EN Z
1	-0.1528	-0.0002436	0.6263	0.007536	-0.005463	0.002674
	0	0	0	0	0	0
2	-0.1542	0.4562	0.6139	0.003584	0.005748	-0.002701
	0	0	0	0	0	0

TABLA 5-24. (Continuación)

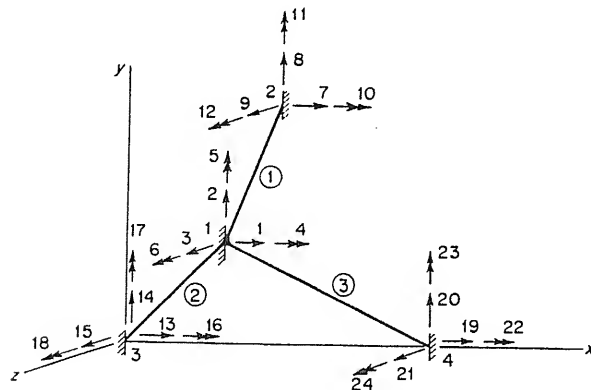
3	0	0	0	0	0	0
4	-0.09	-0.67	-2.03	-227.41	45.34	-32.11
	0	0	0	0	0	0
	-1.91	1.67	-1.97	-52.22	-44.54	30.99

ACCIONES DE EXTREMO DE LOS MIEMBROS

MIEMBRO	AM1	AM2	AM3	AM4	AM5	AM6
	AM7	AM8	AM9	AM10	AM11	AM12
1	1.91	-0.67	-2.03	16.40	45.34	-42.75
2	-1.91	0.67	-1.97	-16.40	-37.71	-118.00
	-0.67	0.09	-2.03	45.34	227.41	-32.11
3	0.67	-0.09	2.03	-45.34	16.40	42.75
	3.20	0.22	0.04	-13.46	36.67	-13.01
	-3.20	-0.22	-0.04	13.46	-45.03	58.84



(a)



(b)

FIG. 5-7. Ej. 2 (marco en el espacio)

Los datos de entrada para este problema se indican en la Tabla 5-25. Nótese que las tarjetas que contienen información de miembro para los miembros 2 y 3 son seguidas cada una por una tarjeta que da las coordenadas del punto p .

El cálculo de las acciones A_{ML} en los extremos de los miembros restringidos debidas a las cargas (las últimas cuatro tarjetas de datos) requiere una explicación en este ejemplo. Las acciones de extremo A_{ML} para el miembro 1 se obtienen fácilmente debido a que la carga P aplicada a la mitad descansa en el plano principal para el miembro. La Fig. 5-8 muestra todas las acciones de extremo para este miembro. Nótese que la orientación de los ejes del miembro en la figura resulta de la serie de rotaciones β y γ mostradas en la Fig. 4-38 (véase el Art. 4.22).

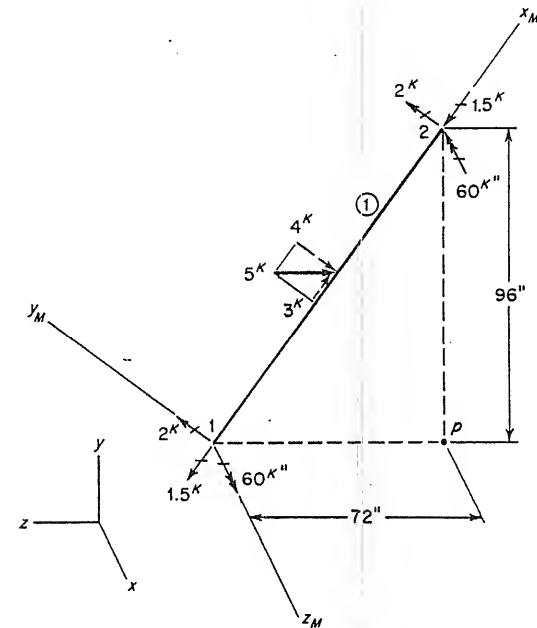


FIG. 5-8. Acciones de restricción en los extremos del miembro 1

Por otro lado, la carga P aplicada al miembro 3 no se encuentra en un plano principal del miembro. A fin de calcular las acciones de extremo A_{ML} para este miembro, se deben establecer las componentes de la fuerza P en las direcciones de los ejes del miembro. Un método para hacer esto es usar la técnica de rotación de ejes representada por la Ec. (4-57) en el Art. 4.15; por lo tanto:

$$A_M = RA_S \quad (4-57)$$

repetida

La Fig. 5-9 muestra los ejes de miembro para el miembro 3, así como la carga P aplicada en la dirección negativa de y . La matriz de rotación R para los

TABLA 5-25. TARJETAS DE DATOS PARA EL EJ. 2 DE UN MARCO EN EL ESPACIO

Tipo de datos		Datos numéricos en las tarjetas								Tarjeta No.
Datos de la estructura	(a)	3	4	18	3	10000.0	4000.0			1
	(b)	1	128.0		96.0	72.0				2
		2	128.0		192.0	0				3
		3	0		0	0				4
		4	256.0		0	0				5
	(c)	1	1	2	9.0	64.0	28.0	80.0	0	6
		2	3	1	9.0	64.0	28.0	80.0	1	7
		2	128.0		96.0	0				8
		3	1	4	9.0	64.0	28.0	80.0	1	9
		3	128.0		96.0	0				10
		(d)	2	1	1	1	1	1		
	3		1	1	1	1	1			12
	4		1	1	1	1	1	1		13
Datos de carga	(a)	1	2							14
	(b)	1	0	0	-5.0	-120.0	0	0		15
	(c)	1	-1.5	2.0	0	0	0	60.0		16
			-1.5	2.0	0	0	0	-60.0		17
		3	-1.368	0.616	2.0	0	-87.727	27.0		18
			-1.368	0.616	2.0	0	87.727	-27.0		19

ejes del miembro se puede obtener ya sea de la geometría de la figura o de la Ec. (4-90) en el Art. 4.24 (usando, si se desea, las coordenadas del punto p). Esta matriz de rotación es la siguiente:

$$R = \begin{bmatrix} \frac{16}{\sqrt{481}} & -\frac{12}{\sqrt{481}} & -\frac{9}{\sqrt{481}} \\ -\frac{36}{5\sqrt{481}} & \frac{27}{5\sqrt{481}} & -\frac{20}{\sqrt{481}} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{bmatrix} \quad (a)$$

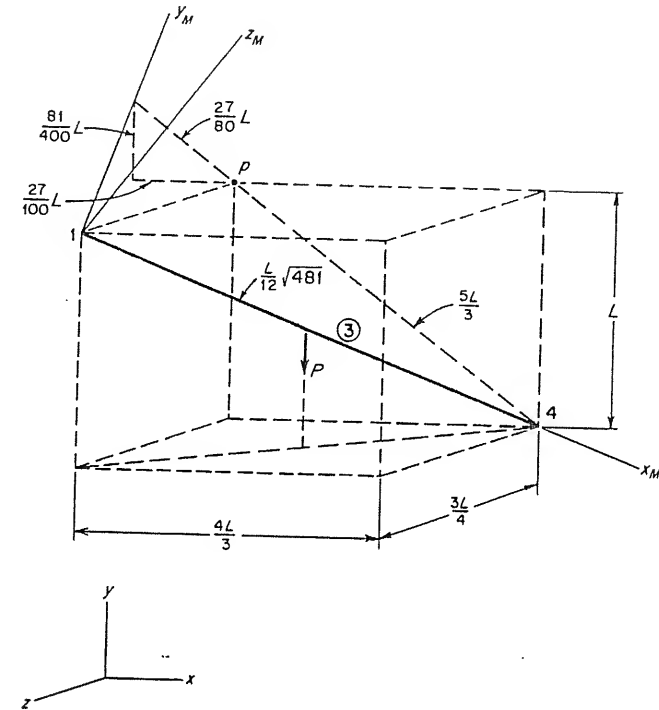


FIG. 5-9. Ejes de miembro para el miembro 3

Ya que la carga aplicada P es de 5 kips, el vector A_s se convierte en:

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (b)$$

La sustitución de las expresiones (a) y (b) en la Ec. (4-57) produce el vector A_M como sigue:

$$A_M = \begin{bmatrix} \frac{60}{\sqrt{481}} \\ -\frac{27}{\sqrt{481}} \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.736 \\ -1.231 \\ -4.000 \end{bmatrix} \quad (c)$$

Los elementos en este vector son las componentes de la carga aplicada en las direcciones de los ejes del miembro. Las acciones de extremo A_{ML} , producidas

por estas fuerzas que actúan en el miembro 3, se indican en los últimos dos renglones de la Tabla 5-25.

La Tabla 5-26 muestra los resultados finales del programa de computación.

TABLA 5-26. RESULTADOS FINALES PARA EL EJ. 2 DE UN MARCO EN EL ESPACIO

DESPLAZAMIENTOS DE NUDO Y REACCIONES DE APOYO

NUDO	TRANS. EN X	TRANS. EN Y	TRANS. EN Z	ROT. EN X	ROT. EN Y	ROT. EN Z
	FUERZA EN X	FUERZA EN Y	FUERZA EN Z	MOMENTO EN X	MOMENTO EN Y	MOMENTO EN Z
1	-0.0002176	-0.004062	-0.01674	-0.005202	0.0001870	-0.004495
2	0	0	0	0	0	0
3	-0.41	-2.98	7.01	-134.64	-14.60	-9.34
4	0	0	0	0	0	0
	3.70	2.61	1.51	-8.18	28.39	-3.62
	0	0	0	0	0	0
	-3.29	5.37	1.48	-63.93	-16.89	-98.43

ACCIONES DE EXTREMO DE LOS MIEMBROS

MIEMBRO	AM1 AM7	AM2 AM8	AM3 AM9	AM4 AM10	AM5 AM11	AM6 AM12
1	3.59	0.18	0.41	6.07	-32.49	-84.00
2	-6.59	3.82	-0.41	-6.07	-16.23	-134.64
	4.74	0.48	-0.13	8.08	7.61	27.62
3	-4.74	-0.48	0.13	-8.08	15.39	57.44
	3.21	0.18	1.68	-3.00	-50.18	-24.96
	-5.95	1.05	2.32	3.00	106.59	-51.86

CAPÍTULO 6

TOPICOS ADICIONALES PARA EL METODO DE LA RIGIDEZ

6.1. Introducción. Las técnicas descritas en el Cap. 4 para usar el método de la rigidez y los correspondientes programas de computación (presentados en el Cap. 5), se aplican a estructuras reticulares que tienen miembros prismáticos y sujetos únicamente a los efectos de cargas. Sin embargo, las técnicas se pueden extender rápidamente a fin de tomar en cuenta muchas otras consideraciones en los programas de computación. El propósito de este capítulo es describir cómo se deben tratar algunas de las más importantes consideraciones. Primero, los efectos de cambios de temperatura y deformaciones previas, que se describieron en el Cap. 2 desde el punto de vista del análisis manual, nuevamente se vuelven a discutir en el siguiente artículo con el propósito de incluirlas en un programa de computación. Los siguientes dos artículos (6.3 y 6.4) tratan de los efectos de cargas entre nudos y métodos para determinar las acciones internas y desplazamientos en puntos intermedios a lo largo de las longitudes de los miembros. Entonces se discuten varios tópicos relativos a los apoyos de estructuras reticulares (Arts. 6.5 hasta 6.7); estos tópicos incluyen desplazamientos de apoyo, apoyos inclinados y apoyos elásticos. Los artículos restantes en el capítulo tratan exclusivamente de temas cuyos efectos primarios son alterar las rigideces y las acciones de empotramiento para miembros individuales. En esta categoría también se incluyen miembros que no son prismáticos, discontinuidades en miembros, conexiones elásticas, deformaciones por cortante e interacciones entre efectos axiales y de flexión.

Es la intención del autor que el material en este capítulo sea suplementario a la materia de los capítulos anteriores. Por lo tanto, no hay intención de presentar explicaciones completas y detalladas; al contrario, la intención es sugerir tópicos adicionales que el lector interesado pueda desarrollar más tarde.

6.2. Temperatura y deformación previa. Los efectos de temperatura y deformación previa fueron considerados en las soluciones a

mano del Cap. 2. Estos efectos se pueden incorporar rápidamente en un análisis orientado al cálculo por computadora, tratándolos en una forma análoga al procedimiento descrito en el Cap. 4 (Art. 4.5) para cargas sobre miembros, esto es, reemplazándolas por cargas equivalentes de nudo. Tanto los efectos de cambios de temperatura como los de deformación previa producirán acciones de empotramiento en los miembros de una estructura restringida. En las Tablas B-2 y B-3 del Apéndice B se indican fórmulas para acciones de empotramiento de esta naturaleza. Tales acciones de extremo se pueden manejar en la misma forma que las debidas a las cargas sobre miembros; en otras palabras, se pueden enumerar en las matrices A_{MT} y A_{MP} , respectivamente, en una forma análoga a las acciones de empotramiento enumeradas debidas a las cargas en la matriz A_{ML} . Entonces, la suma de los tres efectos se puede combinar en una sola matriz A_{MS} (véase la Ec. 2-30). Por supuesto, en un programa de computación se puede desear colocar todos los términos directamente en la matriz A_{MS} , sin necesidad de formar separadamente las matrices A_{ML} , A_{MT} y A_{MP} . Siguiendo este paso, las acciones de empotramiento en la matriz A_{MS} se convierten a cargas equivalentes de nudo, y de aquí en adelante el análisis prosigue según se describió en el Cap. 4. Todos los desplazamientos D de nudo, reacciones A_R y acciones de extremo de los miembros A_M se calculan en la misma forma que en el caso de las cargas.

6.3. Cargas entre nudos. En los Caps. 4 y 5 se manejaron indirectamente los efectos de cargas que actúan sobre miembros haciendo uso de las acciones de empotramiento producidas por tales cargas. También es posible extender los programas de computación del Cap. 5 para aceptar directamente esas cargas como datos de entrada; algunas de las técnicas factibles para hacer esto se cubren en la siguiente discusión.

De las discusiones anteriores de ejes orientados con el miembro y ejes orientados con la estructura, es obvio que las cargas que actúan sobre miembros se pueden descomponer en componentes paralelas a cualesquiera de los juegos de ejes. En general, es conveniente descomponer las cargas de miembros en componentes paralelas a los ejes de miembro (x_M , y_M y z_M). Las cargas sobre vigas y estructuras de parrilla están, generalmente, alineadas con los ejes de miembro debido a su propia naturaleza, pero las orientaciones de cargas sobre marcos planos y en el espacio pueden ser completamente generales. Por lo tanto, se puede requerir un esfuerzo preliminar para descomponer las cargas en componentes paralelas a los ejes de miembro, como se demostró para el miembro de un marco en el espacio en el Ej. 2 del Art. 5.9.

Frecuentemente sucede que las cargas sobre miembros de armaduras se expresan con respecto a los ejes orientadas con la estructura, y puede ser más conveniente manejarlas en esa forma, que descomponerlas en componentes paralelas a los ejes de miembro. La razón para esta conclusión es que las acciones de extremos articulados en una armadura restringida se calculan fácilmente a pesar de las orientaciones de los miembros (véase la Tabla B-5 del Apéndice B). En tal caso, los valores negativos de las acciones de extremos articulados se pueden tomar como cargas equivalentes de nudo, actuando en las direcciones de los ejes de la estructura, y el análisis se puede llevar a cabo en la misma forma desde aquí en adelante. La desventaja de este camino es el hecho de que las acciones finales de extremo de los miembros no incluirán las acciones iniciales de extremos articulados A_{ML} en las direcciones de los ejes de miembro. Por lo tanto, las únicas acciones de extremo A_M de miembro que se calculan son las fuerzas axiales en los miembros debidas a las cargas equivalentes de nudo. Esta limitación no es una desventaja seria en el análisis de armaduras, debido a que sus características principales se relacionan con los efectos de cargas (reales o equivalentes) en los nudos.

Ahora considérense de nuevo aquellas estructuras para las que las cargas de miembro se han proyectado en componentes paralelas a los ejes de miembro. La tarea de incorporar las cargas directamente en el método de análisis de la rigidez se facilitará si se expresan en forma discreta (esto es, como fuerzas concentradas y pares). Cualesquier cargas distribuidas se pueden aproximar por una serie de cargas concentradas que producen esencialmente las mismas acciones y desplazamientos en la estructura. Si se sigue este camino, sólo un cierto número de cargas concentradas será posible en cualquier punto de un miembro. Por ejemplo, en un punto de una viga puede existir ya sea una fuerza concentrada A_1 en la dirección de y_M o un par A_2 en el sentido de z_M , como se muestra en la Fig. 6-1a. Cada una de estas cargas producirá cuatro acciones de empotramiento de los tipos indicados en la figura. Similarmente, existen tres posibles fuerzas concentradas sobre un miembro de una armadura plana (véase la Fig. 6-1b) y cuatro posibles acciones de extremos articulados. La categoría más general de un miembro (un miembro de un marco en el espacio) se ilustra en la Fig. 6-1c. Pueden existir seis componentes de carga en cualquier punto de tal miembro, produciendo doce tipos de acciones de empotramiento, según se muestra en la figura.

Si las cargas sobre un miembro se *discretizan* según se describió arriba, existen varios métodos por los cuales se pueden incorporar directamente en el análisis de una estructura. El camino más sim-

ple es suponer que existe un nudo en todos los puntos de carga en el miembro y entonces analizar a la estructura como si estuviese sujeta únicamente a cargas de nudo. Este método es conveniente para estructuras con nudos rígidos, pero no puede ser adaptado fácilmente a armaduras; además, en este método las cargas deben tener la orien-

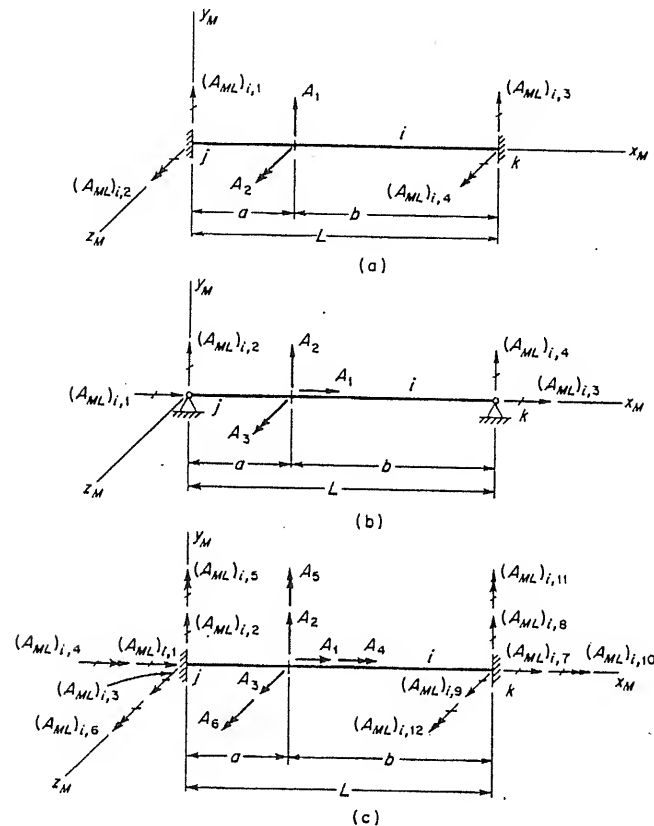


FIG. 6-1. Cargas concentradas en miembros: (a) miembro de una viga, (b) miembro de una armadura plana y (c) miembro de un marco en el espacio

tación de la estructura en lugar de la orientación de miembro. La principal desventaja de este método es que el número de nudos en la estructura puede hacerse excesivo si existen cargas sobre muchos miembros.

Un segundo método consiste en analizar cada miembro cargado como una estructura separada, utilizando el método de análisis de la rigidez y entonces incorporar los resultados de cada subanálisis en el análisis total de la estructura. Por ejemplo, la viga restringida

de la Fig. 6-1a, podría analizarse como una estructura consistente de dos miembros de longitudes a y b , respectivamente, y que tiene dos grados de libertad en el punto de aplicación de las cargas. Las acciones de empotramiento A_{ML} para el miembro i serán las reacciones determinadas en el subanálisis de la viga considerada como dos miembros. Esta forma de razonamiento se puede generalizar para incluir cualquier tipo de estructura reticular y cualquier número de puntos de carga en un miembro.

Una tercera forma de solución al problema involucra el uso de matrices de cambio para acciones de empotramiento debidas a las cargas unitarias sobre los miembros. Las relaciones entre las acciones de extremo y las cargas actuando en un punto sobre un miembro se pueden expresar por la siguiente ecuación:

$$A_{MLi} = T_{MLi} A_i \quad (6-1)$$

En la Ec. (6-1), A_i es un vector columna de cargas concentradas que puede existir en cualquier punto en el miembro i . Por ejemplo, la viga dibujada en la Fig. 6-1a tiene las cargas concentradas A_1 y A_2 asociadas con un punto arbitrario en el miembro. Por lo tanto, para este tipo de estructura:

$$A_i = \{A_1, A_2\} \quad (6-2)$$

La matriz A_{MLi} en la Ec. (6-1), consiste en un vector columna de acciones de empotramiento producidas por las cargas A_i . Para una viga, este vector es el siguiente (véase la Fig. 6-1a):

$$A_{MLi} = \{(A_{ML})_{i,1}, (A_{ML})_{i,2}, (A_{ML})_{i,3}, (A_{ML})_{i,4}\} \quad (6-3)$$

La matriz T_{MLi} es una matriz de cambio para las acciones A_{MLi} en los extremos del miembro restringido i debidas a los valores unitarios de las acciones A_i . Los elementos de tal matriz de cambio se pueden obtener de las fórmulas dadas en la Tabla B-1 del Apéndice B, y para una viga la matriz será el siguiente arreglo de 4×2 (omitiendo el suscrito i):

$$T_{ML} = \begin{bmatrix} -\frac{b^2}{L^3}(3a+b) & \frac{6ab}{L^3} \\ -\frac{ab^2}{L^2} & \frac{b}{L^2}(2a-b) \\ -\frac{a^2}{L^3}(a+3b) & -\frac{6ab}{L^3} \\ \frac{a^2b}{L^2} & \frac{a}{L^2}(2b-a) \end{bmatrix} \quad (6-4)$$

El vector final de las acciones de extremo de miembro A_{ML} , para un miembro con cargas actuando en varios puntos, se obtiene aplicando la Ec. (6-1) para todos los puntos en el miembro donde exista carga y en seguida sumando los resultados.

Se pueden desarrollar matrices de cambio similares a la Ec. (6-4) para todos los tipos de estructuras reticulares. Para un miembro de una armadura plana sujeto a cargas según se indica en la Fig. 6-1b, la matriz de cambio T_{ML} para acciones de extremos articulados será del orden 4×3 , como sigue:

$$T_{ML} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{a}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

Similarmente, se pueden encontrar con facilidad las matrices de cambio para los otros tipos de estructuras reticulares. Tales matrices de cambio se pueden incorporar en un programa de computación con el objeto de calcular, automáticamente, las acciones A_{ML} en los extremos de miembros restringidos debidas a las cargas en un número discreto de puntos. Una vez que se ha hecho esto, el cálculo de las cargas equivalentes de nudo y la parte restante del análisis se hace como en la forma anterior.

6.4. Acciones y desplazamientos entre nudos. Por los métodos del Cap. 4 se pueden obtener los desplazamientos de extremo D_M y las acciones de extremo A_M para todos los miembros de una estructura. Además, también pueden ser de interés las acciones y los desplazamientos en puntos intermedios a lo largo de las longitudes de los miembros. Existen varios métodos por los cuales se pueden calcular tales acciones y desplazamientos. Por ejemplo, como se mencionó en el Art. 2.8, se pueden determinar por cálculos a mano una vez que las acciones y desplazamientos en los extremos han sido determinados. Las acciones internas se determinan aplicando principios de equilibrio estático a una porción del miembro tomada como cuerpo libre, y los desplazamientos se pueden calcular empleando teorías elementales sobre deflexión (tales como los teoremas de momentos de áreas).

Los métodos matriciales son también adecuados para este propósito, y la modificación más simple del método de análisis de la

rigidez es suponer que existe un nudo en todos los puntos donde se desean las acciones y desplazamientos. Los desplazamientos de nudo y las acciones de miembro resultantes del análisis incluirán los desplazamientos y las acciones internas en los puntos de interés. En este método los desplazamientos automáticamente serán en las direcciones de los ejes de la estructura. Como anteriormente se mencionó, la desventaja de este método es que el número de nudos puede hacerse muy grande para manejarse con éxito.

Otro método matricial es analizar a un miembro dado como si fuese un subproblema dentro del análisis total de toda la estructura. El miembro restringido se puede dividir en segmentos y analizarlo por el método de la rigidez, tratando los desplazamientos de los extremos del miembro segmentado como si fuesen desplazamientos de apoyo. Este subanálisis producirá los mismos resultados que el método anterior.

El tercer método matricial toma en cuenta el uso de matrices de cambio para acciones y desplazamientos en puntos intermedios. Este método será descrito para vigas, pero el método es generalmente aplicable a todos los tipos de estructuras reticulares. La tarea de calcular las acciones y desplazamientos en puntos intermedios se puede dividir en dos pasos. El primero consiste en calcular las acciones y desplazamientos en el miembro restringido debidas a las cargas (u otros efectos) que actúan en el miembro. El segundo paso toma en cuenta el cálculo de las acciones y desplazamientos adicionales debidas a los desplazamientos de los extremos del miembro. En ambos pasos, las acciones y desplazamientos ordinariamente serían calculadas con respecto a los ejes del miembro, pero estas cantidades se pueden siempre convertir a los ejes de la estructura por una rotación apropiada de ejes. Se considerará primero el cálculo de las acciones en vigas, y en seguida se discutirá el tema de determinar los desplazamientos.

La Fig. 6-2a muestra un miembro restringido i de una viga con un punto de carga (donde actúan A_1 y A_2) a una distancia a del extremo j . Un segundo punto, donde se van a calcular las acciones y los desplazamientos, se localiza a una distancia x_M del extremo j . El vector A_{MLi} , de acciones de empotramiento debidas a las acciones A_1 y A_2 , se puede calcular como se describió en el artículo anterior (véase la Ec. 6-1), haciendo uso de la matriz de cambio T_{ML} (Ec. 6-4). Los primeros dos elementos del vector A_{MLi} son las acciones en el extremo j del miembro; los últimos dos elementos son las acciones en el extremo k (véase la Fig. 6-2a). La Fig. 6-2b muestra un diagrama de cuerpo libre para el segmento de longitud x_M , suponiendo que $x_M \leq a$. La figura muestra también las acciones internas A_{MXL1} y A_{MXL2} en el punto de interés, actuando en sus sentidos posi-

vos. La convención de signos adoptada aquí es que las acciones internas en el extremo de un segmento que está hacia el extremo k del miembro, son positivas cuando actúan en las direcciones positivas de los ejes del miembro.

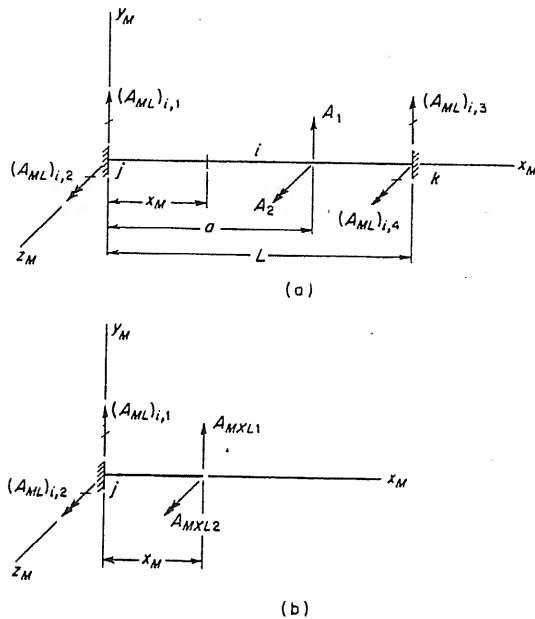


FIG. 6-2. Acciones de una viga: (a) acciones aplicadas y (b) acciones internas

Las acciones internas A_{MXL} se pueden calcular del vector de 4×1 de acciones de empotramiento A_{ML} haciendo uso de la matriz de cambio T_{AXJ} como sigue (omitiendo el suscrito i):

$$A_{MXL} = T_{AXJ} A_{ML} \quad (6-6)$$

Los elementos de esta matriz de cambio se pueden obtener por observación de la Fig. 6-2b:

$$T_{AXJ} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_M & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6-7)$$

La mitad izquierda de la matriz de cambio T_{AXJ} consiste de acciones en el punto de interés debidas a las acciones unitarias de restricción en el extremo j del miembro. La mitad a la derecha consiste de ceros, puesto que las acciones A_{ML} en el extremo k del miembro no intervienen en los cálculos. La matriz T_{AXJ} es válida únicamente para puntos en la viga en los que $x_M \leq a$. Si el punto de interés se localiza de tal forma que $x_M \geq a$, en su lugar se pueden usar las ac-

ciones de empotramiento en el extremo k y se calculan las acciones A_{MXL} usando una matriz de cambio T_{AXK} :

$$A_{MXL} = T_{AXK} A_{ML} \quad (6-8)$$

en donde la matriz de cambio T_{AXK} es la siguiente:

$$T_{AXK} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L - x_M & 1 \end{bmatrix} \quad (6-9)$$

Los elementos en la mitad derecha de esta matriz son acciones en el punto de interés debidas a las acciones unitarias de restricción en el extremo k del miembro.

Las Ecs. (6-6) y (6-8) se pueden combinar en una ecuación con el fin de calcular simultáneamente las acciones internas en ambos lados del nudo de carga; por lo tanto,

$$A_{MXL} = T_{AX} A_{ML} \quad (6-10)$$

El vector A_{MXL} en la Ec. (6-10) consiste de las acciones en dos puntos de interés, uno en cada lado del punto de carga, como se indica por los puntos 1 y 2 en la Fig. 6-3a. El arreglo de la matriz de cambio T_{AX} es, por lo tanto, como sigue:

$$T_{AX} = \begin{bmatrix} T_{AXJ} \\ T_{AXK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{M1} & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L - x_{M2} & 1 \end{bmatrix} \quad (6-11)$$

en la que x_{M1} es la distancia del extremo j al punto 1, y x_{M2} es la distancia al punto 2. Por lo tanto, se pueden calcular las acciones a uno u otro lado del punto de carga, usando ya sea la Ec. (6-6) o la Ec. (6-8); alternatively, se pueden calcular simultáneamente, usando la Ec. (6-10).

De la sustitución de la Ec. (6-1) en la Ec. (6-10) resultan las acciones internas en términos de la matriz de cambio T_{ML} y del vector A , como sigue:

$$A_{MXL} = T_{AX} T_{ML} A \quad (6-12)$$

Si existen varios puntos a los cuales se aplican cargas, la expresión para A_{MXL} se convierte en

$$A_{MXL} = \sum (T_{AX} T_{ML} A) \quad (6-13)$$

en donde la suma es llevada a cabo para todos los puntos de carga.

La Ec. (6-13) da las acciones en los puntos de interés producidas por cargas que actúan en el miembro restringido. Ocurren acciones

adicionales debido a los desplazamientos de los extremos del miembro. Estas acciones se pueden calcular como sigue:

$$\mathbf{A}_{MXD} = \mathbf{T}_{AX} \mathbf{S}_M \mathbf{D}_M \quad (6-14)$$

En esta ecuación, la matriz \mathbf{A}_{MXD} es un vector de acciones en dos puntos de interés producidas por los desplazamientos \mathbf{D}_M en los extremos del miembro; \mathbf{S}_M es la matriz de rigidez de miembro; y \mathbf{T}_{AX} es dada por la Ec. (6-11).

La suma de las Ecs. (6-13) y (6-14) produce el vector de acción total \mathbf{A}_{MX} en los dos puntos de interés:

$$\mathbf{A}_{MX} = \mathbf{A}_{MXL} + \mathbf{A}_{MXD} \quad (6-15)$$

o,

$$\mathbf{A}_{MX} = \sum (\mathbf{T}_{AX} \mathbf{T}_{ML} \mathbf{A}) + \mathbf{T}_{AX} \mathbf{S}_M \mathbf{D}_M \quad (6-16)$$

Para el caso especial de un solo punto de carga no se requiere el proceso de suma y la matriz \mathbf{T}_{AX} se puede factorizar del lado derecho de la Ec. (6-16), como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{MX} &= \mathbf{T}_{AX} (\mathbf{T}_{ML} \mathbf{A} + \mathbf{S}_M \mathbf{D}_M) \\ &= \mathbf{T}_{AX} (\mathbf{A}_{ML} + \mathbf{S}_M \mathbf{D}_M) \\ &= \mathbf{T}_{AX} \mathbf{A}_M \end{aligned} \quad (6-17)$$

en donde \mathbf{A}_M es el vector de acciones finales de extremo en el miembro.

En seguida, considérese la tarea de calcular los desplazamientos en puntos intermedios entre los nudos. La forma general para obtener tales desplazamientos es similar a la de acciones; consiste de la suma de desplazamientos debidos a las cargas en el miembro restringido, más los efectos de desplazamientos en los extremos. Por lo tanto,

$$\mathbf{D}_{MX} = \mathbf{D}_{MXL} + \mathbf{D}_{MXD} \quad (6-18)$$

El vector \mathbf{D}_{MX} en la Ec. (6-18) contiene los desplazamientos en dos puntos diferentes, en los cuales $x_{M1} \leq a$ y $x_{M2} \geq a$, respectivamente (véase la Fig. 6-3a). Los vectores \mathbf{D}_{MXL} y \mathbf{D}_{MXD} son los desplazamientos en esos puntos, producidos por las cargas de miembro y los desplazamientos de extremo, respectivamente. Los elementos del vector \mathbf{D}_{MXL} para una viga se dan por las fórmulas mostradas en las Figs. 6-3b y c. La fórmula en la Fig. 6-3b, a la izquierda del punto de carga (delineada por la línea punteada vertical), es para traslaciones en términos de las acciones en el extremo j del miembro, en tanto que aquella a la derecha del punto de carga está en términos de las acciones en el extremo k . En una forma similar, la Fig. 6-3c muestra los giros a lo largo de la longitud de la viga en términos

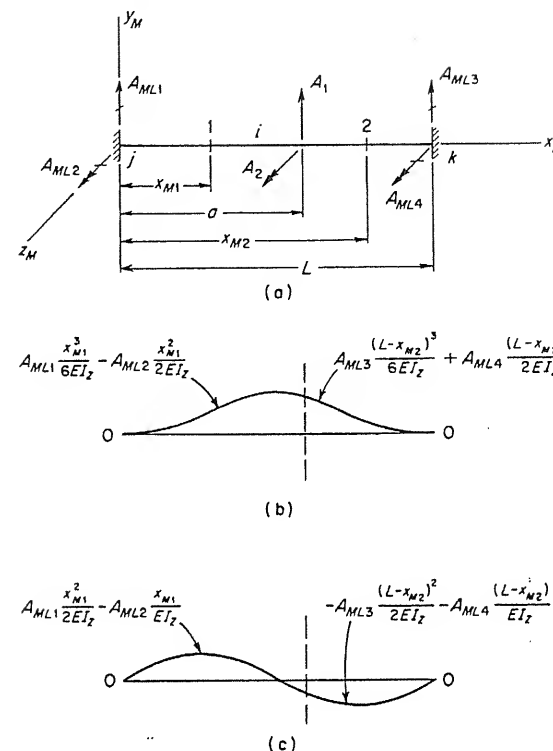


FIG. 6-3. Desplazamientos en una viga: (a) acciones aplicadas, (b) traslaciones y (c) rotaciones

de las acciones en los extremos j y k . El vector \mathbf{D}_{MXL} se puede factorizar en el producto matricial:

$$\mathbf{D}_{MXL} = \sum (\mathbf{T}_{DX} \mathbf{A}_{ML}) = \sum (\mathbf{T}_{DX} \mathbf{T}_{ML} \mathbf{A}) \quad (6-19)$$

en donde \mathbf{T}_{DX} es la siguiente matriz de cambio:

$$\mathbf{T}_{DX} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{DXj} \\ \mathbf{T}_{DXk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{M1}^3}{6EI_z} & -\frac{x_{M1}^2}{2EI_z} & 0 & 0 \\ \frac{x_{M1}^2}{2EI_z} & -\frac{x_{M1}}{EI_z} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{(L-x_{M2})^3}{6EI_z} & \frac{(L-x_{M2})^2}{2EI_z} \\ 0 & 0 & -\frac{(L-x_{M2})^2}{2EI_z} & -\frac{(L-x_{M2})}{EI_z} \end{bmatrix} \quad (6-20)$$

También se puede mostrar que el vector D_{MXD} , en la Ec. (6-18), se puede obtener por el siguiente cálculo:

$$D_{MXD} = (T_{DB} + T_{DX}S_M)D_M \quad (6-21)$$

Los elementos de la primera columna de la matriz encerrada en paréntesis en la Ec. (6-21) se obtienen de las fórmulas para translaciones y giros en las Figs. 6-4a y 6-4b, respectivamente. Estas figuras representan los efectos de una translación unitaria en la dirección de y_M en el extremo j . Similarmente, se pueden deducir fórmulas para translaciones y rotaciones debidas a los otros tres tipos de desplazamientos unitarios en los extremos del miembro. Estas fórmulas se pueden considerar que están compuestas de dos partes, según se indica en la Ec. (6-21). La primera parte (matriz T_{DB}) consiste de los efectos de los desplazamientos de los extremos del miembro como un cuerpo rígido; la segunda parte incluye los desplazamientos de un punto de interés relativos a las tangentes a la curva elástica en los extremos desplazados. Cualquier extremo del miembro es conveniente como punto de referencia y, por consistencia, los puntos de interés que se encuentran a la izquierda de un punto de carga (véase el punto 1, Fig. 6-5a) se refieren al extremo j . Por otro lado, los puntos a la derecha del punto de carga (véase el punto 2, Fig. 6-5a) se refieren al extremo k .

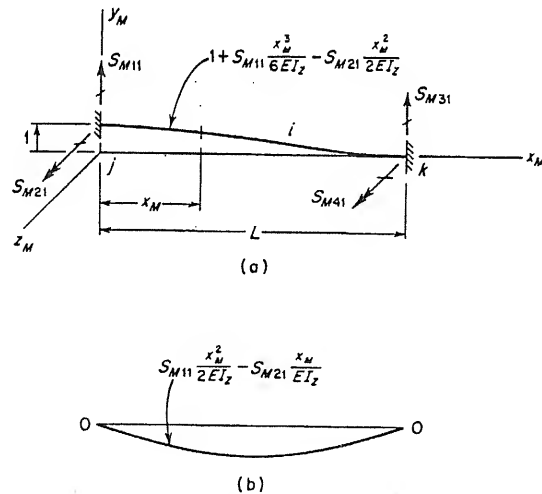


FIG. 6-4. Desplazamientos en una viga debidos a una translación unitaria del extremo j : (a) translaciones y (b) rotaciones

Por lo tanto, la matriz T_{DB} es una matriz de cambio para desplazamientos en los puntos de interés debidos a los movimientos

de cuerpo rígido de los nudos en los extremos del miembro. Los elementos de esta matriz se pueden obtener por observación de las Figs. 6-5b a 6-5e:

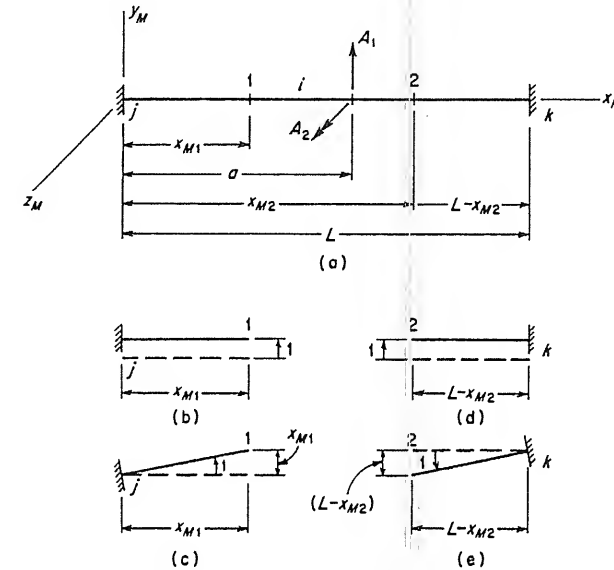


FIG. 6-5. Desplazamientos de cuerpo rígido en una viga

$$T_{DB} = \begin{bmatrix} T_{DBJ} \\ T_{DBK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{M1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -(L-x_{M2}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-22)$$

La sustitución de las Ecs. (6-19) y (6-21) en la Ec. (6-18) produce la ecuación expandida:

$$D_{MX} = \sum (T_{DX}T_{ML}A) + (T_{DB} + T_{DX}S_M)D_M \quad (6-23)$$

Para el caso especial de un solo punto de carga no se requiere la suma de los términos y la matriz T_{DX} se puede factorizar como sigue:

$$\begin{aligned} D_{MX} &= T_{DB}D_M + T_{DX}(T_{ML}A + S_M D_M) \\ &= T_{DB}D_M + T_{DX}A_M \end{aligned} \quad (6-24)$$

Ahora se usará un simple ejemplo para demostrar el cálculo de acciones y desplazamientos en un par de puntos intermedios en la viga. La discusión anterior ha sido orientada hacia el cálculo de acciones y desplazamientos en dos puntos, simultáneamente, a fin de hacer uso de las matrices totales T_{ML} y S_M . Sin embargo, si sólo un

punto es de interés, las mitades apropiadas de éstas y de otras matrices requeridas se pueden usar en los cálculos.

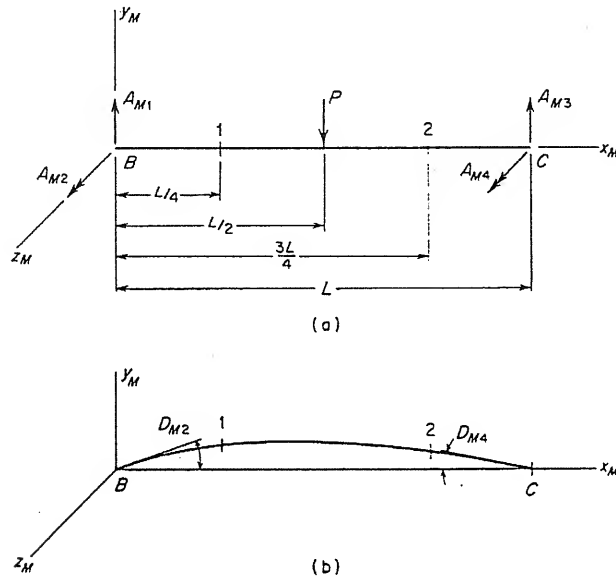


FIG. 6-6. Ejemplo

EJEMPLO. Supóngase que las acciones internas y desplazamientos se van a calcular en dos puntos del miembro BC de la viga continua analizada en el Art. 4.6 e ilustrada en la Fig. 4-5. De la solución de esta estructura por el método de la rigidez, los siguientes vectores están disponibles para el miembro BC:

$$A_M = \frac{P}{56} \{64, 36L, -8, 0\} \quad (a)$$

$$D_M = \frac{PL^2}{112EI_z} \{0, 17, 0, -5\} \quad (b)$$

El sistema de numeración para los elementos del vector A_M se muestra en la Fig. 6-6a, que también indica la carga P que actúa sobre el miembro y las localizaciones de los dos puntos de interés. Estos puntos están marcados 1 y 2 y se suponen las siguientes dimensiones:

$$x_{M1} = \frac{L}{4} \quad \text{y} \quad x_{M2} = \frac{3L}{4} \quad (1)$$

La sustitución de estos valores en las Ecs. (6-11), (6-20) y (6-22) produce las siguientes matrices de cambio:

$$T_{AX} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L}{4} & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{4} & 1 \end{bmatrix} \quad (c)$$

$$T_{DX} = \frac{1}{384EI_z} \begin{bmatrix} L^2 & -12L & 0 & 0 \\ 12L & -96 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & L^2 & 12L \\ 0 & 0 & -12L & -96 \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$T_{DB} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -\frac{L}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (e)$$

Cuando las Ecs. (a) y (c) se sustituyen en la Ec. (6-17) se obtiene el siguiente vector de acción:

$$A_{MX} = \begin{bmatrix} A_{MX1} \\ A_{MX2} \end{bmatrix} = \frac{P}{56} \begin{bmatrix} -64 \\ -20L \\ \hline -8 \\ -2L \end{bmatrix}$$

La Fig. 6-6b muestra, aproximadamente, la deformación del miembro BC; los desplazamientos en los puntos 1 y 2 se calculan sustituyendo las Ecs. (a), (b), (d) y (e) en la Ec. (6-24). Por lo tanto,

$$D_{MX} = \begin{bmatrix} D_{MX1} \\ D_{MX2} \end{bmatrix} = \frac{PL^2}{2688EI_z} \begin{bmatrix} 56L \\ 72 \\ \hline 29L \\ -108 \end{bmatrix}$$

Los métodos arriba descritos para determinar las acciones y desplazamientos en vigas se pueden extender a todos los tipos de estructuras reticulares. Sin embargo, los cálculos de desplazamientos en puntos intermedios de armaduras son algo más complicados que para estructuras con nudos rígidos, debido a que los extremos de todos los miembros en armaduras están libres de girar independientemente uno del otro. Además, las propiedades de flexión de miembros de armaduras por lo común no se especifican y no son de interés

general en el análisis. Así pues, únicamente las acciones intermedias en miembros de armaduras son aptas para recibir la atención del analizador.

6.5. Desplazamientos de los apoyos. Los desplazamientos de los apoyos consisten de translaciones o rotaciones conocidas de las restricciones de apoyo. Se describirán dos métodos para incluir los efectos de desplazamientos de apoyo en el método de análisis de la rigidez.

El primer método requiere el cálculo de las acciones en los extremos de miembros en la estructura restringida debidas a los desplazamientos de los apoyos. (Esta técnica se usó en el Cap. 2 para desplazamientos de apoyo y en el Art. 6.2 para efectos de temperatura y deformación previa.) Luego son colocadas estas acciones de empotramiento en la matriz A_{MR} (o A_{MS} ; véase la Ec. 2-30) y tratadas en la misma forma que aquellas debidas a las cargas. La conversión de estas cantidades de cargas equivalentes de nudo y el análisis subsecuente proseguirá como se describió en el Cap. 4.

El segundo método incluye la formación de la matriz de la rigidez total de nudo S_j dada en la Ec. (4-1) y abajo repetida:

$$S_j = \begin{bmatrix} S & S_{DR} \\ S_{RD} & S_{RR} \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

repetida

Esta matriz se puede incorporar en una ecuación de acción total para todos los nudos en una estructura, incluyendo los apoyos; por lo tanto,

$$A_j = A_{jL} + S_j D_j \quad (6-25)$$

o, en forma expandida:

$$\begin{bmatrix} A_D \\ A_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{DL} \\ A_{RL} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & S_{DR} \\ S_{RD} & S_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ D_R \end{bmatrix} \quad (6-26)$$

Todas las submatrices en la Ec. (6-26) ya han sido antes definidas, excepto la matriz D_R , la cual es un vector de desplazamientos de las restricciones de apoyo.

La Ec. (6-26) se puede escribir como dos grupos de ecuaciones haciendo las multiplicaciones matriciales indicadas:

$$A_D = A_{DL} + S D + S_{DR} D_R \quad (6-27)$$

$$A_R = A_{RL} + S_{RD} D + S_{RR} D_R \quad (6-28)$$

La primera de estas ecuaciones representa la ecuación de acción correspondiente a los grados de libertad reales en la estructura, y la segunda se refiere a las restricciones de apoyo. Si los desplazamientos

de apoyo D_R son cero, las Ecs. (6-27) y (6-28) serán las mismas que las Ecs. (2-23) y (4-4), respectivamente.

La Ec. (6-27) se puede resolver para el vector desplazamiento D como sigue:

$$D = S^{-1} (A_D - A_{DL} - S_{DR} D_R) \quad (6-29)$$

Entonces, las reacciones A_R se pueden encontrar sustituyendo los resultados de la Ec. (6-29) en la Ec. (6-28). El cálculo de las acciones de extremo de los miembros es el mismo que el descrito en el Cap. 4.

Ambos métodos antes descritos para calcular los efectos de desplazamientos de apoyo se pueden rápidamente incorporar a un programa de computación.

6.6. Apoyos inclinados. La clave de la lista de restricciones, empleada en los programas de computación del Cap. 5, compensará la presencia o ausencia de restricciones en las direcciones paralelas a los ejes x , y y z de la estructura. Así pues, por ejemplo, un apoyo libre paralelo a uno de los ejes de la estructura puede tomarse en cuenta. La clave, sin embargo, no adaptará apoyos libres en direcciones inclinadas a los ejes de la estructura, tales como los indicados en la Fig. 6-7a para una armadura plana y en la Fig. 6-7c para un marco plano. Existen varios métodos por los cuales las condiciones de apoyo se pueden incluir en el análisis de estructuras por el método de la rigidez. Un método posible es girar los ejes de la estructura en tal forma que los planos de referencia sean paralelos o perpendiculares a los planos inclinados. Esta técnica se limita a aquellos casos en donde existe únicamente un apoyo inclinado o en donde todos los apoyos inclinados son ortogonales entre sí. En aquellos casos en donde este método sea aplicable, sin embargo, es muy posible que las coordenadas de nudo y las orientaciones de los miembros y cargas, con respecto a los ejes de la estructura, se hagan más complicadas.

Otro método para manejar el problema es reemplazar el apoyo real por un miembro que tenga una gran área de sección transversal A_x y que tenga su eje longitudinal en la dirección normal al apoyo inclinado. Tal sustitución se indica en la Fig. 6-7b para el apoyo mostrado en la Fig. 6-7a. También se indica una sustitución similar en la Fig. 6-7d para el apoyo del marco de la Fig. 6-7c. En este último caso, el área A_x de la sección transversal debe ser grande y el momento de inercia I_z debe ser cero. Ya que las áreas rectas de los miembros sustitutos son grandes, comparadas con las de los otros miembros de la estructura, sus cambios axiales de longitud serán despreciables en el análisis total. Así pues, tales miembros crearán esencialmente los mismos efectos que los apoyos libres en los planos

inclinados. También las fuerzas axiales en los miembros sustitutos serán aproximadamente las mismas que las reacciones de los apoyos libres. La longitud de un miembro sustituto deberá ser, cuando menos, del mismo orden de magnitud que los otros miembros en la estructura para asegurar que el ángulo de rotación del miembro es pequeño. La ventaja de este método de manejar apoyos inclinados radica en el hecho de que la suma de uno o dos miembros y nudos extra no requiere de ningún cambio en los programas del Cap. 5.

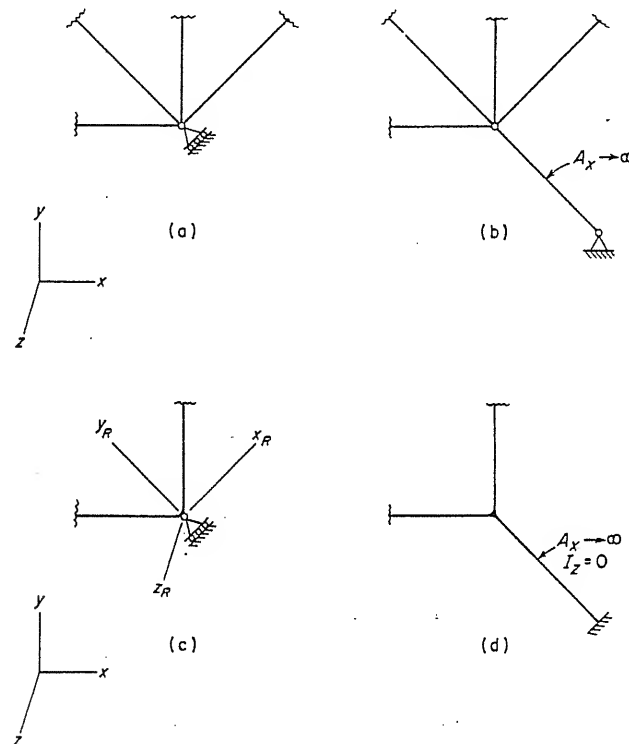


FIG. 6-7. Apoyos inclinados

Un tercer método para el problema de apoyos inclinados requiere una modificación del método de escribir ecuaciones de acción en el método de la rigidez. Estas ecuaciones representan las sumas de fuerzas y pares en las direcciones de los ejes de la estructura. Sin embargo, en un apoyo inclinado las direcciones adecuadas son paralelas y perpendiculares a los planos inclinados. Así pues, la formulación total de las ecuaciones de acción para la estructura deberá incluir algunas ecuaciones que están escritas para *ejes orientados*

con las restricciones, en vez de los ejes orientados con la estructura. Un juego de ejes orientados con las restricciones x_R , y_R y z_R se muestra en la Fig. 6-7c en unión con el apoyo inclinado. Las acciones y desplazamientos en un apoyo inclinado se pueden transformar de los ejes de la estructura a los ejes de restricción (o viceversa), usando el tipo de matriz de rotación \mathbf{R} descrito en el Cap. 4. En este caso, la matriz \mathbf{R} consistirá de los cosenos directores de los ejes de restricción con respecto a los ejes de la estructura. Además, la matriz de rigidez total de nudo \mathbf{S}_J se puede formar con respecto a los ejes de la estructura como antes y, entonces, los renglones y las columnas asociados con los apoyos inclinados se pueden alterar por operaciones en la matriz usando una matriz apropiada de rotación transformada \mathbf{R}_R . La matriz \mathbf{R}_R contiene como submatrices en la diagonal principal ya sea la matriz identidad o la matriz de rotación \mathbf{R} . La última aparece en las posiciones que corresponden a los apoyos inclinados. Las operaciones requeridas se pueden representar simbólicamente multiplicando antes la ecuación de acción total (Ec. 6-25 antes de nuevo arreglo) por la matriz \mathbf{R}_R e insertando $\mathbf{I} = \mathbf{R}_R^{-1} \mathbf{R}_R = \mathbf{R}_R' \mathbf{R}_R$ en el último término como sigue:

$$\mathbf{R}_R \mathbf{A}_J = \mathbf{R}_R \mathbf{A}_{JL} + \mathbf{R}_R \mathbf{S}_J \mathbf{R}_R' \mathbf{R}_R \mathbf{D}_J \quad (6-30)$$

La Ec. (6-30) representa, en general, un cambio de coordenadas y las cantidades en el nuevo sistema de coordenadas se pueden identificar con un asterisco y definir como sigue:

$$\mathbf{R}_R \mathbf{A}_J = \mathbf{A}_J^* \quad (a)$$

$$\mathbf{R}_R \mathbf{A}_{JL} = \mathbf{A}_{JL}^* \quad (b)$$

$$\mathbf{R}_R \mathbf{S}_J \mathbf{R}_R' = \mathbf{S}_J^* \quad (c)$$

$$\mathbf{R}_R \mathbf{D}_J = \mathbf{D}_J^* \quad (d)$$

Cuando la Ec. (6-30) se vuelve a escribir en estos términos, se convierte en:

$$\mathbf{A}_J^* = \mathbf{A}_{JL}^* + \mathbf{S}_J^* \mathbf{D}_J^* \quad (6-32)$$

que tiene la misma forma de la Ec. (6-25). La solución para los desplazamientos y reacciones en el nuevo sistema de coordenadas se puede llevar al igual que antes, pero el cálculo de las acciones de extremo de los miembros requiere que \mathbf{D}_J^* se transforme de nuevo a las coordenadas originales, haciendo uso de la Ec. (6-31d). Por lo tanto,

$$\mathbf{D}_J = \mathbf{R}_R^{-1} \mathbf{D}_J^* = \mathbf{R}_R' \mathbf{D}_J^* \quad (6-33)$$

Entre los tres métodos arriba descritos para manejar apoyos inclinados, el camino que utiliza miembros sustitutos es el más conve-

niente, debido a que no requiere cambios en el programa del Cap. 5. Aunque el método que incluye la rotación de ejes es matemáticamente más elegante, su aplicación incluye un aumento sustancial en el monto del programa.

6.7. Apoyos elásticos. Pueden existir casos de apoyos con condiciones de restricción que son intermedios entre los extremos de restricción nula y restricción total. Si tales restricciones contra translación o rotación son linealmente elásticas, se pueden incluir fácilmente dentro del alcance del método de análisis de la rigidez.

A fin de ilustrar las condiciones de apoyo elástico, considérese la viga continua mostrada en la Fig. 6-8. Una comparación de esta figura con la Fig. 4-7a, en el Art. 4.8, muestra que las restricciones totales y nulas en cada nudo se han reemplazado por resortes elásticos que tienen sus constantes de rigidez indicadas por el símbolo S_R . Las rigideces numeradas impares son restricciones contra translaciones en la dirección de y ; las rigideces numeradas pares son restricciones contra rotaciones en el sentido de z . Si existen dos resortes en cada nudo y si hay m miembros en la viga habrán $2(m+1)$ restricciones elásticas y el análisis de la estructura por el método de la rigidez implicará ese número de grados de libertad. La estructura

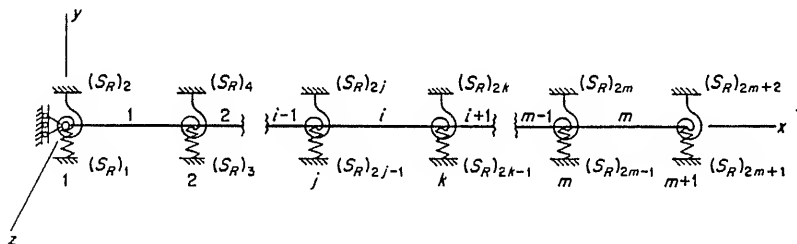


FIG. 6-8. Viga con apoyos elásticos

restringida para la viga en la Fig. 6-8 será la misma que antes (véase la Fig. 4-7b), pero la matriz de rigidez de nudo se alterará debido a las rigideces de restricción S_R . Si estas rigideces de restricción se suman a los elementos diagonales de la matriz de rigidez total de nudo S_j , entonces puede usarse la matriz resultante en la solución para los desplazamientos de nudo como en el Art. 4-8. Las acciones de extremo de los miembros se pueden también calcular como se describió en ese artículo. Por otro lado, las reacciones en los apoyos elásticos serán iguales a las acciones en los resortes elásticos y se pueden calcular como los productos negativos de las constantes de los resortes por los desplazamientos de nudo. Por lo tanto:

$$A_R = -S_R D_j \quad (6-34)$$

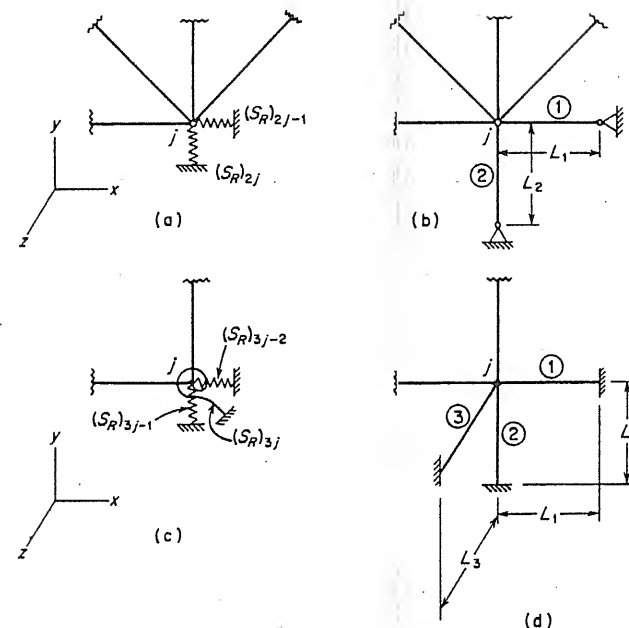


FIG. 6-9. Sustitución de miembros

Aunque una viga sirve como ejemplo en la discusión anterior, este método de manejar apoyos elásticos es aplicable a todos los tipos de estructuras reticulares.

Una alternativa al problema de apoyos elásticos es sustituir miembros estructurales equivalentes por las restricciones. Como ejemplo de esta técnica, considérese el problema de manejar el nudo j de la armadura plana mostrada en la Fig. 6-9a. El nudo está restringido contra translación por dos resortes que tienen las rigideces de $(S_R)_{2j-1}$ y $(S_R)_{2j}$. Los dos resortes se pueden reemplazar por los dos miembros de armadura adicional 1 y 2 mostrados en la Fig. 6-9b. A estos miembros se les pueden asignar arbitrariamente las longitudes L_1 y L_2 , comparables con las longitudes de los otros miembros de la armadura, y áreas de sección transversal A_{x1} y A_{x2} que se calculan como sigue:

$$A_{x1} = \frac{L_1}{E} (S_R)_{2j-1} \quad A_{x2} = \frac{L_2}{E} (S_R)_{2j}$$

La asignación de estas áreas transversales da las rigideces axiales de los miembros sustitutos iguales a las restricciones elásticas que ellos reemplazan.

Un ejemplo similar se ilustra en las Figs. 6-9c y 6-9d, que muestran un nudo j en un marco plano. La sustitución de los miembros

1 y 2 para las restricciones contra translación (véase la Fig. 6-9d) es similar a la del ejemplo de la armadura plana, excepto que los momentos de inercia de esos miembros deben ser iguales a cero. Una sustitución adecuada para restricción rotacional de rigidez $(S_R)_{3j}$ consiste de una barra de torsión, indicada como miembro 3 en la Fig. 6-9d, paralela al eje z (y, por lo tanto, perpendicular al plano del marco). A este miembro se le asignaría una longitud arbitraria L_3 y una constante de torsión I_{X3} que se calcula como sigue:

$$I_{X3} = \frac{L_3}{G} (S_R)_{3j}$$

La dificultad que se presenta en este ejemplo es que el marco plano se convierte en un marco en el espacio, debido a la adición del miembro 3, y el análisis de la estructura debe proceder sobre esa base. Por lo tanto, pueden existir algunos casos en los cuales el método de reemplazo es desventajoso comparado con el primer método anteriormente discutido, que consiste en aumentar directamente la matriz de rigidez de nudo.

6.8. Miembros no prismáticos. Los miembros no prismáticos son miembros que no tienen la misma sección transversal de un extremo a otro. Ejemplos de éstos son los miembros ahusados o miembros prismáticos que tienen refuerzos en partes de sus longitudes. Además, los miembros que no tienen ejes rectos se clasifican automáticamente como no prismáticos. La incorporación de miembros no prismáticos al método de análisis de la rigidez requiere del reconocimiento del hecho de que las rigideces de miembro y las acciones de empotramiento no son las mismas que para miembros prismáticos. Por lo tanto, si las dos matrices S_M y T_{ML} se reemplazan por sus partes correspondientes para cada miembro no prismático, el método de análisis de la rigidez será por el contrario inalterado. La misma conclusión general, a saber, que la única alteración en el método de análisis de la rigidez es en la determinación de las rigideces de miembro y acciones de empotramiento, se aplica también a los tópicos discutidos en los artículos restantes de este capítulo.*

Existen varios métodos adecuados para analizar miembros no prismáticos. Algunas veces es posible obtener los elementos de S_M y T_{ML} por derivaciones analíticas directas, como es el caso en que las variaciones en las propiedades de sección se pueden expresar como funciones adecuadas de x_M . En tal caso, cada elemento de

* Muchas fórmulas y derivaciones para rigideces y acciones de empotramiento se pueden encontrar en *Moment Distribution*, por J. M. Gere, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J. 1963. Se encuentran fórmulas que incluyen todos los temas discutidos en los Arts. 6.8 hasta 6.12 de este capítulo.

S_M y T_{ML} se puede expresar por una fórmula que incluye los parámetros del miembro, tal como en el caso de una viga prismática. Por otro lado, los elementos de S_M y T_{ML} siempre se pueden determinar en forma numérica, ya sea obteniendo los valores de gráficas o tablas, previamente preparadas, u obteniendo los valores por medio de un procedimiento de integración numérica apropiado.

Un método factible para analizar una estructura con miembros no prismáticos consiste en suponer nudos en puntos intermedios a lo largo de las longitudes de cada miembro no prismático. Un segmento entre dos nudos de ese tipo se puede considerar como un miembro prismático (si no es ya prismático) obteniendo sus propiedades de sección al promediar las de los dos extremos del segmento. Este procedimiento hará que la matriz de rigidez S para la estructura se haga muy grande, pero no se requiere ningún cambio en los programas de computación del Cap. 5.

Otro método toma en cuenta la determinación de las propiedades de cada miembro no prismático por métodos matriciales. Este procedimiento será ilustrado usando como ejemplo una viga. La Fig.

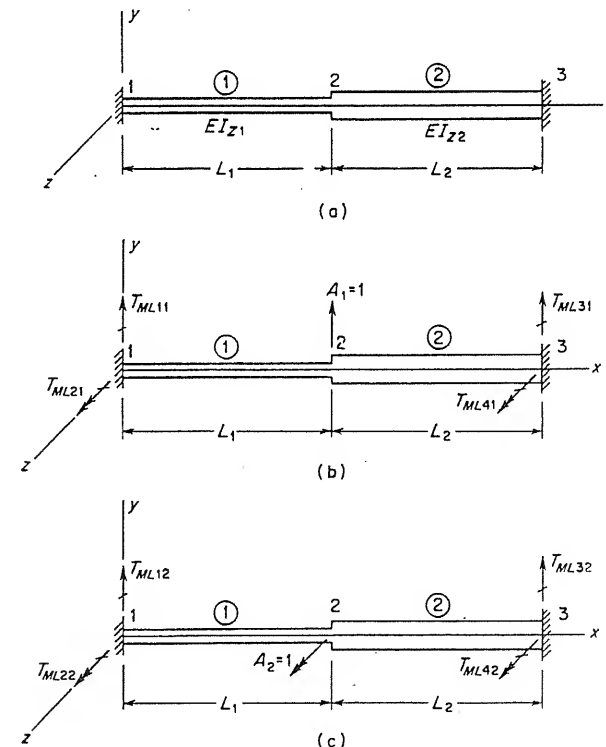


FIG. 6-10. Viga no prismática

6-10a muestra una viga no prismática que consiste de 2 segmentos prismáticos marcados como submiembros 1 y 2. Esta discusión se aplica para cualquier número de segmentos, pero sólo se toman dos por simplicidad. Considérese la viga como una estructura aislada que tiene dos grados de libertad en el punto 2 y un total de cuatro restricciones de apoyo en los puntos 1 y 3. Hágase que las cantidades que pertenecen a los grados de libertad en el problema se distingan por el suscrito A y las que pertenecen a las restricciones de apoyo por el suscrito B. Las relaciones totales entre acción y desplazamiento para esta estructura (véase la Ec. 6-25) se pueden escribir en la forma dividida y nuevamente arreglada, como sigue:

$$\begin{bmatrix} A_A \\ A_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{AA} & S_{AB} \\ S_{BA} & S_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_A \\ D_B \end{bmatrix} \quad (6-35)$$

Llevando a cabo las multiplicaciones indicadas el resultado es

$$A_A = S_{AA}D_A + S_{AB}D_B \quad (6-36)$$

$$A_B = S_{BA}D_A + S_{BB}D_B \quad (6-37)$$

Resolviendo para D_A en la primera ecuación se obtiene:

$$D_A = S_{AA}^{-1}(A_A - S_{AB}D_B) \quad (6-38)$$

En seguida sustituyendo esta expresión para D_A en la segunda ecuación y arreglando nuevamente da:

$$A_B - S_{BA}S_{AA}^{-1}A_A = (S_{BB} - S_{BA}S_{AA}^{-1}S_{AB})D_B \quad (6-39)$$

El miembro izquierdo de la Ec. (6-39) contiene las acciones del tipo B menos un término que incluye los efectos de las acciones del tipo A. Si los desplazamientos D_B son todos iguales a cero (miembro doblemente empotrado), la Ec. (6-39) da la siguiente relación entre las acciones del tipo B y A:

$$A_B = S_{BA}S_{AA}^{-1}A_A$$

Por consiguiente, la matriz de cambio para acciones de tipo B debidas a acciones unitarias del tipo A es

$$T_{ML} = S_{BA}S_{AA}^{-1} \quad (6-40)$$

Los elementos de esta matriz de cambio se ilustran en las Figs. 6-10b y 6-10c, que muestran los efectos de acciones unitarias en el punto 2. Nótese que la matriz de cambio T_{ML} dada por la Ec. (6-40) para un punto donde la sección cambia, es ligeramente diferente de la anteriormente discutida en el Art. 6.3, que era una matriz de cambio para acciones de extremo debidas a acciones unitarias en cualquier punto a lo largo de la longitud de un miembro prismático.

Si todas las acciones del tipo A se hacen iguales a cero, la Ec. (6-39) se convierte en

$$A_B = (S_{BB} - S_{BA}S_{AA}^{-1}S_{AB})D_B$$

Ya que las acciones A_B y los desplazamientos D_B son correspondientes, el término del paréntesis se convierte en la matriz de rigidez para desplazamientos unitarios de los extremos del miembro no prismático; por lo tanto:

$$S_M = S_{BB} - S_{BA}S_{AA}^{-1}S_{AB} \quad (6-41)$$

La sustitución de la Ec. (6-40) en el último término de la Ec. (6-41) da:

$$S_M = S_{BB} - T_{ML}S_{AB} \quad (6-42)$$

En resumen, la matriz de rigidez de miembro S_M y la matriz de cambio T_{ML} para un miembro no prismático se puede determinar subdividiendo el miembro en un número de segmentos, cada uno de los cuales se trata como un miembro individual. La matriz de rigidez total de nudo se obtiene y se divide como se muestra en la Ec. (6-35) para dar las matrices S_{AA} , S_{AB} , S_{BA} y S_{BB} . La inversión de la matriz S_{AA} y la sustitución de las matrices apropiadas en las Ecs. (6-40) y (6-42) produce la matriz de cambio T_{ML} y la matriz de rigidez S_M para el miembro no prismático. El uso de las Ecs. (6-40) y (6-42) será mostrado por un breve ejemplo.

EJEMPLO: Suponga que la viga no prismática en la Fig. 6-10 tiene las siguientes propiedades:

$$L_1 = L_2 = L \quad I_{Z1} = I \quad I_{Z2} = 2I$$

La matriz de rigidez total nuevamente arreglada y dividida para la estructura es:

$$\begin{bmatrix} S_{AA} & S_{AB} \\ S_{BA} & S_{BB} \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 36 & 6L & -12 & -6L & -24 & 12L \\ 6L & 12L^2 & 6L & 2L^2 & -12L & 4L^2 \\ \hline -12 & 6L & 12 & 6L & 0 & 0 \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 & 0 & 0 \\ -24 & -12L & 0 & 0 & 24 & -12L \\ 12L & 4L^2 & 0 & 0 & -12L & 8L^2 \end{bmatrix}$$

La sustitución de las submatrices apropiadas de esta matriz en las Ecs. (6-40) y (6-42) produce la matriz de cambio T_{ML} y la matriz de rigidez de miembro S_M para el miembro no prismático, como sigue:

$$T_{ML} = \frac{1}{33L^2} \begin{bmatrix} -15L^2 & 24L \\ -7L^3 & 9L^2 \\ -18L^2 & -24L \\ 10L^3 & 6L^2 \end{bmatrix}$$

$$S_M = \frac{4EI}{11L^3} \begin{bmatrix} 6 & 5L & -6 & 7L \\ 5L & 6L^2 & -5L & 4L^2 \\ -6 & -5L & 6 & -7L \\ 7L & 4L^2 & -7L & 10L^2 \end{bmatrix}$$

El método arriba descrito para determinar las matrices T_{ML} y S_M para miembros no prismáticos se explicó utilizando como ejemplo una viga de dos segmentos, pero el método es más general.* Las Ecs. (6-40) y (6-42) se pueden aplicar a cualquier tipo de miembro estructural que tenga eje recto o curvo dividido en cualquier número de segmentos.

6.9. Discontinuidades en los miembros. La Fig. 6-11 muestra los tipos de discontinuidades parciales que pueden existir en los miembros de estructuras reticulares. Los símbolos en las Figs. 6-11a, 6-11b, 6-11c y 6-11d indican la imposibilidad de transmitir cortante, momento, fuerza normal y torsión, respectivamente. De estas imposibilidades de transmitir acciones resultan discontinuidades en desplazamientos de translación o rotación. También son posibles las combinaciones de estas discontinuidades, y la discontinuidad com-

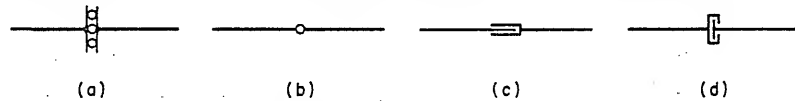


FIG. 6-11. Discontinuidades parciales

pleta toma la forma de extremo libre. La naturaleza general de una estructura reticular determina los tipos de discontinuidades que son importantes. En vigas, por ejemplo, sólo son de importancia discontinuidades de cortante y momento. Las matrices de rigidez de miembro y las matrices de cambio de acciones de extremo para vigas que tienen tales discontinuidades se presentan en este artículo, y los conceptos se pueden extender también a los miembros de otros tipos de estructuras.

Considérese primero la posibilidad de una discontinuidad al cortante o al momento en el extremo de una viga prismática. Las Figs. 6-12a y 6-12b muestran tales condiciones a una pequeña distancia del extremo j de un miembro restringido; las Figs. 6-12c y 6-12d indican las mismas condiciones en el extremo k . Las matrices

* El proceso de eliminar una o más matrices sustituyendo una ecuación matricial en otra, como se hizo en la deducción de la Ec. (6-39), algunas veces se conoce como *condensación de matriz*. Por lo tanto, las matrices S_M y T_{ML} para los miembros no prismáticos representan combinaciones de otras matrices obtenidas por procedimientos de condensación.

de rigidez de miembro S_M para estos casos se obtienen fácilmente por análisis de las vigas mostradas en la figura y se enumeran en la Tabla 6-1 como matrices (a) hasta (d). En las Figs. 6-12a hasta 6-12d también se muestran las acciones A_1 y A_2 a la distancia a del extremo j del miembro; las matrices de cambio T_{ML} para las ac-

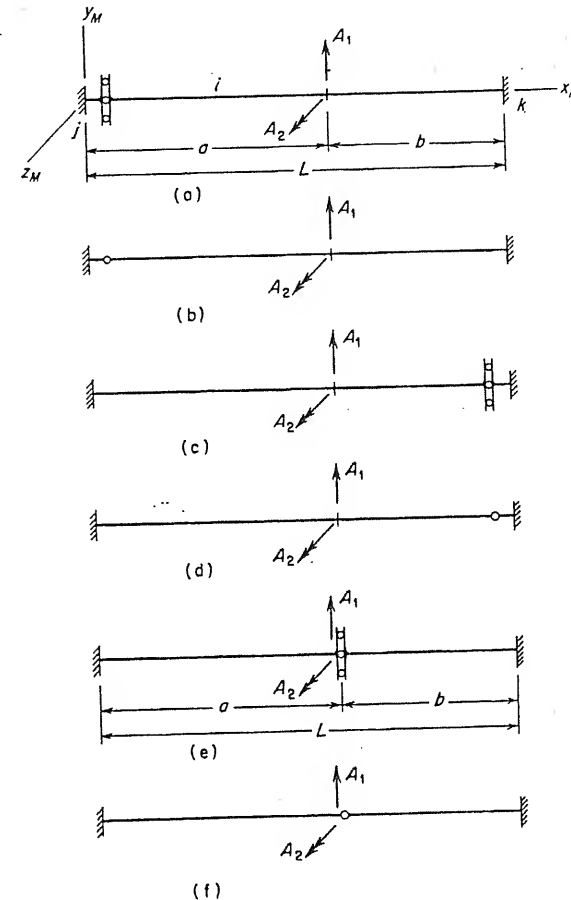


FIG. 6-12. Discontinuidades en un miembro de una viga

ciones de empotramiento resultantes se dan en la Tabla 6-2 como matrices (a) hasta (d). Si las matrices S_M y T_{ML} mostradas en las Tablas 6-1 y 6-2 se usan para el miembro de una viga que tenga discontinuidad al cortante o al momento en cualquier extremo, el análisis procede, entonces, como antes, sin requerirse más modificaciones.

TABLA 6-1. MATRICES DE RIGIDEZ DE MIEMBRO PARA LAS VIGAS DE LA FIG. 6-12

$$\begin{array}{cc}
 \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \frac{3EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -L \\ L & 0 & -L & L^2 \end{bmatrix} \\
 \text{(a)} & \text{(b)} \\
 \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \frac{3EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 & 0 \\ L & L^2 & -L & 0 \\ -1 & -L & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{(c)} & \text{(d)} \\
 \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \frac{3EI_z}{a^3 + b^3} \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & b \\ a & a^2 & -a & ab \\ -1 & -a & 1 & -b \\ b & ab & -b & b^2 \end{bmatrix} \\
 \text{(e)} & \text{(f)}
 \end{array}$$

Considérese en seguida la determinación de la matriz de rigidez S_M para una viga que tiene discontinuidad al cortante o al momento en un punto intermedio. Las Figs. 6-12e y 6-12f muestran tales vigas con las discontinuidades a una distancia a del extremo j del miembro. Un método de analizar estas vigas consiste en tratarlas como dos miembros, suponiendo un nudo justamente a la izquierda o a la derecha de la discontinuidad. Entonces, uno de los submiembros tendrá una discontinuidad en un extremo (como en las Figs. 6-12a hasta 6-12d) y el otro submiembro no tendrá discontinuidades. Este método tiene la ventaja de que no se requieren nuevas matrices más que las arriba discutidas. Alternativamente, las matrices de rigidez para vigas que tienen discontinuidades en puntos intermedios, siempre se pueden obtener directamente de un análisis elemental de la viga. Los resultados de tales análisis para las vigas en las Figs. 6-12e y 6-12f se dan en la Tabla 6-1 como matrices (e) y (f).

Las matrices de cambio T_{ML} para acciones de empotramiento para vigas con discontinuidades en puntos intermedios, también se pueden encontrar por los procedimientos arriba mencionados. Si las acciones A_1 y A_2 se aplican justamente a la izquierda de las discontinuidades (véanse las Figs. 6-12e y 6-12f), las matrices de cambio tienen las formas dadas en la Tabla 6-2 como matrices (e) y (f). Si las acciones A_1 y A_2 se aplican justamente a la derecha de las discontinuidades, las matrices son las dadas en la Tabla 6-2 como matrices (g) y (h).

Nótese que las matrices de cambio (e) a (h) en la Tabla 6-2 son para las acciones de extremo en j y k debidas a las acciones

TABLA 6-2. MATRICES DE CAMBIO PARA LAS VIGAS DE LA FIG. 6-12

$$\begin{array}{cc}
 \frac{1}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b^2 & -2b \\ -2L & 0 \\ b(L+a) & -2a \end{bmatrix} & \frac{1}{2L^3} \begin{bmatrix} -b^2(2L+a) & 3b(L+a) \\ 0 & 0 \\ -a(3L^2-a^2) & -3b(L+a) \\ abL(L+a) & L(L^2-3a^2) \end{bmatrix} \\
 \text{(a)} & \text{(b)} \\
 \frac{1}{2L} \begin{bmatrix} -2L & 0 \\ -a(L+b) & -2b \\ 0 & 0 \\ -a^2 & -2a \end{bmatrix} & \frac{1}{2L^3} \begin{bmatrix} b(3L^2-b^2) & 3a(L+b) \\ -abL(L+b) & L(L^2-3b^2) \\ -a^2(2L+b) & -3a(L+b) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{(c)} & \text{(d)} \\
 \frac{1}{2L} \begin{bmatrix} -2L & 0 \\ -a(L+b) & -2b \\ 0 & 0 \\ -a^2 & -2a \end{bmatrix} & \frac{1}{2(a^3+b^3)} \begin{bmatrix} -2b^3 & 3a^2 \\ -2ab^3 & a^3-2b^3 \\ -2a^3 & -3a^2 \\ 2a^3b & 3a^2b \end{bmatrix} \\
 \text{(e)} & \text{(f)} \\
 \frac{1}{2L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b^2 & -2b \\ -2L & 0 \\ b(L+a) & -2a \end{bmatrix} & \frac{1}{2(a^3+b^3)} \begin{bmatrix} -2b^3 & 3b^2 \\ -2ab^3 & 3ab^2 \\ -2a^3 & -3b^2 \\ 2a^3b & -2a^3+b^3 \end{bmatrix} \\
 \text{(g)} & \text{(h)}
 \end{array}$$

unitarias aplicadas adyacentes a las discontinuidades. Si las acciones se aplican en otros puntos a lo largo de la longitud, se pueden formar matrices de cambio adecuadas para los casos en que $x_{M1} \leq a$ y $x_{M2} \geq a$. Una forma de obtener estas matrices de cambio es hacer uso de las matrices dadas en la Tabla 6-2. Con este fin se impone una restricción temporal en un punto adyacente a la discontinuidad y las matrices (a) hasta (d) se usan para calcular las acciones de restricción en ese punto. Los valores negativos de esas acciones constituyen las cargas equivalentes adyacentes a la discontinuidad, y las matrices (e) a (h) se pueden usar para cambiar los efectos en los extremos del miembro.

Matrices similares a las de las Tablas 6-1 y 6-2 se pueden formar para miembros de otros tipos de estructuras reticulares. Los marcos y parrillas pueden tener tales discontinuidades, pero el tópico es de menor importancia en armaduras, debido a que los extremos de todos los miembros se supone que están articulados y cualesquier discontinuidad adicional es improbable.

Es interesante notar que ciertas discontinuidades en miembros se pueden tomar en cuenta por cambios triviales en el análisis. Por ejemplo, si un miembro de un marco plano tiene articulaciones en

ambos extremos, su matriz de rigidez de miembro será la misma que para un miembro de una armadura en el espacio. Tal miembro se puede manejar en el programa de computación para un marco plano (Art. 5.6) simplemente haciendo su momento de inercia de la sección transversal I_z igual a cero. Tales artificios pueden ordinariamente usarse con ventaja sin recurrir a una programación adicional.

6.10. Conexiones elásticas. Los nudos de estructuras reticulares generalmente se idealiza que son ya sea articulaciones o completamente rígidos. Sin embargo, las conexiones mismas pueden tener un grado de flexibilidad significativo que puede ser importante en el análisis. Si se supone que tales conexiones son linealmente elásticas, se pueden incorporar a las propiedades de rigidez de los miembros individuales como modificaciones de los casos idealizados.

Varios tipos de conexiones elásticas son teóricamente posibles, de acuerdo con las translaciones y rotaciones relativas que puedan ocurrir en los nudos de la estructura. Las conexiones para cortante, momento flexionante, fuerza normal y torsión pueden poseer cierto grado de flexibilidad, pero lo más importante de éstas es el tipo rotacional que transmite momento flexionante. Este tipo de conexión se estudia en este artículo en unión con el análisis de vigas. Las ideas, por supuesto, se pueden extender a otros tipos de conexiones elásticas y otros tipos de estructuras reticulares.

La Fig. 6-13 muestra una viga prismática con una conexión elástica rotacional a una pequeña distancia de cada extremo. Hagamos

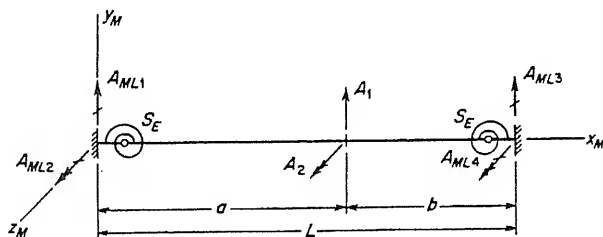


FIG. 6-13. Viga con conexiones elásticas

que S_E sea la constante de rigidez para la conexión elástica en cada extremo del miembro. Una constante de ese tipo se define como el momento por rotación relativo unitario en la conexión elástica. La constante de rigidez S_E será incorporada en la matriz S_M y en la matriz de cambio T_{ML} para el miembro. Por conveniencia en la escritura de estas matrices, se definen los siguientes parámetros adimensionales:

$$e = \frac{EI_z}{LS_E} \quad (6-43)$$

$$\begin{aligned} e_1 &= e + 1 & e_2 &= 2e + 1 & e_3 &= 3e + 1 \\ e_4 &= 4e + 1 & e_6 &= 6e + 1 \end{aligned}$$

La matriz de rigidez de miembro modifica S_M para la viga en la Fig. 6-13, se puede terminar analizando el miembro como un problema de desplazamientos de apoyo (véase el Art. 6.5) para una viga con apoyos elásticos (véase el Art. 6.7). Los desplazamientos unitarios de los apoyos producirán reacciones de apoyo que se convierten en los elementos de S_M . La Tabla 6-3 muestra la matriz resultante y el lector debe comparar esta tabla con la Tabla 4-2 del Cap. 4. Nótese que cuando se le permite a S_E tender al infinito (para una conexión rígida) la constante e tiende a cero y la matriz en la Tabla 6-3 se convierte en la misma de la Tabla 4-2.

TABLA 6-3. MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO PARA VIGA CON CONEXIONES ELASTICAS

$$S_M = \frac{EI_z}{e_2 e_6} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} e_2 & \frac{6}{L^2} e_2 & -\frac{12}{L^3} e_2 & \frac{6}{L^2} e_2 \\ \frac{6}{L^2} e_2 & \frac{4}{L} e_3 & -\frac{6}{L^2} e_2 & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} e_2 & -\frac{6}{L^2} e_2 & \frac{12}{L^3} e_2 & -\frac{6}{L^2} e_2 \\ \frac{6}{L^2} e_2 & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} e_2 & \frac{4}{L} e_3 \end{bmatrix}$$

Similarmente, se pueden deducir en forma literal fórmulas para los elementos de la matriz de cambio T_{ML} ; los resultados se enume-

TABLA 6-4. MATRIZ DE CAMBIO PARA VIGA CON CONEXIONES ELASTICAS

$$T_{ML} = \frac{1}{12e^2 ab + e_4 L^2} \begin{bmatrix} -\frac{b^2}{L} (3ae_2^2 + be_4) & \frac{6ab}{L} e_1 e_2 \\ -\frac{ab^2}{L} (ae_2 + be_4) & \frac{b}{L^2} (2a^2 e_1 + 3a^2 be_2 - b^3 e_4) \\ -\frac{a^2}{L} (ae_4 + 3be_2^2) & -\frac{6ab}{L} e_1 e_2 \\ \frac{a^2 b}{L} (ae_4 + be_2) & \frac{a}{L^2} (-a^3 e_4 + 3ab^2 e_2 + 2b^3 e_1) \end{bmatrix}$$

ran en la Tabla 6-4. Cuando e se hace igual a cero, los elementos de T_{ML} en esta tabla se convierten en los mismos de los de la Ec. (6-4) para una viga con nudos rígidos (véase el Art. 6.3).

También se pueden deducir matrices similares a las de las Tablas 6-3 y 6-4 para el caso de conexiones alásticas desiguales en los extremos j y k de la viga y para el caso de una conexión elástica en sólo un extremo de la viga. Además, otros tipos de conexiones elásticas y otros tipos de miembros estructurales se pueden considerar.

6.11. Deformaciones por cortante. En vigas, marcos y parrillas, las deformaciones de miembros debidas a fuerzas cortantes pueden ser de magnitud significativa. Si esto es cierto, los efectos de deformaciones por cortante deben ser incluidos en los análisis de tales estructuras haciendo las modificaciones apropiadas de las matrices S_M y T_{ML} . Las matrices modificadas para vigas prismáticas se presentan en este artículo y los cambios hechos en las matrices de viga se pueden fácilmente extender para obtener los cambios requeridos en las matrices para marcos y parrillas.

Los elementos de la matriz de rigidez de miembro S_M de 4×4 se modificarán debido al hecho de que todos los desplazamientos unitarios de los extremos de una viga restringida producen cortante en el miembro. Considérese, por ejemplo, un desplazamiento unitario del extremo j del miembro en la dirección de y_M , como se muestra en la Fig. 6-14. El desplazamiento unitario consiste de dos partes, como sigue:

$$\frac{S_{M11}L^3}{12EI_z} + \frac{S_{M11}Lf}{GA_x} = 1 \quad (a)$$

La primera parte se debe a las deformaciones por flexión en el miembro; la segunda se debe a las deformaciones por cortante (véase el Apéndice A). Es conveniente introducir la constante adimensional de cortante g con el fin de simplificar a la Ec. (a):

$$g = \frac{6fEI_z}{GA_xL^2} \quad (6-44)$$

Resolviendo la Ec. (a) para S_{M11} en términos de la constante de cortante g , se tiene el siguiente resultado:

$$S_{M11} = \frac{12EI_z}{L^3} \left(\frac{1}{1+2g} \right) \quad (b)$$

Las expresiones para las otras acciones de restricción en la Fig. 6-14 se obtienen fácilmente por principios de equilibrio, y estas ac-

ciones se convierten en elementos en la primera columna de la matriz de rigidez de miembro S_M modificada. Las otras columnas de la matriz de rigidez se pueden obtener en una forma similar y los resultados se dan en la Tabla 6-5. Nótese que si la constante de cortante g se hace igual a cero, la matriz en la Tabla 6-5 se convierte en la misma de la Tabla 4-2.

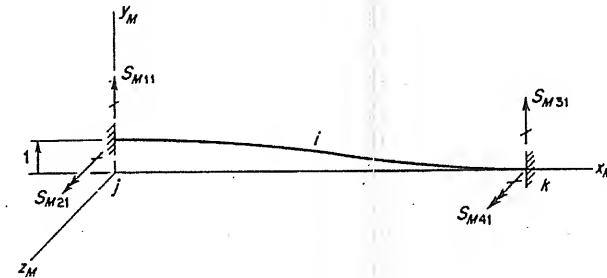


FIG. 6-14. Rigideces de miembro

TABLA 6-5. MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO PARA VIGA CON DEFORMACIONES POR CORTANTE

$$S_M = \frac{EI_z}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \left(1 + \frac{g}{2} \right) & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} (1-g) \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} (1-g) & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \left(1 + \frac{g}{2} \right) \end{bmatrix}$$

La matriz de cambio T_{ML} para una viga debe también modificarse para los efectos de deformación por cortante. Esta matriz se puede formar sin ninguna dificultad y la Tabla 6-6 muestra los resultados. Si la constante g es igual a cero, los elementos en la Tabla 6-6 se hacen iguales a los de la Ec. (6-4).

Por lo tanto, los efectos de deformaciones por cortante en vigas se pueden tomar en cuenta en forma conveniente usando las matrices modificadas S_M y T_{ML} descritas en este artículo.

6.12. Interacción axial-flexión. Los miembros estructurales que soportan tanto fuerzas axiales como momentos flexionantes están sujetos a una interacción entre estos dos efectos. La deflexión lateral de un miembro produce momentos flexionantes adicionales debido

TABLA 6-6. MATRIZ DE CAMBIO PARA VIGA CON DEFORMACIONES POR CORTANTE

$$T_{ML} = \frac{1}{1 + 2g} \begin{bmatrix} -\frac{b^2}{L^3} [3a + b + 2b(L/b)^2 g] & \frac{6ab}{L^3} \\ -\frac{ab^2}{L^2} [1 + (L/b)g] & \frac{b}{L^2} (2a - b - 2gL) \\ -\frac{a^2}{L^3} [a + 3b + 2a(L/a)^2 g] & -\frac{6ab}{L^3} \\ \frac{a^2 b}{L^2} [1 + (L/a)g] & \frac{a}{L^2} (2b - a - 2gL) \end{bmatrix}$$

a la presencia de una fuerza axial. Si esta interacción axial-flexión se toma en cuenta, la matriz de rigidez de miembro S_M y la matriz de cambio T_{ML} se deben alterar. Los cambios que se requieren en estas matrices para una viga sujeta a los efectos axiales y de flexión se describen en este artículo; las ideas también se pueden extender a otros tipos de estructuras.

Considérese primero los cambios que se requieren en la matriz de rigidez de miembro S_M para una viga. Las Fig. 6-15a y 6-15b muestran una viga restringida que soporta una fuerza axial de compresión P y que está sujeta a una translación unitaria y a una rotación

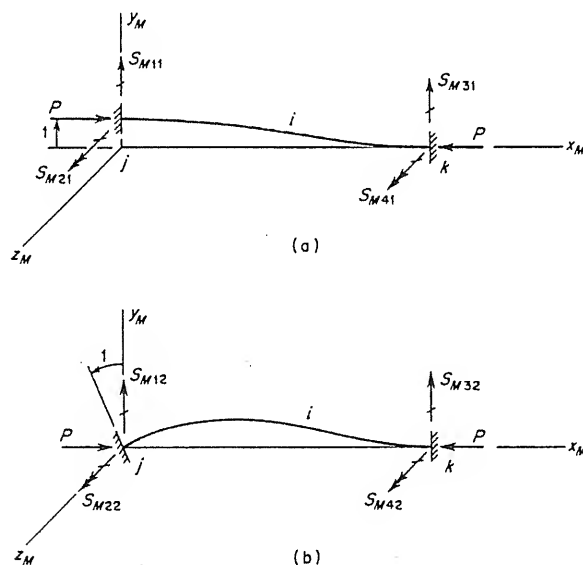


FIG. 6-15. Viga con fuerza axial

unitaria en el extremo j (se omiten las figuras que muestran desplazamientos similares en el extremo k). La fuerza axial puede ser de tensión o compresión, pero la compresión generalmente es de mayor interés que la tensión debido a la posibilidad de pandeo. Debido a los desplazamientos laterales mostrados en las figuras, los momentos flexionantes en la viga se modifican por la presencia de la fuerza axial. Los términos en la matriz de rigidez de miembro S_M se indican en la Tabla 6-7 y se expresan en términos de las cuatro

TABLA 6-7. MATRIZ DE RIGIDEZ DE MIEMBRO PARA VIGA SUJETA A FUERZA AXIAL

$$S_M = EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} s_1 & \frac{6}{L^2} s_2 & -\frac{12}{L^3} s_1 & \frac{6}{L^2} s_2 \\ \frac{6}{L^2} s_2 & \frac{4}{L} s_3 & -\frac{6}{L^2} s_2 & \frac{2}{L} s_4 \\ -\frac{12}{L^3} s_1 & -\frac{6}{L^2} s_2 & \frac{12}{L^3} s_1 & -\frac{6}{L^2} s_2 \\ \frac{6}{L^2} s_2 & \frac{2}{L} s_4 & -\frac{6}{L^2} s_2 & \frac{4}{L} s_3 \end{bmatrix}$$

funciones de rigidez s_1, s_2, s_3, s_4 . Estas funciones se definen en la Tabla 6-8 para los casos de una fuerza axial que es compresión, tensión o cero. Todas estas fórmulas se pueden deducir por análisis elemental de viga, considerando la presencia de la fuerza axial (análisis de viga-columna).

La matriz de cambio T_{ML} también se afecta por la presencia de una fuerza axial y los elementos de esta matriz se pueden también obtener por análisis de viga-columna.

Si se van a tomar en cuenta en el análisis de marcos planos o en el espacio las interacciones axial-flexión, es necesario hacer otras modificaciones al método de la rigidez además de las ya descritas. El análisis se complica por el hecho de que las fuerzas axiales en los miembros están relacionadas con los desplazamientos de nudo. Por lo tanto, el análisis se debe conducir en una forma cíclica. En el primer ciclo de análisis, el método de la rigidez se aplica como se explicó en el Cap. 4. En el segundo ciclo, las fuerzas axiales en los miembros, como se obtuvieron del primer ciclo, se emplean para determinar las rigideces de miembro modificadas dadas en la Tabla 6-7 y también para determinar las acciones modificadas de empotramiento. El segundo ciclo se completa empleando las rigideces y las acciones de empotramiento modificadas, obteniendo así los nuevos valores de las fuerzas axiales. Este proceso se repite hasta que

TABLA 6-8. FUNCIONES DE RIGIDEZ PARA UNA VIGA SUJETA A FUERZA AXIAL

Función	Condición de fuerza axial		
	Compresión	Cero	Tensión
s_1	$\frac{(kL)^3 \text{sen } kL}{12\phi_C}$	1	$\frac{(kL)^3 \text{senh } kL}{12\phi_T}$
s_2	$\frac{(kL)^2(1 - \cos kL)}{6\phi_C}$	1	$\frac{(kL)^2(\cosh kL - 1)}{6\phi_T}$
s_3	$\frac{kL(\text{sen } kL - kL \cos kL)}{4\phi_C}$	1	$\frac{kL(kL \cosh kL - \text{senh } kL)}{4\phi_T}$
s_4	$\frac{kL(kL - \text{sen } kL)}{2\phi_C}$	1	$\frac{kL(\text{senh } kL - kL)}{2\phi_T}$
$\phi_C = 2 - 2 \cos kL - kL \text{sen } kL$ $\phi_T = 2 - 2 \cosh kL + kL \text{senh } kL$ $k = \sqrt{\frac{P}{EI_z}}$			

dos análisis sucesivos producen, aproximadamente, los mismos resultados.

El método cíclico de análisis arriba descrito se puede usar para determinar la carga de pandeo para un marco. Las cargas en el marco se pueden aumentar gradualmente hasta que la matriz de rigidez S se hace singular. Esta singularidad es el criterio para obtener la magnitud de carga que produce la inestabilidad elástica en el modo fundamental de pandeo.

REFERENCIAS GENERALES SOBRE METODOS MATRICIALES EN ANÁLISIS ESTRUCTURAL

1. Argyris, J. H., "On the Analysis of Complex Elastic Structures," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 11, no. 7, July 1959, pp. 331-338.
2. Argyris, J. H., and Kelsey, S., *Energy Theorems and Structural Analysis*, Butterworths, London, 1960.
3. Gallagher, R. H., *A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis*, The Macmillan Company, New York, 1964.
4. Hall, A. S., and Woodhead, R. W., *Frame Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1961.
5. Matheson, J. A. L., *Hyperstatic Structures*, vol. 1, Academic Press Inc., New York, 1959.
6. McMinn, S. J., *Matrices for Structural Analysis*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962.

7. Morice, P. B., *Linear Structural Analysis*, The Ronald Press Company, New York, 1959.
8. Pestel, E. C., and Leekie, F. A., *Matrix Methods in Elastomechanics*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1963.
9. Pipes, L. A., *Matrix Methods for Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.
10. deVeubeke, B. F. (ed.), *Matrix Methods of Structural Analysis*, The Macmillan Company, New York, 1964.

APENDICE A

DESPLAZAMIENTOS DE ESTRUCTURAS

A.1. Esfuerzos y deformaciones en barras. Siempre que una carga se aplique a una estructura se desarrollarán esfuerzos en el material y sucederán deformaciones. Deformación significa cualquier cambio en la forma de alguna parte de la estructura, tal como un cambio en la forma de un elemento cortado de un miembro, mientras que los esfuerzos se refieren a las acciones distribuidas que ocurren internamente entre elementos adyacentes de la estructura. Se supone, en los análisis subsecuentes, que las deformaciones son muy pequeñas y que el material es linealmente elástico (ley de Hooke). Bajo estas condiciones los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones unitarias correspondientes en el material, y el principio de su superposición se puede usar para combinar esfuerzos, deformaciones unitarias y deformaciones debidas a varios sistemas de carga.

Los principales tipos de deformaciones por considerar son las deformaciones axial, por flexión por torsión y por cortante. Estas se producen por resultantes de esfuerzo en la forma de fuerzas axiales, pares de flexión, pares de torsión y fuerzas cortantes, respectivamente. En cada uno de estos cuatro casos las expresiones para los esfuerzos que actúan en la sección transversal, las deformaciones unitarias en un elemento y la deformación de un elemento se resumen en este artículo. Además, se describen las deformaciones producidas por efectos de temperatura.

El cálculo de desplazamientos en estructuras se describe en los Arts. A.2 y A.3. Este tema es una parte importante del método de análisis de la flexibilidad (véanse los Caps. 2 y 3) y se presenta en este apéndice con el fin de revisarse. Se encontrará mayor información sobre el tema en textos sobre mecánica de materiales y teoría elemental de estructuras.

Deformaciones axiales. El miembro mostrado en la Fig. A-1a se supone que está sujeto a una fuerza P de tensión en cada extremo. El miembro estará a tensión pura debido a estas fuerzas, siempre y cuando cada fuerza actúe en el centroide del área de sección transver-

sal. A cualquier distancia x del extremo izquierdo el esfuerzo de tensión σ_x en la sección transversal es

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \quad (\text{A-1})$$

en donde A es el área de sección transversal. La deformación unitaria axial ϵ_x en el miembro es igual al esfuerzo dividido entre el módulo de elasticidad E del material:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{P}{EA} \quad (\text{A-2})$$

La cantidad EA se denomina *rigidez axial* de la barra.

El cambio en longitud $d\Delta$ de un elemento de longitud inicial dx se indica en la Fig. A-1b y está dado por la fórmula

$$d\Delta = \epsilon_x dx = \frac{P}{EA} dx \quad (\text{A-3})$$

La deformación total Δ de la barra mostrada en la Fig. A-1a se obtiene integrando a $d\Delta$ a lo largo de la longitud L del miembro:

$$\Delta = \int d\Delta = \int_0^L \frac{P}{EA} dx \quad (\text{A-4})$$

Si el miembro es prismático y E es constante, la integración de la Ec. (A-4) da:

$$\Delta = \frac{PL}{EA} \quad (\text{A-5})$$

Esta ecuación se puede usar para calcular el cambio en la longitud de una barra prismática sujeta a una fuerza axial constante.

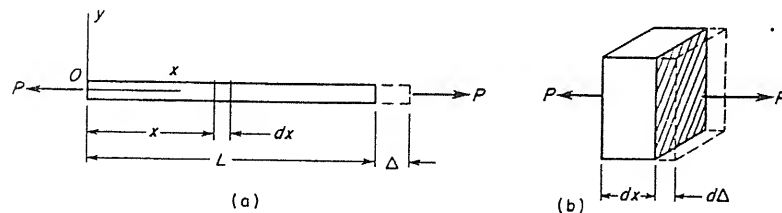


FIG. A-1. Deformaciones axiales

Si la fuerza axial P varía a lo largo de la longitud de la barra, la Ec. (A-4) puede aún usarse. Todo lo que es necesario es expresar a

P como una función de x y entonces llevar a cabo la integración. Si la barra tiene ligeramente forma de cono, entonces A se debe expresar como función de x , después de lo cual la integración se puede hacer. Finalmente, debe notarse que todas las ecuaciones de arriba son válidas para una barra de cualquier forma en su sección transversal, siempre y cuando P actúe a través del centroide de la sección.

Deformaciones por flexión. En la Fig. A-2a se muestra una barra sujeta a momento flexionante puro producido por pares M que actúan en cada extremo de la barra. Se supone que el plano de flexión (el plano $x-y$) es un plano de simetría de la viga y, por lo tanto, el eje y es un eje de simetría del área de la sección transversal (véase la Fig. A-2b). Este requisito también significa que los ejes y y z son ejes principales en el punto O , que es el centroide de la sección transversal. Con los pares flexionantes M , actuando como se muestra en la Fig. A-2, se concluye que todos los desplazamientos de la viga estarán en el plano $x-y$.*

En cualquier sección transversal de la viga el esfuerzo de flexión σ_x está dado por la fórmula

$$\sigma_x = \frac{My}{I_z} \quad (\text{A-6})$$

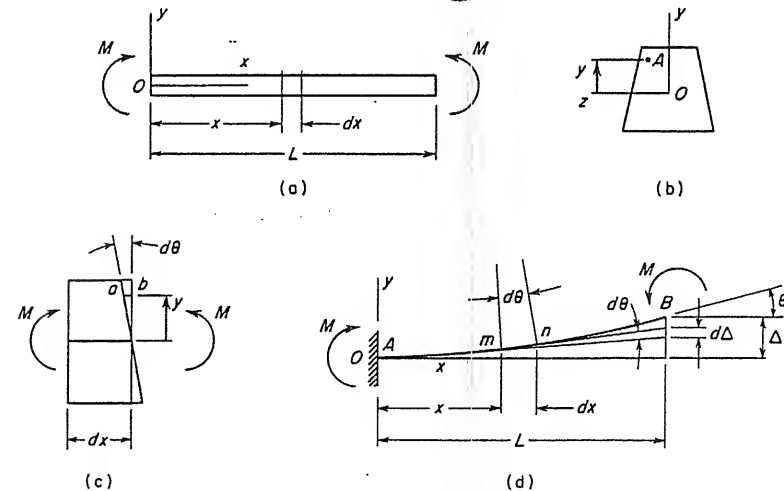


FIG. A-2. Deformaciones por flexión

* Si la sección transversal de la viga no es simétrica con respecto al eje y , el análisis de flexión se hace más complicado, ya que la flexión no aparecerá en un solo plano. Se hace entonces necesario tomar el origen O a través del centro de cortante de la sección transversal y tomar los ejes y y z como ejes principales a través de ese punto. Entonces la viga se analiza por flexión en ambos planos principales, así como también por torsión, y los resultados se combinan para dar los esfuerzos finales y desplazamientos.

en donde y es la distancia del eje neutro (el eje z), a cualquier punto A en la sección transversal (véase la Fig. A-2b), e I_z es el momento de inercia del área de la sección transversal con respecto al eje z . La deformación unitaria por flexión ϵ_x en el mismo punto es igual al esfuerzo por flexión dividido entre el módulo de elasticidad; por lo tanto,

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \left(- \frac{My}{EI_z} \right) \quad (\text{A-7})$$

El signo menos que aparece en las Ecs. (A-6) y (A-7) se debe a que los momentos positivos de flexión M producen esfuerzos negativos (compresión) en la región donde y es positiva.

El ángulo relativo de rotación $d\theta$ entre dos secciones transversales se muestra en la Fig. A-2c. Para ángulos pequeños de rotación este ángulo se puede encontrar dividiendo el acortamiento ab de una fibra a la distancia y del eje neutro entre la misma distancia y . Ya que la distancia ab es igual a $-\epsilon_x dx$, la expresión $d\theta$ se convierte en

$$d\theta = \frac{-\epsilon_x dx}{y}$$

De la sustitución de la Ec. (A-7) en esta ecuación resulta:

$$d\theta = \frac{M}{EI_z} dx \quad (\text{A-8})$$

La cantidad EI_z en el denominador se le nombra la *rigidez a la flexión* de la viga.

La expresión (A-8) se puede, en algunas ocasiones, usar para calcular ángulos de rotación y desplazamientos de vigas. Un ejemplo de este tipo se muestra en la Fig. A-2d, donde se supone que el extremo izquierdo A de la barra, que está a flexión pura, se encuentra empujado en un apoyo y no gira. El ángulo de rotación θ del extremo B se puede determinar integrando a $d\theta$ (véase la Ec. A-8) a lo largo de la longitud del miembro. La expresión para θ es

$$\theta = \int d\theta = \int_0^L \frac{M}{EI_z} dx \quad (\text{A-9})$$

en donde dx es la longitud del pequeño elemento mn de la viga. Si el miembro es prismático y E es constante, la integración de la Ec. (A-9) da la siguiente expresión para el ángulo en B por flexión pura:

$$\theta = \frac{ML}{EI_z} \quad (\text{A-10})$$

Sin embargo, la Ec. (A-9) también se puede usar con buen éxito para

casos en los cuales el momento flexionante varía a lo largo de la viga o también cuando la barra está ligeramente ahusada. El procedimiento es sustituir la expresión apropiada para M e I_z en la Ec. (A-9) y luego llevar a cabo la integración.

La deflexión Δ en el extremo B de la viga (Fig. A-2d) se ve que consiste en la suma de las pequeñas distancias $d\Delta$, cada una de las cuales es una intersección de la vertical que pasa por B con las líneas tangentes que pasan por los puntos m y n . Por lo tanto, para pequeños ángulos de rotación la intersección $d\Delta$ es

$$d\Delta = (L - x)d\theta$$

o, usando la Ec. (A-8),

$$d\Delta = (L - x) \frac{M}{EI_z} dx \quad (\text{A-11})$$

La integración a lo largo de la longitud del miembro da el desplazamiento total Δ para una viga prismática como sigue:

$$\Delta = \int d\Delta = \int_0^L (L - x) \frac{M}{EI_z} dx = \frac{ML^2}{2EI_z} \quad (\text{A-12})$$

Este ejemplo para una viga a flexión pura requiere únicamente cálculos muy sencillos para encontrar el desplazamiento. El mismo esquema se puede usar si M o la rigidez a la flexión EI_z varía a lo largo de la longitud.

Bajo condiciones más generales se hace necesario emplear otros métodos para determinar los desplazamientos de vigas, tales como el método de carga unitaria descrito en el Art. A.2.

Deformaciones por torsión. Las deformaciones producidas por torsión pura de una barra que tiene una sección transversal circular se ilustra en la Fig. A-3. La barra tiene una longitud L y está sujeta a pares de torsión T en sus extremos (véase la Fig. A-3a).* La deformación de un elemento localizado a una distancia x de un extremo

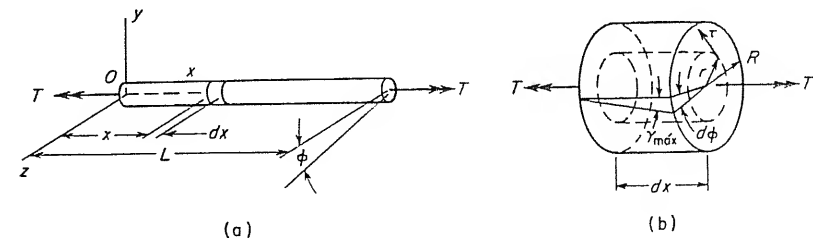


FIG. A-3. Deformaciones por torsión

* En este libro una flecha de doble punta (o vector) se usa para representar un par. El sentido del par es de acuerdo con la regla de signos de la mano derecha.

de la barra se muestra en la Fig. A-3b. La deformación consiste en una rotación relativa respecto del eje x de una sección transversal con respecto a otra. El ángulo relativo de rotación se denomina $d\phi$ en la figura. Asociados a la deformación están los esfuerzos cortantes y las deformaciones unitarias por cortante γ .

Los esfuerzos cortantes por torsión son directamente proporcionales a la distancia del eje longitudinal y , a una distancia r del eje (véase la Fig. A-3b), la intensidad de esfuerzo se da por la fórmula

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad \gamma = \frac{\pi R^2}{2} \quad (A-13)$$

en donde J es el momento polar de inercia de la sección transversal circular; por lo tanto, J es igual a $\pi R^4/2$, donde R es el radio de la barra. El máximo esfuerzo cortante aparece en la superficie exterior de la barra y se obtiene de la fórmula

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{J} \quad (A-14)$$

El esfuerzo cortante que actúa en secciones transversales circulares tiene siempre una dirección normal al radio y el mismo sentido de la torsión T .

La deformación unitaria por cortante γ en el radio r es igual al esfuerzo cortante dividido entre el módulo de elasticidad al cortante G del material; por lo tanto,

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Tr}{GJ} \quad (A-15)$$

La expresión para la máxima deformación unitaria por cortante (véase la Fig. A-3b) es

$$\gamma_{\max} = \frac{TR}{GJ} \quad (A-16)$$

La cantidad GJ que aparece en la fórmula de arriba se denomina *rigidez a la torsión* de la barra.

El ángulo relativo de rotación $d\phi$ entre los lados del elemento de la Fig. A-3b es

$$d\phi = \frac{\gamma_{\max}}{R} dx$$

como se puede ver de la geometría de la figura. Esta expresión toma la siguiente forma cuando se sustituye la Ec. (A-16):

$$d\phi = \frac{T}{GJ} dx \quad (A-17)$$

De la Ec. (A-17), el ángulo total de torsión ϕ (véase la Fig. A-3a) se puede encontrar por integración de $d\phi$ a lo largo de la longitud del miembro. El resultado es

$$\phi = \int d\phi = \int_0^L \frac{T}{GJ} dx \quad (A-18)$$

que para miembros cilíndricos con torsión constante T se convierte en

$$\phi = \frac{TL}{GJ} \quad (A-19)$$

Todas las fórmulas arriba dadas se pueden usar ya sea para barras circulares sólidas o tubulares. Por supuesto, en el último caso J se debe tomar igual al momento polar de inercia de la sección transversal anular.

Debe notarse que la Ec. (A-18) se puede usar para barras circulares sólidas o tubulares que estén sujetas a una torsión T que varía a lo largo de la longitud de la barra. También se pueden usar cuando J varía, siempre y cuando la variación sea gradual. En cualquiera de estos casos la expresión para T o J , como una función de x , se sustituye en la Ec. (A-18) antes que la integración se haya llevado a cabo.

Si la sección transversal de la barra no es circular o anular, el análisis de torsión es más complicado que el arriba descrito para una barra con sección circular. Sin embargo, para torsión pura en donde el par de torsión T es constante a lo largo de la longitud, la fórmula para el ángulo de torsión (véase la Ec. A-19) se puede usar todavía con buen éxito, siempre y cuando J se tome como la constante de torsión apropiada para la sección transversal particular. En el Apéndice C están tabuladas constantes de torsión para varias formas de secciones transversales.

Si la sección transversal de la barra no es circular aparecerá alabeo en la misma sección. El alabeo se refiere a desplazamientos longitudinales de punto de la sección transversal, de tal modo que esta ya no es una superficie plana. El alabeo ocurre en el caso de vigas I y vigas canal, así como otras secciones, y se requiere un análisis más complicado. Sin embargo, en tales casos, por lo general, se encuentra que el análisis basado únicamente en torsión pura, despreciando los efectos de alabeo, da resultados conservadores. La torsión en donde aparece el alabeo se denomina *torsión no uniforme*.*

* Para la teoría de torsión no uniforme en vigas, véase S. P. Timoshenko, *Strength of Materials*, Parte II, tercera edición, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1956, Págs. 244-273.

Deformaciones por cortante. Generalmente existen tanto fuerzas cortantes como momentos flexionantes que actúan en las secciones transversales de una viga. Por ejemplo, a una distancia x del apoyo empotrado de la viga en voladizo, mostrada en la Fig. A-4a, existirá un momento flexionante M (supóngase positivo cuando la parte superior de la viga está en compresión) dado por la ecuación

$$M = -P(L - x) \quad (\text{A-20})$$

La dirección positiva para M se muestra en la Fig. A-4b, lo cual muestra un elemento de longitud dx de la viga. La fuerza cortante V es constante a lo largo de la longitud de la viga y se obtiene en este ejemplo de la expresión

$$V = P \quad (\text{A-21})$$

En esta expresión se supone que la fuerza cortante positiva es hacia abajo en el lado derecho del elemento y hacia arriba en el lado izquierdo (véase la Fig. A-4b). En un caso más general, la fuerza cortante V , así como el momento flexionante M , variarán a lo largo de la longitud de la viga.

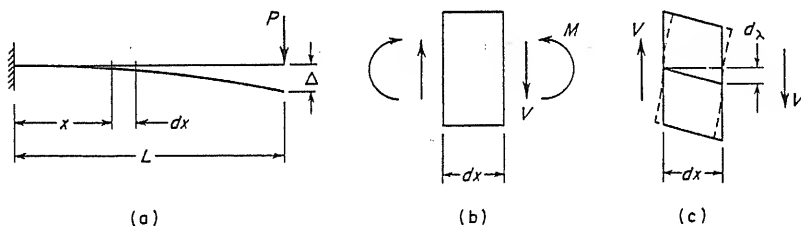


FIG. A-4. Deformaciones por cortante

Los esfuerzos cortantes en la sección transversal de una viga, cuya sección es rectangular, debidos a la fuerza cortante V se pueden encontrar por la fórmula

$$\tau = \frac{VQ}{I_z b} \quad (\text{A-22})$$

en donde Q es el primer momento (o momento estático) respecto al eje neutro de la porción del área de sección transversal que está afuera de la sección donde el esfuerzo cortante se debe determinar; I_z es el momento de inercia del área de la sección transversal respecto al eje neutro; y b es el ancho de la viga rectangular. La Ec. (A-22) se puede usar para encontrar esfuerzos cortantes en algunas otras formas de vigas; por ejemplo, se puede emplear para calcular los esfuerzos cortantes en el alma de una viga I, siempre y cuando b sea

tomada como el espesor del alma de la viga. Por otro lado, no se puede emplear para calcular esfuerzos en una viga de sección transversal circular. La deformación unitaria al cortante γ se puede encontrar dividiendo el esfuerzo cortante τ entre el módulo de elasticidad al cortante G .

Anteriormente se consideró tan sólo la deformación de un elemento de una viga producida por la acción de momentos flexionantes (véase la Fig. A-2c). En la presente discusión sólo se tomarán en cuenta las deformaciones producidas por fuerzas cortantes V . Estas deformaciones consisten en un desplazamiento relativo $d\lambda$ de un lado del elemento con respecto a otro (véase la Fig. A-4c). El desplazamiento $d\lambda$ está dado por la expresión

$$d\lambda = f \frac{V dx}{GA} \quad (\text{A-23})$$

en donde A es el área de la sección transversal y f es un factor de forma que depende de la forma de la sección transversal. Los valores del factor de forma para varias formas de la sección transversal se dan en el Apéndice C. La cantidad GA/f se denomina rigidez al cortante de la barra.

La presencia de las deformaciones por cortante $d\lambda$ en los elementos de una viga significa que el desplazamiento total de cualquier otro punto a lo largo de la viga se verá influido tanto por la deformación por flexión como por la deformación por cortante. Generalmente, los efectos del cortante son pequeños comparados con los efectos de flexión y se pueden despreciar; sin embargo, si se desea incluir las deformaciones por cortante en los cálculos de desplazamientos, es posible hacerlo empleando el método de carga unitaria, según se describió en el Art. A.2.

En algunos casos elementales las deflexiones debidas a deformaciones por cortante se pueden calcular por aplicación directa de la Ec. (A-23). Esta ecuación se puede emplear, por ejemplo, en calcular la deflexión Δ en el extremo de la viga en voladizo de la Fig. A-4a. La porción Δ_s de la deflexión total, que se debe únicamente al efecto de deformaciones por cortante, es igual a (véanse las Ecs. A-21 y A-23)

$$\Delta_s = \int d\lambda = \int_0^L \frac{fP}{GA} dx = \frac{fPL}{GA} \quad (\text{A-24})$$

La parte restante Δ_f de la deflexión se debe a la flexión y se puede encontrar integrando a la Ec. (A-11). Sin embargo, la Ec. (A-11) se dedujo sobre la base de que la deflexión hacia arriba Δ era positiva, mientras que en la Fig. A-4a la deflexión Δ es hacia abajo. Por lo

tanto, se hace necesario cambiar el signo de la expresión que aparece en la Ec. (A-11); el resultado es:

$$\Delta_b = \int_0^L - (L - x) \frac{M}{EI_z} dx$$

El momento flexionante M para la viga está dado por la Ec. (A-20) y, cuando esta expresión se sustituye en la ecuación de arriba, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Delta_b = \int_0^L \frac{(L - x)^2 P}{EI_z} dx = \frac{PL^3}{3EI_z} \quad (\text{A-25})$$

Sumando las deflexiones debidas tanto a las deformaciones por flexión como a las deformaciones por cortante se obtiene la deflexión total Δ , como sigue:

$$\Delta = \Delta_b + \Delta_s = \frac{PL^3}{3EI_z} + \frac{fPL}{GA} \quad (\text{A-26})$$

De esta ecuación se encuentra que la relación de la deflexión por cortante y la deflexión por flexión es $3fEI_z/GAL^2$. Esta relación es muy pequeña comparada con la unidad, excepto en el caso de vigas cortas y peraltadas; por lo tanto, en la mayoría de los casos se puede despreciar.

Deformaciones por temperatura. Cuando la temperatura de una estructura varía, existe una tendencia a producir cambios en la forma de la estructura. Las deformaciones y desplazamientos resultantes pueden ser de importancia considerable en el análisis de la estructura. A fin de obtener fórmulas para deformaciones debidas a temperaturas, considérese la barra mostrada en la Fig. A-5a. Un cambio uniforme de temperatura a lo largo de la barra produce un aumento en la longitud de la barra dado por

$$\Delta L = \alpha L (\Delta T) \quad (\text{A-27})$$

en donde ΔL es el cambio de longitud (el signo positivo indica alargamiento); α es el coeficiente de expansión térmica; L es la longitud de la barra; y ΔT es el cambio en temperatura (el signo positivo indica aumento en la temperatura). Además, todas las otras dimensiones de la barra se cambiarán proporcionalmente, pero sólo el cambio de longitud será de importancia en el análisis de estructuras reticulares.

La deformación de un elemento de la barra de longitud dx (Fig. A-5a) será análoga a la de la barra entera. La deformación longitudinal del elemento se muestra en la Fig. A-5b, y se ve que es del

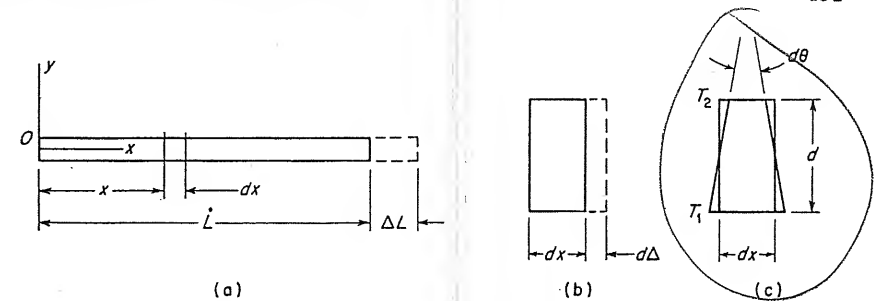


FIG. A-5. Deformaciones por temperatura

mismo tipo de la producida por una fuerza axial (véase la Fig. A-1b). Esta deformación está dada por la expresión

$$d\Delta = \alpha (\Delta T) dx \quad \text{D} = \alpha \Delta T^\circ L \quad (\text{A-28})$$

La Ec. (A-28) se puede usar para calcular los desplazamientos de estructuras debidos a cambios uniformes de temperaturas, según se describe en el siguiente artículo.

* Una diferencia de temperatura entre dos lados de la barra produce que cada elemento de la barra se deforme como se muestra en la Fig. A-5c. Si la temperatura varía linealmente entre T_2 en la parte superior de la viga y una temperatura mayor T_1 en la parte inferior de la viga, las secciones transversales de la viga permanecerán planas, según se ilustra en la figura. El ángulo relativo de rotación $d\theta$ entre los lados del elemento es

$$d\theta = \frac{\alpha (T_1 - T_2) dx}{d} \quad (\text{A-29})$$

en donde d es el peralte de la viga. La deformación representada por el ángulo $d\theta$ en la Ec. (A-29) es similar a la producida por momentos flexionantes que actúan en una viga (véase la Fig. A-2c). El uso de la Ec. (A-29) para encontrar desplazamientos de viga, también se mostrará en el Art. A.2.

Las fórmulas en los párrafos anteriores han sido presentadas para referencia en la solución de problemas y ejemplos que se encuentran a lo largo del libro. Debe ser consultado, para un estudio más completo de las informaciones, un libro de texto sobre mecánica de materiales.

A.2. Método de la carga unitaria. El método de la carga unitaria es muy general y versátil para calcular desplazamientos de estructuras. Se puede emplear (en teoría) ya sea para estructuras determinadas o indeterminadas, aunque para cálculos prácticos se emplean casi exclusivamente para estructuras estáticamente determinadas,

debido a que su uso requiere que los esfuerzos resultantes se conozcan en toda la estructura. El método se puede emplear para determinar los desplazamientos producidos por las cargas sobre una estructura, así como los desplazamientos producidos por cambio de temperatura, mal ajuste de las partes y otros efectos. Los efectos de las deformaciones axial, por flexión, por cortante y por torsión se pueden incluir en los cálculos. Las ideas fundamentales del método de la carga unitaria se describen en este artículo, en donde se resuelven varios ejemplos numéricos. En toda la discusión se supone que los desplazamientos de la estructura son pequeños y que el material es linealmente elástico.

La ecuación básica del método de la carga unitaria se deduce generalmente del principio de trabajo virtual y, por lo tanto, el método es en ocasiones denominado *método de trabajo virtual*. Se conoce también como el *método de la carga virtual* y el *método de Maxwell-Mohr*. El primer nombre proviene del uso de una carga ficticia o virtual (como más adelante se describe); el último nombre se usa debido a que J. C. Maxwell, en 1864, y O. Mohr, en 1874, dedujeron el método independientemente.

Se deben considerar dos sistemas de carga cuando se usa el método de la carga unitaria. El primer sistema consiste de la estructura en su condición real, esto es, sujeta a las cargas reales, cambios de temperatura u otros efectos. El segundo sistema consiste en la misma estructura sujeta a una carga unitaria correspondiente al desplazamiento deseado en la estructura real. La carga unitaria es una carga ficticia o virtual y se introduce únicamente para propósitos de análisis. Una carga unitaria correspondiente al desplazamiento significa una carga en el punto particular de la estructura donde el desplazamiento se va a determinar y que actúa en la dirección positiva de ese desplazamiento. El término "desplazamiento" se usa aquí en el sentido general, como se discutió en el Art. 1.4. Por lo tanto, un desplazamiento puede ser la translación de un punto en la estructura, el ángulo de rotación del eje de un miembro o una combinación de translaciones y rotaciones. Si el desplazamiento por calcular es una translación, la carga unitaria es una fuerza concentrada en el punto donde el desplazamiento ocurre. Además, la carga unitaria debe estar en la misma dirección que el desplazamiento y tiene el mismo sentido positivo. Si el desplazamiento por calcular es una rotación, entonces la carga unitaria es un par en el punto donde la rotación ocurre, y se supone positivo en el mismo sentido de una rotación positiva. Similarmente, si el desplazamiento es el desplazamiento relativo de dos puntos a lo largo de la línea que los une, la carga unitaria consiste de dos fuerzas colineales y opuestas que actúan en los dos

puntos; si el desplazamiento es una rotación relativa entre dos puntos, la carga unitaria consiste de dos pares iguales y opuestos aplicados en los puntos.

Las acciones (fuerzas y pares) en la estructura debidas a la carga unitaria, que es el segundo sistema de carga, constituyen un sistema de acciones en equilibrio. De acuerdo con el principio de trabajo virtual, si a un sistema deformable en equilibrio se le da un pequeño desplazamiento virtual, el trabajo total de las acciones externas es igual al trabajo total de las acciones internas. Las acciones internas (o esfuerzos resultantes) producidas por la carga unitaria en el segundo sistema se representarán por los símbolos N_U , M_U , T_U y V_U que indican la fuerza axial, momento flexionante, par de torsión y fuerza cortante, respectivamente, actuando en cualquier sección transversal en los miembros de la estructura.

Los desplazamientos virtuales del segundo sistema se toman igual a los desplazamientos reales del primer sistema, esto es, igual a los desplazamientos causados por las cargas reales, cambios de temperatura, y así sucesivamente. Las deformaciones en el primer sistema se indicarán como $d\Delta$ para deformación axial (véase la Fig. A-1b), $d\theta$ para deformación por flexión (véase la Fig. A-2c), $d\phi$ para deformación por torsión (véase la Fig. A-3b) y $d\lambda$ para deformación por cortante (véase la Fig. A-4c). Por lo tanto, el trabajo hecho en el segundo sistema por las acciones internas que actúan en un elemento de la estructura cuando las deformaciones $d\Delta$, $d\theta$, $d\phi$ y $d\lambda$ se imponen a ese elemento serán

$$N_U d\Delta + M_U d\theta + T_U d\phi + V_U d\lambda$$

El primer término en esta expresión representa el trabajo hecho por la fuerza axial N_U (producida por la carga unitaria) cuando el desplazamiento $d\Delta$ (debido a las cargas reales o a otros efectos) se impone al elemento. Una manifestación similar se puede hacer respecto de cada uno de los otros términos. Entonces, el trabajo total de las acciones internas es

$$\int N_U d\Delta + \int M_U d\theta + \int T_U d\phi + \int V_U d\lambda$$

donde las integraciones se efectúan para todos los elementos de la estructura.

El trabajo hecho por las acciones externas es el mismo que el trabajo hecho por la carga unitaria, debido a que la carga unitaria es la única fuerza externa (o par) que se mueve durante el desplazamiento virtual. Este trabajo es

deformación
↓
 $d\Delta$ - axial
 $d\theta$ - flexión
 $d\phi$ - torsión
 $d\lambda$ - cortante

en donde Δ representa el desplazamiento deseado debido al primer sistema de carga. Formando una ecuación del trabajo de las acciones externa e interna, da la ecuación fundamental del método de la carga unitaria:

$$\Delta = \int N_U d\Delta + \int M_U d\theta + \int T_U d\phi + \int V_U d\lambda \quad (\text{A-30})$$

En esta ecuación, Δ representa el desplazamiento que se va a calcular; N_U , M_U , T_U y V_U representan las fuerzas axiales, momentos flexionantes, pares de torsión y fuerzas cortantes producidas por una carga unitaria correspondiente a Δ ; y $d\Delta$, $d\theta$, $d\phi$ y $d\lambda$ representan las deformaciones producidas por el sistema real de carga. Debido a que la carga unitaria se ha separado de la parte izquierda de la Ec. (A-30), dejando únicamente el término Δ , se hace necesario considerar las cantidades N_U , M_U , T_U y V_U como si tuvieran las dimensiones de fuerza o momento por unidad de la carga unitaria aplicada.

Las cantidades $d\Delta$, $d\theta$, $d\phi$ y $d\lambda$ que aparecen en la Ec. (A-30) se pueden expresar en términos de las propiedades de la estructura. La expresión para $d\Delta$, cuando las deformaciones axiales son producidas por cargas únicamente, es (compare con la Ec. A-3):

$$d\Delta = \frac{N_L dx}{EA}$$

en donde N_L representa la fuerza axial en el miembro debida a las cargas reales en la estructura. Similarmente, si las deformaciones son producidas por un aumento uniforme de temperatura, la expresión para $d\Delta$ es (véase la Ec. A-28):

$$d\Delta = \alpha(\Delta T)dx$$

en donde α es el coeficiente de la expansión térmica y ΔT es el cambio de temperatura. Las expresiones para las cantidades de deformación restantes debidas a las cargas (compare con las Ecs. A-8, A-17 y A-23) son:

$$d\theta = \frac{M_L dx}{EI} \quad d\phi = \frac{T_L dx}{GJ} \quad d\lambda = \frac{V_L dx}{GA}$$

Las cantidades M_L , T_L y V_L representan el momento flexionante, el par de torsión y la fuerza cortante producidas por las cargas. Si hay diferencia de temperaturas a lo largo de la viga, la Ec. (A-29) se puede usar para la deformación $d\theta$.

Cuando las relaciones dadas arriba para las deformaciones debidas a las cargas, únicamente se sustituyen en la Ec. (A-30), la ecuación para el desplazamiento toma la forma

$$\Delta = \int \frac{N_U N_L dx}{EA} + \int \frac{M_U M_L dx}{EI} + \int \frac{T_U T_L dx}{GJ} + \int \frac{V_U V_L dx}{GA} \quad (\text{A-31})$$

Cada término en esta ecuación representa el efecto de un tipo de deformación en el desplazamiento total Δ que se va a encontrar. En otras palabras, el primer término representa el desplazamiento producido por deformaciones axiales; el segundo término representa el desplazamiento producido por deformaciones de flexión; y así, sucesivamente, para los términos restantes. Las convenciones de signo empleadas para las cantidades que aparecen en la Ec. (A-31) deben ser consistentes entre sí. Por lo tanto, las fuerzas axiales N_U y N_L se deben obtener de acuerdo con la misma convención; por ejemplo, la tensión es positiva. Similarmente, los momentos flexionantes M_U y M_L deben tener la misma convención de signo, así como también T_U y T_L , y V_U y V_L . Únicamente si las convenciones de signo son consistentes el desplazamiento Δ tendrá el mismo sentido positivo de la carga unitaria.

El procedimiento para calcular un desplazamiento por medio de la Ec. (A-31) es como sigue: (1) determinense las fuerzas y los momentos en la estructura debidos a las cargas (esto es, obtenga N_L , M_L , T_L y V_L); (2) colóquese una carga unitaria en la estructura correspondiente al desplazamiento Δ que se va a encontrar; (3) determinense las fuerzas y los momentos en la estructura debidos a la carga unitaria (esto es, encuéntrense N_U , M_U , T_U y V_U); (4) fórmense los productos mostrados en la Ec. (A-31) e intégrese cada término para toda la estructura; y (5) sume los resultados para obtener el desplazamiento total.

Generalmente, no todos los términos dados en la Ec. (A-31) se requieren para el cálculo de desplazamientos. En una armadura con nudos articulados y con cargas que actúan sólo en los nudos, no existirán deformaciones por flexión, torsión y cortante. Además, si cada miembro de la armadura es prismático el área de la sección transversal A será constante para cada miembro. En tal caso la ecuación para Δ se puede escribir como

$$\Delta = \sum \frac{N_U N_L L}{EA} \quad (\text{A-32})$$

en donde L representa la longitud de un miembro. La suma se efectúa para todas las barras de la armadura.

En una viga es claro que únicamente las deformaciones por flexión son importantes. Por lo tanto, la ecuación para los desplazamientos se simplifica a

$$\Delta = \int \frac{M_U M_L dx}{EI} \quad (\text{A-33})$$

En una forma análoga, es posible calcular desplazamientos empleando una combinación apropiada de términos de la Ec. (A-31), dependiendo de la naturaleza de la estructura y del grado de refinamiento que se requiere en el análisis. Se pueden emplear otros términos cuando los desplazamientos debidos a cambios de temperatura, deformaciones previas, etc., se van a encontrar. Todo lo que se necesita es sustituir en la Ec. (A-30) las expresiones apropiadas para las deformaciones. Se darán ahora algunos ejemplos del uso del método de la carga unitaria.

EJEMPLO 1. La armadura mostrada en la Fig. A-6a está sujeta a las cargas P y $2P$ en el nudo A. Se supone que todos los miembros de la armadura tienen la misma rigidez axial EA . El desplazamiento horizontal Δ_1 , del nudo B (positivo hacia la derecha) se va a calcular.

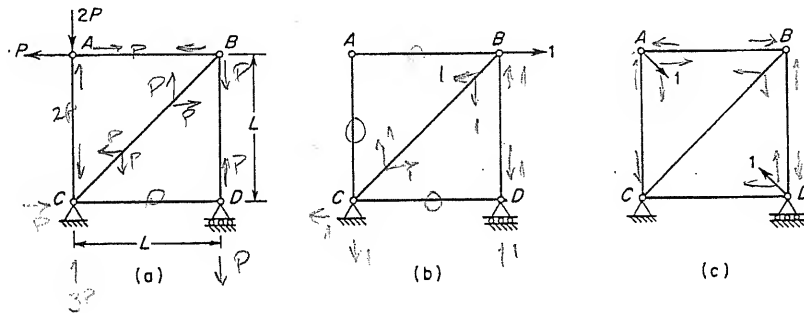


FIG. A-6. Ejs. 1 y 2

Los cálculos para el desplazamiento Δ_1 , por el método de la carga unitaria, están dados en la Tabla A-1. Las primeras dos columnas en la tabla identifican las barras de la armadura y sus longitudes. Las fuerzas axiales N_L , que se de-

TABLA A-1

Barra	Longitud	N_L	N_U	$N_U N_L L$	N_U	$N_U N_L L$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
AB	L	P	0	0	$-1/\sqrt{2}$	$-PL/\sqrt{2}$
AC	L	$-2P$	0	0	$-1/\sqrt{2}$	$2PL/\sqrt{2}$
BD	L	P	-1	$-PL$	$-1/\sqrt{2}$	$-PL/\sqrt{2}$
CD	L	0	0	0	$-1/\sqrt{2}$	0
CB	$\sqrt{2}L$	$-\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}PL$	1	$-2PL$
				$-3.828PL$		$-2PL$

terminan por equilibrio estático para la armadura mostrada en la Fig. A-6a, se enumeran en la columna (3) de la tabla. La carga unitaria correspondiente al

desplazamiento Δ_1 se muestra en la Fig. A-6b y las fuerzas axiales resultantes N_U se dan en la columna (4). Finalmente, los productos $N_U N_L L$ se obtienen para cada miembro (columna 5), sumados y divididos entre EA . Por lo tanto, el desplazamiento Δ_1 es (véase la Ec. A-32):

$$\Delta_1 = -3.828 \frac{PL}{EA}$$

El signo negativo en el resultado significa que Δ_1 es en la dirección opuesta de la carga unitaria (esto es, hacia la izquierda).

Un procedimiento similar se puede emplear para encontrar cualquier otro desplazamiento de la armadura. Por ejemplo, suponga que se desea determinar el desplazamiento relativo Δ_2 de los nudos A y D (véase la Fig. A-6a) a lo largo de la línea que los une. La correspondiente carga unitaria consiste en dos fuerzas unitarias, como se muestra en la Fig. A-6c. Las fuerzas axiales resultantes N_U en la armadura se enumeran en la columna (6) de la Tabla A-1, y los productos $N_U N_L L$ se dan en la columna (7). Por lo tanto, el desplazamiento relativo de los nudos A y D es

$$\Delta_2 = -2 \frac{PL}{EA}$$

en donde el signo menos indica que la distancia entre los puntos A y D ha aumentado (esto es, es opuesta al sentido de las cargas unitarias).

EJEMPLO 2. Considere de nuevo la armadura mostrada en la Fig. A-6a y suponga ahora que la barra BD se ha fabricado con una longitud que es más grande en una cantidad e que la longitud teórica L . El desplazamiento horizontal Δ_1 del nudo B y el desplazamiento relativo Δ_2 entre los puntos A y D se van a determinar (véanse las Figs. A-6b y A-6c) para las cargas unitarias correspondientes.

Cualquier desplazamiento de la armadura producido por la longitud incrementada del miembro BD se puede encontrar empleando la Ec. (A-30) y reteniendo únicamente el primer término en el lado derecho. Para una armadura la ecuación se puede expresar en la forma

$$\Delta = \sum N_U (\Delta L)$$

en donde la suma se efectúa para todos los miembros de la armadura y ΔL representa el cambio en la longitud de cualquier miembro. En este ejemplo la única barra en la armadura de la Fig. A-6a que tiene un cambio de longitud es la misma barra BD y, por lo tanto, hay únicamente un término en la suma. Para la barra BD, el término ΔL es

$$\Delta L = e$$

Al encontrar el desplazamiento horizontal del nudo B, la fuerza en la barra BD, debida a la carga unitaria mostrada en la Fig. A-6b, es

$$N_U = -1$$

como se muestra en el tercer renglón de la columna (4) en la Tabla A-1. Por lo tanto, el desplazamiento del nudo B es

$$\Delta_1 = -e$$

y es hacia la izquierda.

Cuando se va a encontrar la reducción de la distancia entre los nudos A y D, debida al aumento de longitud de la barra BD, el valor para N_U se convierte en

$$N_U = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

como se da en la columna (6) de la Tabla A-1; por lo tanto,

$$\Delta_2 = -\frac{e}{\sqrt{2}}$$

El signo negativo para Δ_2 muestra que los nudos A y D se mueven alejándose uno del otro.

Un cambio uniforme de temperatura en una o más barras de la armadura se maneja en la misma forma que un cambio de longitud. La única diferencia es que el cambio de longitud ΔL ahora se da por la Ec. (A-27). Por lo tanto, el desplazamiento horizontal del nudo B, debido a un aumento de temperatura de T grados en el miembro BD, se convierte en

$$\Delta_1 = -\alpha LT$$

y el cambio en la distancia entre los puntos A y D se convierte en

$$\Delta_2 = -\frac{\alpha LT}{\sqrt{2}}$$

EJEMPLO 3. La viga en voladizo AE mostrada en la Fig. A-7a está sujeta a cargas en los puntos B, C, D y E. Los desplazamientos de traslación Δ_1 y Δ_2 de la viga (positivos hacia arriba) en los puntos C y E, respectivamente, se van a determinar.

TABLA A-2

Seg- mento	Límites para x	M_L	Carga unitaria en C		Carga unitaria en E	
			M_U	$\int M_U M_L dx$	M_U	$\int M_U M_L dx$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
AB	0 a $L/2$	$\frac{P}{2}(4x + L)$	$L - x$	$\frac{17PL^3}{48}$	$2L - x$	$\frac{41PL^3}{48}$
BC	$L/2$ a L	$\frac{3PL}{2}$	$L - x$	$\frac{3PL^3}{16}$	$2L - x$	$\frac{15PL^3}{16}$
CD	L a $\frac{3L}{2}$	$\frac{PL}{2}$	0	0	$2L - x$	$\frac{3PL^3}{16}$
DE	$\frac{3L}{2}$ a $2L$	$P(2L - x)$	0	0	$2L - x$	$\frac{PL^3}{24}$
$\Rightarrow \int \frac{P}{2}(4x + L)(L - x)$				$\frac{13PL^3}{24}$		$\frac{97PL^3}{48}$

Los desplazamientos Δ_1 y Δ_2 se pueden encontrar de la Ec. (A-33), que se expresa en términos de los momentos flexionantes M_L y M_U . Los primeros momentos se deben a las cargas reales en la viga; los últimos se deben a las cargas unitarias correspondientes a los desplazamientos deseados. Se deben obtener las expresiones para M_L y M_U para cada segmento de la viga entre cargas aplicadas, y entonces estas expresiones se sustituyen en la Ec. (A-33) para obtener los desplazamientos.

Los cálculos requeridos se muestran en la Tabla A-2. Las dos primeras columnas de la tabla enumeran los segmentos de la viga y los límites para la distancia x, que se mide desde el apoyo empotrado. La columna (3) da las expresiones para los momentos flexionantes en la viga debidos a las cargas reales, suponiendo que la compresión en la parte superior de la viga corresponde a momento flexionante positivo. Los momentos M_U en la columna (4) son aquellos producidos por una carga unitaria en el punto C (Fig. A-7b). Estos momentos se evalúan de acuerdo con la misma convención de signo que se usó para determinar los momentos M_L . En seguida, la columna (5) muestra los resultados de evaluar la integral dada en la Ec. (A-33), excepto que el factor EI ha sido omitido, ya que se supone que es el mismo para todos los segmentos de

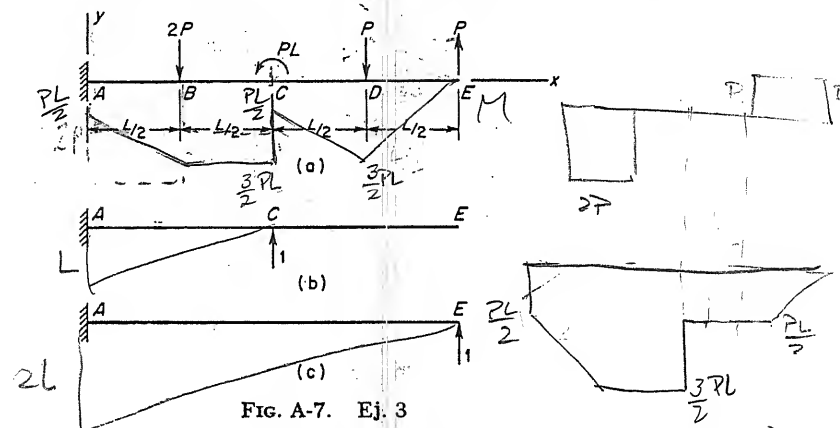


FIG. A-7. Ej. 3

la viga. Cuando se suman las expresiones en la columna (5) y el total es dividido entre EI, el resultado es el desplazamiento correspondiente a la carga unitaria. Por lo tanto, el desplazamiento en el punto C en la dirección de y es

$$\Delta_1 = \frac{13PL^3}{24EI}$$

y es en la dirección positiva del eje y (hacia arriba).

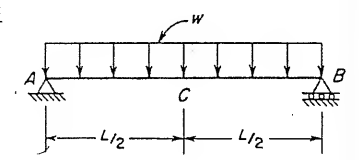
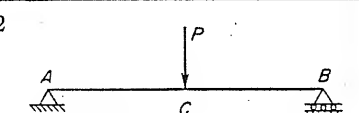
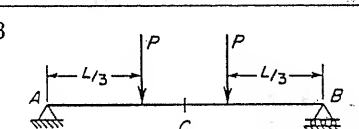
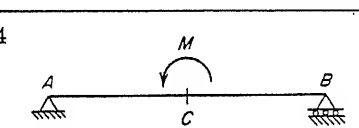
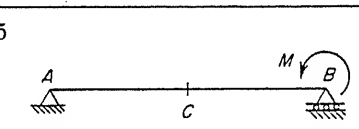
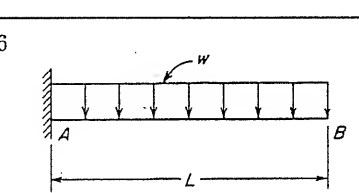
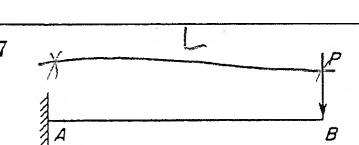
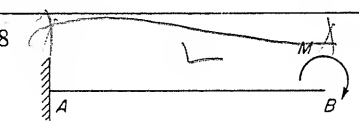
Los cálculos para la traslación en el punto E se muestran también en la Tabla A-2 (véanse las columnas 6 y 7). La carga unitaria empleada en establecer los momentos M_U se muestra en la Fig. A-7c. El resultado de los cálculos es

$$\Delta_2 = \frac{97PL^3}{48EI}$$

el cual, siendo positivo, muestra que la traslación es en la dirección del eje y.

EJEMPLO 4. En este ejemplo se supone que la viga mostrada en la Fig. A-7a está ahora sujeta a una diferencia de temperatura tal que el fondo de la

TABLA A-3. DESPLAZAMIENTOS DE VIGAS PRISMÁTICAS

Viga	Traslaciones (positivas hacia abajo)	Rotaciones (positivas en el sentido de las manecillas del reloj)
1 	$\Delta_C = \frac{5wL^4}{384EI}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{wL^3}{24EI}$
2 	$\Delta_C = \frac{PL^3}{48EI}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$
3 	$\Delta_C = \frac{23PL^3}{648EI}$	$\theta_A = -\theta_B = \frac{PL^2}{9EI}$
4 	$\Delta_C = 0$	$\theta_A = \theta_B = \frac{ML}{24EI}$
5 	$\Delta_C = \frac{ML^2}{16EI}$	$\theta_A = \frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{ML}{3EI}$
6 	$\Delta_B = \frac{wL^4}{8EI}$	$\theta_B = \frac{wL^3}{6EI}$
7 	$\Delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$	$\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$
8 	$\Delta_B = \frac{ML^2}{2EI}$	$\theta_B = \frac{ML}{EI}$

viga está a una temperatura T_1 , mientras que la parte superior de la viga está a una temperatura T_2 (véase la Fig. A-8). La fórmula para los desplazamientos se obtiene empleando únicamente el segundo término del lado derecho de la Ec. (A-30) y sustituyendo para $d\theta$ la expresión dada en la Ec. (A-29); por lo tanto,

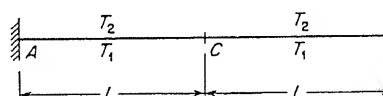
$$\Delta = \int M_U \frac{\alpha(T_1 - T_2)dx}{d}$$


FIG. A-8. Ej. 4

Las expresiones para M_U que se van a sustituir en esta ecuación se dan en las columnas (4) y (6) de la Tabla A-2, suponiendo que las traslaciones verticales Δ_1 y Δ_2 en los puntos C y E se van a encontrar. Los cálculos se convierten como sigue:

$$\Delta_1 = \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{d} \int_0^L (L - x)dx = \frac{\alpha(T_1 - T_2)L^2}{2d}$$

$$\Delta_2 = \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{d} \int_0^{2L} (2L - x)dx = \frac{2\alpha(T_1 - T_2)L^2}{d}$$

Estos resultados muestran que si T_1 es mayor que T_2 , la viga se deforma hacia arriba.

Los ejemplos anteriores ilustran la determinación de desplazamientos de traslación en armaduras y vigas debidos a varias causas. Otros tipos de estructuras se pueden analizar en una forma análoga. También, técnicas que son similares a las ilustradas se pueden emplear para encontrar rotaciones en un punto (la carga unitaria correspondiente a una rotación es un par unitario), así como también para obtener desplazamientos debidos a deformaciones por cortante y por torsión, todas las cuales se incluyen en la Ec. (A-30).

A.3. Desplazamientos de vigas. En muchos de los problemas y ejemplos dados en los Caps. 1, 2 y 3 es necesario determinar desplazamientos de vigas. Tales desplazamientos se pueden encontrar en todos los casos por el método de la carga unitaria, aun cuando otros métodos estándar (incluyendo la integración de la ecuación diferencial para desplazamientos de una viga y el método del momento área) pueden también ser convenientes. En la mayoría de los ejemplos, sin embargo, los desplazamientos deseados se pueden obtener con la ayuda de las fórmulas dadas en la Tabla A-3 para vigas prismáticas.

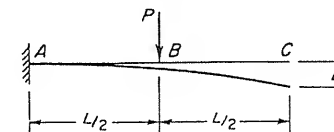


FIG. A-9

Como una ilustración del uso de las fórmulas, considérese una viga en voladizo con EI constante que está sujeta a una carga concentrada P en su punto medio (Fig. A-9). El desplazamiento Δ en el extremo de la viga se puede obtener rápidamente haciendo la siguiente observación: el desplazamiento Δ es igual al desplazamiento en B más la distancia de B a C multiplicada por la rotación en B . Por lo tanto, empleando el Caso 7 en la Tabla A-3, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Delta = \Delta_B + \theta_B \frac{L}{2} = P \left(\frac{L}{2} \right)^3 \frac{1}{3EI} + P \left(\frac{L}{2} \right)^2 \frac{1}{2EI} \frac{L}{2} = \frac{5PL^3}{48EI}$$

Las técnicas de esta clase pueden ser muy útiles para encontrar desplazamientos en vigas y marcos planos.

APENDICE B

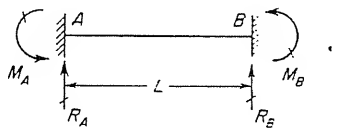
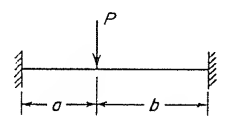
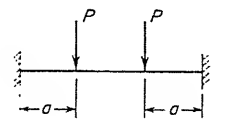
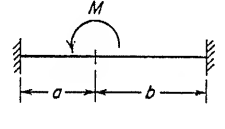
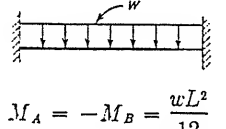
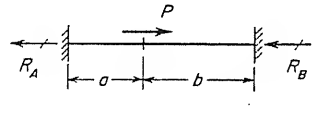
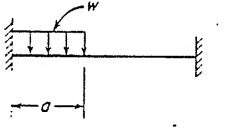
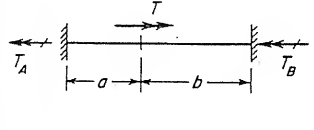
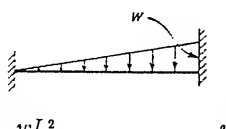
ACCIONES DE EXTREMO PARA MIEMBROS RESTRINGIDOS

Un miembro restringido es aquel cuyos extremos están restringidos contra desplazamiento (translación y rotación), como en el caso de una viga doblemente empotrada. Las acciones de extremo para un miembro restringido son las acciones de reacción (fuerzas y pares) desarrolladas en los extremos cuando el miembro está sujeto a cargas, cambios de temperatura u otros efectos. Los miembros restringidos se encuentran en el método de análisis de la rigidez (véase el Art. 2.8) y también en la determinación de cargas equivalentes de nudo (véanse los Arts. 3.2 y 4.5).

En este apéndice se dan fórmulas para acciones de extremo en miembros restringidos debidas a varias causas. Se supone en cada caso que el miembro es prismático.

La Tabla B-1 da acciones de extremo en vigas empotradas que están sujetas a varias condiciones de carga. Como se muestra en la figura en la parte superior de la tabla, la longitud de la viga es L , los momentos reactivos a los extremos izquierdo y derecho se indican por M_A y M_B , respectivamente, y las fuerzas reactivas se indican por R_A y R_B , también en forma respectiva. Los momentos son positivos cuando son en el sentido de las manecillas del reloj; las fuerzas son positivas cuando son hacia arriba. Se dan fórmulas para estas cantidades en los Casos 1, 2, 5, 6, 7 y 8. Sin embargo, los Casos 3 y 4 difieren ligeramente debido a la naturaleza especial de las cargas. En el Caso 3 la carga es una fuerza axial P y, por lo tanto, las únicas reacciones son las dos fuerzas axiales mostradas en la figura. En el Caso 4 la carga es un par de torsión T , el cual produce reacciones únicamente en forma de pares de torsión.

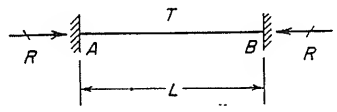
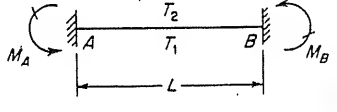
Todas las fórmulas dadas en la Tabla B-1 se pueden deducir por métodos estándar de mecánica de materiales. Por ejemplo, muchas de las fórmulas para vigas se pueden obtener integrando la ecuación diferencial para flexión de una viga. El método de la flexibilidad, según se describió en el Art. 2.2, también se puede emplear para obtener las fórmulas. Además, los casos más complicados de carga fre-

	
<p>1</p>  $M_A = \frac{Pab^2}{L^2} \quad M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$ $R_A = \frac{Pb^2}{L^3}(3a+b) \quad R_B = \frac{Pa^2}{L^3}(a+3b)$	<p>5</p>  $M_A = -M_B = \frac{Pa}{L}(L-a)$ $R_A = R_B = P$
<p>2</p>  $M_A = \frac{Mb}{L^2}(2a-b)$ $M_B = \frac{Ma}{L^2}(2b-a)$ $R_A = -R_B = \frac{6Mab}{L^3}$	<p>6</p>  $M_A = -M_B = \frac{wL^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{wL}{2}$
<p>3</p>  $R_A = \frac{Pb}{L} \quad R_B = \frac{Pa}{L}$	<p>7</p>  $M_A = \frac{wa^2}{12L^2}(6L^2 - 8aL + 3a^2)$ $M_B = -\frac{wa^3}{12L^2}(4L - 3a)$ $R_A = \frac{wa}{2L^3}(2L^3 - 2a^2L + a^3)$ $R_B = \frac{wa^3}{2L^3}(2L - a)$
<p>4</p>  $T_A = \frac{Tb}{L} \quad T_B = \frac{Ta}{L}$	<p>8</p>  $M_A = \frac{wL^2}{30} \quad M_B = -\frac{wL^2}{20}$ $R_A = \frac{3wL}{20} \quad R_B = \frac{7wL}{20}$

cuentemente se pueden obtener de los casos más sencillos empleando el principio de superposición.*

Las acciones de empotramiento debidas a cambios de temperatura se enumeran en la Tabla B-2. El Caso 1 de esta tabla es para una viga sujeta a un aumento uniforme de temperatura de T grados. Las acciones de extremo resultantes consisten de fuerzas axiales de compresión que son independientes de la longitud del miembro. El segundo caso es una viga sujeta a una diferencia de temperatura tal que la parte superior de la viga está a una temperatura T_2 , mientras que la parte inferior está a una temperatura T_1 . La temperatura en el eje centroidal se supone que permanece sin cambio, por lo cual no hay tendencia a que la viga cambie de longitud. En este caso las acciones de extremo consisten únicamente en momentos.

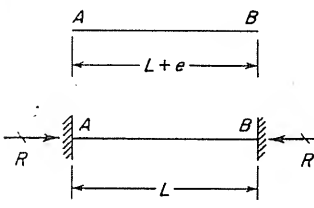
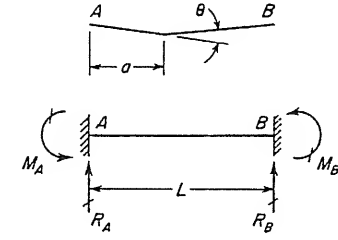
TABLA B-2. ACCIONES DE EMPOTRAMIENTO PRODUCIDAS POR CAMBIOS DE TEMPERATURA

<p>1</p> <p>Aumento uniforme en temperatura</p>  $R = EA\alpha T$ <p>E = módulo de elasticidad A = área de la sección transversal α = coeficiente de expansión térmica T = aumento de temperatura</p>	<p>2</p> <p>Diferencia de temperatura</p>  $M_A = -M_B = \frac{\alpha EI(T_1 - T_2)}{d}$ <p>I = momento de inercia T_1 = temperatura en la parte inferior T_2 = temperatura en la parte superior de la viga d = peralte de la viga</p>
--	--

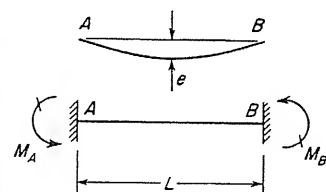
La Tabla B-3 muestra las acciones de empotramiento debidas a deformaciones previas en miembros. Una deformación previa es una deformación inicial en un miembro, que produce que las acciones de extremo se desarrollen cuando los extremos del miembro están sujetos en las posiciones de restricción. El ejemplo más simple de deformación previa se muestra en el Caso 1, donde se supone que el miembro AB tiene una longitud inicial que es mayor que la distancia

* Una tabla más extensa para acciones de empotramiento producidas por cargas, se da en *Moment Distribution*, por J. M. Gere, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J., 1963. También se incluyen fórmulas y gráficas para acciones de empotramiento en miembros no prismáticos.

TABLA B-3. ACCIONES DE EMPOTRAMIENTO PRODUCIDAS POR DEFORMACIONES PREVIAS

1	Barra con exceso de longitud	2	Barra con un quiebre
			
$R = \frac{EAe}{L}$ <p> E = módulo de elasticidad A = área de la sección transversal e = exceso de longitud </p>		$M_A = \frac{2EI\theta}{L^2} (2L - 3a)$ $M_B = \frac{2EI\theta}{L^2} (L - 3a)$ $R_A = -R_B = \frac{6EI\theta}{L^3} (L - 2a)$ <p> I = momento de inercia θ = ángulo del quiebre </p>	

3 Curvatura circular inicial



$$M_A = -M_B = \frac{8EIe}{L^2}$$

e = deflexión inicial en el centro de la barra

TABLA B-4. ACCIONES DE EMPOTRAMIENTO PRODUCIDAS POR DESPLAZAMIENTOS DE EXTREMO

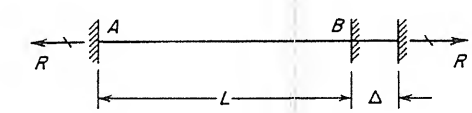
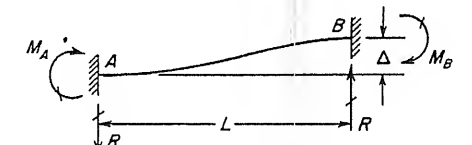
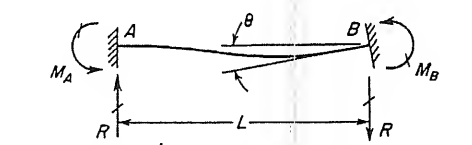
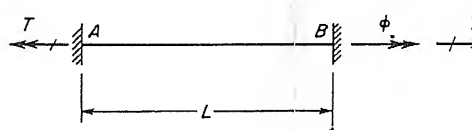
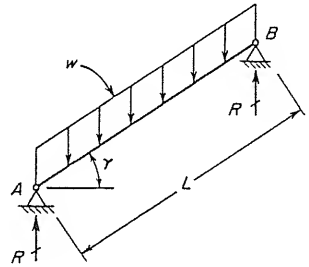
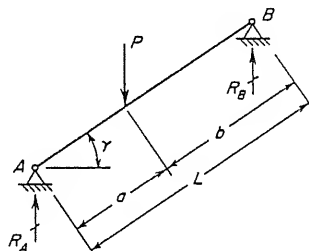
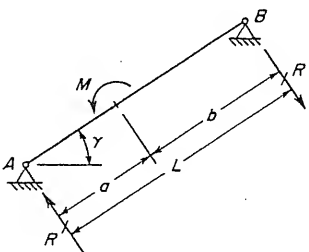
1	
	
$R = \frac{EA\Delta}{L}$	
2	
	
$M_A = M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad R = \frac{12EI\Delta}{L^3}$	
3	
	
$M_A = \frac{2EI\theta}{L} \quad M_B = \frac{4EI\theta}{L} \quad R = \frac{6EI\theta}{L^2}$	
4	
	
$T = \frac{GJ\phi}{L}$ <p> G = módulo de elasticidad al cortante J = constante de torsión </p>	

TABLA B-5. ACCIONES DE EXTREMO PARA MIEMBROS DE ARMADURAS

1	 $R = \frac{wL}{2}$
2	 $R_A = \frac{Pb}{L}$ $R_B = \frac{Pa}{L}$
3	 $R = \frac{M}{L}$

entre apoyos en una pequeña cantidad e . Cuando los extremos del miembro están sujetos a sus posiciones finales, el miembro se habrá acortado en una distancia e . Las acciones de empotramiento resultantes son las fuerzas axiales de compresión mostradas en la tabla. El Caso 2 es un miembro con una flexión inicial en el mismo. El último caso es un miembro que tiene una curvatura circular inicial tal que la deflexión en el centro de la viga es igual a la pequeña distancia e .

La Tabla B-4 enumera fórmulas para acciones de empotramiento producidas por desplazamientos de uno de los extremos del miembro. Los Casos 1 y 2 son para traslaciones axial y lateral en el extremo B del miembro a través de una pequeña distancia Δ , mientras que los Casos 3 y 4 son para rotaciones. La rotación a través del ángulo θ , mostrada en el Caso 3, produce flexión en el miembro, mientras que la rotación a través del ángulo ϕ en el Caso 4 produce torsión. Las fórmulas para la constante de torsión J , la cual aparece en las fórmulas del Caso 4, se dan en el Apéndice C para varias formas de sección transversal.

Las acciones de extremo para miembros de armaduras se enumeran en la Tabla B-5 para tres casos de carga: una carga uniforme, una carga concentrada y un par. Los miembros mostrados en las figuras tienen extremos articulados que están restringidos contra traslación, pero no contra rotación, debido a que únicamente las traslaciones de nudo son de interés en el análisis de una armadura. Los miembros se muestran inclinados en ángulo γ respecto del horizontal, a fin de tener una orientación general. Sin embargo, las acciones de extremo son independientes del ángulo de inclinación, el cual puede tener cualquier valor (incluyendo 0 y 90 grados). Para la carga uniforme y concentrada (Casos 1 y 2) las reacciones son paralelas a la línea de acción de la carga, mientras que en el Caso 3 las reacciones son perpendiculares al eje del miembro.

Si un miembro de una armadura está sujeto a un aumento uniforme de temperatura, el Caso 1 de la Tabla B-2 se puede usar; si está sujeto a una deformación previa consistente en un aumento de longitud, se puede usar el Caso 1 de la Tabla B-3; si está sujeto a un desplazamiento en la dirección de su eje, se puede emplear el Caso 1 de la Tabla B-4.

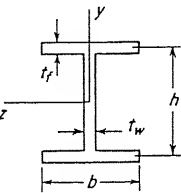
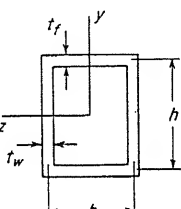
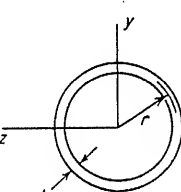
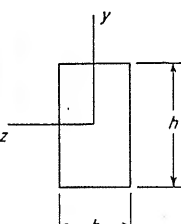
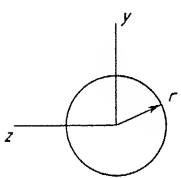
APENDICE C

PROPIEDADES DE SECCIONES

Símbolos en la Tabla

- I_z = momento de inercia de la sección transversal respecto del eje z
- I_y = momento de inercia de la sección transversal respecto del eje y
- A = área de la sección transversal
- J = constante de torsión
- f = factor de forma para cortante

APENDICE C. PROPIEDADES DE SECCIONES

	$I_z \approx \frac{h^2}{12} (ht_w + 6bt_f) \quad A \approx ht_w + 2bt_f$ $I_y \approx \frac{b^3 t_f}{6} \quad J \approx \frac{1}{3} (ht_w^3 + 2bt_f^3)$ $f = \frac{A}{ht_w}$
	$I_z \approx \frac{h^2}{6} (ht_w + 3bt_f) \quad A = 2(bt_f + ht_w)$ $I_y \approx \frac{b^2}{6} (bt_f + 3ht_w) \quad J \approx 2b^2 h^2 \frac{t_f t_w}{bt_w + ht_f}$ $f = \frac{A}{2ht_w}$
	$I_z = I_y \approx \pi r^3 t \quad J \approx 2\pi r^3 t$ $A \approx 2\pi r t \quad f = 2$
	$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad J = \beta hb^3$ $I_y = \frac{hb^3}{12} \quad \beta \approx \frac{1}{3} - 0.21 \frac{b}{h} \left(1 - \frac{b^4}{12h^4} \right)$ $A = bh \quad f = \frac{6}{5}$
	$I_z = I_y = \frac{\pi r^4}{4} \quad J = \frac{\pi r^4}{2}$ $A = \pi r^2 \quad f = \frac{10}{9}$

RESPUESTAS A PROBLEMAS

CAPITULO 1

- 1.4-1 El aumento en la longitud de la barra. 1.4-2 Una fuerza horizontal que actúa a la derecha en el nudo C, y un par en el sentido de las manecillas del reloj que actúa en el nudo C.
- 1.4-3 $D_{11} = \frac{A_1 L^3}{48EI}$ $D_{12} = \frac{A_2 L^2}{16EI}$ $D_1 = D_{11} + D_{12}$
- 1.4-4 $D_{11} = D_{31} = \frac{A_1 L}{2EI}$ $D_{21} = \frac{3A_1 L^2}{8EI}$
- 1.4-5 $D_{11} = \frac{A_1 L}{3EI}$ $D_{23} = -\frac{A_3 L^3}{32EI}$ $D_{33} = \frac{A_3 L^3}{8EI}$
- 1.4-6 $D_{11} = 4.83 \frac{A_1 L}{EA}$ $D_{12} = D_{22} = 3.41 \frac{A_2 L}{EA}$ $D_{21} = 3.41 \frac{A_1 L}{EA}$
- 1.7-1 (a) 3 (b) 2 (c) 3 (d) 2
- 1.7-2 (a) 2 (b) 7 (c) 4
- 1.7-3 (a) 1 (b) 5
- 1.7-4 10
- 1.7-5 (a) 3 (b) 9 (c) 3 (b) 6 (a) 1 (b) 8 (c) 5 (a) 8 (b) 16
- 1.7-9 (a) 0 (b) 9 (a) 3 (b) 6 (a) 21 (b) 12 (a) 30 (b) 36 (c) 25

CAPITULO 2

- 2.3-1 $Q_1 = \frac{PL}{8} - \frac{M}{4}$ $Q_2 = \frac{PL}{8} + \frac{M}{4}$
- 2.3-2 $Q_1 = -\frac{31}{56} PL$ $Q_2 = \frac{5PL}{14}$ 2.3-3 $Q_1 = -\frac{96sEI}{7L^3}$ $Q_2 = \frac{30sEI}{7L^3}$
- 2.3-4 $Q_1 = \frac{3PL}{28}$ $Q_2 = \frac{17P}{14}$ 2.3-5 $Q_1 = -\frac{5wL^2}{608}$ $Q_2 = -\frac{33wL^2}{152}$
- 2.3-6 $Q_1 = -\frac{wL^2}{24}$ $Q_2 = -\frac{wL^2}{12}$ 2.3-7 $Q_1 = -0.243P$ $Q_2 = 0$
- 2.3-8 $Q_1 = -0.243P$ $Q_2 = 0.172P$
- 2.3-9 $Q_1 = 0.0267P$ $Q_2 = 0.4698P$
- 2.3-10 $Q_1 = 456.6 \text{ lb}$ $Q_2 = 83.96 \text{ lb}$
- 2.3-11 $Q_1 = -0.3 \text{ k}$ $Q_2 = 2.1 \text{ k}$ $Q_3 = -28.8 \text{ plg-k}$
- 2.3-12 $F_{11} = \frac{L}{EA} + \frac{H^3}{3EI} + \frac{fH}{GA}$ $F_{22} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{fL}{GA} + \frac{H}{EA}$
- Otros términos en **F** son los mismos que en la Ec. (a) del Ej. 4, Art. 2.3.
- 2.3-13 (a) $F_{11} = \frac{2L^3}{3EI}$ $F_{12} = F_{23} = 0$ $F_{13} = -\frac{L^2}{EI}$ $F_{22} = \frac{8L^3}{3EI}$
- $F_{33} = \frac{4L}{EI}$

$$(b) F_{11} = \frac{2L^3}{3EI} + \frac{2L}{EA} + \frac{2fL}{GA} \quad F_{12} = F_{23} = 0 \quad F_{13} = -\frac{L^2}{EI}$$

$$F_{22} = \frac{8L^3}{3EI} + \frac{2L}{EA} + \frac{2fL}{GA} \quad F_{33} = \frac{4L}{EI}$$

$$2.3-14 \quad F_{11} = \frac{8L^3}{3EI} \quad F_{12} = \frac{3L^2}{EI} \quad F_{13} = \frac{3L^2}{EI} \quad F_{22} = \frac{20L^3}{3EI} \quad F_{23} = \frac{4L^2}{EI}$$

$$F_{33} = \frac{4L}{EI} \quad 2.3-15 \quad Q_1 = -\frac{P}{16} \quad Q_2 = \frac{11P}{16}$$

$$2.3-16 \quad Q_1 = -6.24 \text{ k} \quad Q_2 = 5.06 \text{ k} \quad Q_3 = 49.7 \text{ pies-k}$$

$$2.3-17 \quad F_{11} = \frac{2L^3}{3EI} + \frac{L^3}{GJ} \quad F_{12} = \frac{L^2}{2EI} + \frac{L^2}{GJ} \quad F_{13} = \frac{L^2}{2EI}$$

$$F_{22} = F_{33} = \frac{L}{EI} + \frac{L}{GJ} \quad F_{23} = 0 \quad 2.3-18 \quad Q_1 = \frac{3P}{16} \frac{1}{2+3\rho}; \rho = \frac{EI}{GJ}$$

$$2.3-19 \quad Q_1 = -5500 \text{ plg-lb} \quad Q_2 = 529.4 \text{ plg-lb}$$

$$2.3-20 \quad Q_1 = -8436 \text{ plg-lb} \quad Q_2 = 1974 \text{ plg-lb}$$

$$2.3-21 \quad F_{11} = F_{33} = \frac{2L^3}{3EI} + \frac{2L}{EA} \quad F_{12} = 0 \quad F_{13} = -\frac{L}{EA}$$

$$F_{22} = \frac{4L^3}{3EI} + \frac{2L}{EA} \quad F_{23} = \frac{2L^3}{3EI} + \frac{L}{EA}$$

$$2.3-22 \quad D_{QL1} = -\frac{PL^3}{2EI} \quad D_{QL2} = -\frac{PL^3}{3EI} \quad D_{QL3} = 0 \quad F_{11} = \frac{8L^3}{3EI} + \frac{L^3}{GJ}$$

$$F_{12} = -F_{13} = \frac{L^3}{2EI} \quad F_{22} = \frac{2L^3}{3EI} + \frac{L^3}{GJ} \quad F_{23} = \frac{L^3}{2EI} + \frac{L^3}{GJ}$$

$$F_{33} = \frac{5L^3}{3EI} + \frac{L^3}{GJ} \quad 2.4-1 \quad Q_1 = 0 \quad Q_2 = \frac{\alpha EI(T_1 - T_2)}{d}$$

$$2.4-2 \quad D_{QT2} = 2D_{QT1} = \frac{\alpha L(T_1 - T_2)}{d} \quad 2.4-3 \quad D_{QT1} = \alpha LT \quad D_{QT2} = 0$$

$$2.4-4 \quad Q_1 = 0 \quad Q_2 = -\frac{\beta EI}{L} \quad 2.4-5 \quad D_{QP1} = 0 \quad D_{QP2} = -e\sqrt{2}$$

$$2.4-6 \quad Q_1 = -\frac{12EIs}{L^3} + \frac{6EI\beta}{L^2} \quad Q_2 = -\frac{6EIs}{L^2} + \frac{2EI\beta}{L}$$

$$2.4-7 \quad D_{QR1} = -s \quad D_{QR2} = 0$$

$$2.4-8 \quad D_{QR1} = -\frac{2s_1}{L} + \frac{s_2}{L} \quad D_{QR2} = \frac{s_1}{L} - \frac{2s_2}{L}$$

$$2.4-9 \quad D_{QS1} = \alpha LT - \beta H \quad D_{QS2} = -\frac{5PL^3}{48EI} - \alpha LT - s$$

$$D_{QS3} = -\frac{PL^2}{8EI} + \beta$$

$$2.5-1 \quad D_J = \frac{PL^2}{720EI} \begin{bmatrix} -16 \\ 2 \\ -7 \\ 26 \end{bmatrix} \quad A_R = \frac{P}{120} \begin{bmatrix} 46 \\ 129 \\ 144 \\ 41 \end{bmatrix}$$

$$2.5-2 \quad D_J = \frac{PL}{EA} \begin{bmatrix} -1.172 \\ -1.828 \end{bmatrix} \quad A_M = P \begin{bmatrix} 1.172 \\ -1.828 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A_R = P \begin{bmatrix} -0.1716 \\ 1.828 \end{bmatrix}$$

$$2.5-3 \quad D_{J1} = -0.000438 \text{ plg} \quad D_{J2} = -0.00193 \text{ plg} \\ D_{J3} = 0.000532 \text{ radianes} \quad A_{R1} = -0.913 \text{ k} \quad A_{R2} = 4.03 \text{ k} \\ A_{R3} = 43.6 \text{ plg-k}$$

$$2.9-1 \quad A_{R1} = \frac{5wL}{8} \quad A_{R2} = \frac{wL^2}{8} \quad A_{R3} = \frac{3wL}{8}$$

$$2.9-2 \quad A_{M1} = \frac{11P}{16} \quad A_{M2} = \frac{3PL}{16} \quad A_{M3} = \frac{5P}{16}$$

$$2.9-3 \quad A_{R1} = 2P \quad A_{R2} = \frac{13PL}{18} \quad A_{R3} = \frac{5PL}{18}$$

$$2.9-4 \quad A_{M1} = \frac{13P}{8} \quad A_{M2} = \frac{PL}{2} \quad A_{M3} = \frac{P}{4} \quad A_{M4} = \frac{3PL}{8} \quad A_{R1} = -\frac{3P}{8}$$

$$A_{R2} = -\frac{P}{4}$$

$$2.9-5 \quad A_{M1} = \frac{P}{3} \quad A_{M2} = \frac{5PL}{72} \quad A_{R1} = P \quad A_{R2} = \frac{7PL}{72}$$

$$2.9-6 \quad A_{M1} = \frac{37P}{60} \quad A_{M2} = \frac{59PL}{360} \quad A_{M3} = \frac{23P}{60} \quad A_{M4} = -\frac{17PL}{360}$$

$$A_{R1} = \frac{49P}{120} \quad A_{R2} = \frac{23P}{60}$$

$$2.9-7 \quad A_{M1} = \frac{PL}{72} \quad A_{M2} = -A_{M3} = -\frac{25PL}{72} \quad A_{M4} = \frac{5PL}{18} \quad A_{M5} = \frac{13PL}{18}$$

$$A_{M6} = \frac{17PL}{72} \quad A_{R1} = \frac{127P}{48} \quad A_{R2} = \frac{79P}{48}$$

$$2.9-8 \quad S_{11} = S_{44} = \frac{4EI}{L} \quad S_{12} = S_{34} = \frac{2EI}{L} \quad S_{22} = S_{33} = \frac{6EI}{L} \quad S_{23} = \frac{EI}{L}$$

$$S_{13} = S_{14} = S_{24} = 0$$

$$2.9-9 \quad S_{22} = 2S_{11} = \frac{8EI}{L} \quad S_{12} = S_{23} = \frac{2EI}{L} \quad S_{33} = 5S_{34} = \frac{20EI}{3L}$$

$$S_{44} = \frac{8EI}{3L} \quad S_{13} = S_{14} = S_{24} = 0$$

$$2.9-10 \quad S_{11} = S_{66} = \frac{4EI}{L} \quad S_{22} = S_{33} = S_{44} = S_{55} = \frac{8EI}{L}$$

$$S_{12} = S_{23} = S_{34} = S_{45} = S_{56} = \frac{2EI}{L}$$

$$2.9-11 \quad S_{11} = S_{44} = \frac{8EI}{L} \quad S_{24} = 2S_{12} = \frac{4EI}{L} \quad S_{22} = \frac{12EI}{L}$$

$$S_{23} = S_{34} = -\frac{24EI}{L^2} \quad S_{33} = \frac{96EI}{L^3}$$

$$2.9-12 \quad S_{11} = S_{44} = \frac{12EI}{L^3} \quad S_{22} = S_{33} = \frac{12EI}{L} \quad S_{12} = -S_{34} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$S_{23} = \frac{4EI}{L}$$

$$2.9-13 \quad S_{11} = S_{55} = 2S_{12} = 2S_{45} = 166\,667 \text{ plg-k} \quad S_{22} = 291\,667 \text{ plg-k} \\ S_{23} = 62\,500 \text{ plg-k} \quad S_{33} = 275\,000 \text{ plg-k} \quad S_{34} = 75\,000 \text{ plg-k} \\ S_{44} = 316\,667 \text{ plg-k}$$

$$2.9-14 \quad A_{R1} = \frac{19P}{22} \quad A_{R2} = \frac{79PL}{264} \quad A_{R3} = \frac{3P}{22} \quad A_{R4} = -\frac{19PL}{264}$$

$$2.9-15 \quad A_{M1} = \frac{P}{2} \quad A_{M2} = 0.433P \quad A_{M3} = \frac{P}{4}$$

$$2.9-16 \quad A_{M1} = A_{M3} = 0.293P \quad A_{M2} = 2A_{M1}$$

$$2.9-17 \quad A_{M1} = A_{M3} = 0.293P - 0.060wL \quad A_{M2} = 0.586P - 0.621wL$$

$$\begin{aligned} 2.9-18 \quad & A_{M1} = P \quad A_{M2} = 0.586P \quad A_{M3} = -0.414P \\ 2.9-19 \quad & A_{M1} = -A_{M5} = 0.236P \quad A_{M2} = 5A_{M4} = 0.417P \quad A_{M3} = 0.354P \\ 2.9-20 \quad & A_{R1} = 0.446wL \quad A_{R2} = 2.153wL \quad A_{R3} = 2.968wL \\ & A_{R4} = -0.446wL \quad A_{R5} = 0 \quad A_{R6} = 1.707wL \end{aligned}$$

$$2.9-21 \quad S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 1.354 \frac{EA}{L} \quad S_{12} = -S_{34} = -0.354 \frac{EA}{L}$$

$$S_{24} = -\frac{EA}{L}$$

$$2.9-22 \quad S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 1.354 \frac{EA}{L} \quad S_{14} = -S_{13} = -S_{34} = 0.354 \frac{EA}{L}$$

$$2.9-23 \quad S_{11} = S_{33} = S_{44} = S_{66} = S_{88} = \frac{253}{500} \frac{EA}{L} \quad S_{22} = S_{77} = \frac{233}{375} \frac{EA}{L}$$

$$S_{55} = S_{99} = \frac{179}{375} \frac{EA}{L} \quad S_{13} = S_{46} = S_{68} = -\frac{EA}{4L}$$

$$S_{14} = S_{18} = S_{36} = -\frac{32}{125} \frac{EA}{L}$$

$$S_{15} = -S_{19} = S_{24} = -S_{28} = -S_{37} = -S_{45} = S_{89} = -\frac{24}{125} \frac{EA}{L}$$

$$S_{25} = S_{29} = -\frac{18}{125} \frac{EA}{L} \quad S_{27} = -\frac{EA}{3L}$$

$$2.9-24 \quad A_M = \frac{M}{4L} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2L \end{bmatrix} \quad A_R = \frac{M}{4L} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -L \end{bmatrix}$$

$$2.9-25 \quad A_{R1} = \frac{27P}{448} \quad A_{R2} = \frac{31P}{56} \quad A_{R3} = \frac{PL}{7} \quad A_{R4} = -\frac{27P}{224} \quad A_{R5} = \frac{3P}{2}$$

$$A_{R6} = \frac{3PL}{112} \quad 2.9-26 \quad A_M = \frac{wL}{28} \begin{bmatrix} -45 \\ 40 \\ 26L \end{bmatrix} \quad A_R = \frac{3wL}{28} \begin{bmatrix} 15 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$2.9-27 \quad A_{R1} = 0.36 \text{ k} \quad A_{R2} = 3.34 \text{ k} \quad A_{R3} = 249.6 \text{ plg-k} \quad A_{R4} = -0.72 \text{ k}$$

$$A_{R5} = 8.96 \text{ k} \quad A_{R6} = 46.3 \text{ plg-k}$$

$$2.9-28 \quad A_{R1} = -6.24 \text{ k} \quad A_{R2} = 5.06 \text{ k} \quad A_{R3} = 49.7 \text{ pies-k}$$

$$2.9-29 \quad (a) \quad S_{11} = \frac{24EI}{L^3} \quad S_{12} = S_{13} = \frac{6EI}{L^2} \quad S_{22} = S_{33} = \frac{6EI}{L} \quad S_{23} = \frac{EI}{L}$$

$$(b) \quad S_{11} = S_{44} = \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{2L} \quad S_{22} = S_{55} = \frac{3EI}{2L^3} + \frac{EA}{L}$$

$$S_{13} = S_{46} = \frac{6EI}{L^2} \quad S_{14} = -\frac{EA}{2L}$$

$$S_{23} = S_{26} = -S_{35} = -S_{56} = \frac{3EI}{2L^2} \quad S_{25} = -\frac{3EI}{2L^3}$$

$$S_{33} = S_{66} = 6S_{36} = \frac{6EI}{L}$$

$$2.9-30 \quad S_{11} = S_{33} = S_{44} = \frac{4EI}{L} \quad S_{12} = S_{23} = S_{24} = \frac{2EI}{L} \quad S_{22} = \frac{12EI}{L}$$

$$2.9-31 \quad S_{22} = 2S_{11} = -2S_{12} = \frac{48EI_1}{H^3} \quad S_{33} = S_{44} = \frac{4EI_1}{H} + \frac{4EI_2}{L}$$

$$S_{55} = S_{66} = \frac{8EI_1}{H} + \frac{4EI_2}{L} \quad S_{13} = S_{14} = S_{15} = S_{16} =$$

$$= -S_{23} = -S_{24} = \frac{6EI_1}{H^2} \quad S_{34} = S_{56} = \frac{2EI_2}{L} \quad S_{35} = S_{46} = \frac{2EI_1}{H}$$

$$2.9-32 \quad A_{R1} = \frac{3P}{8} \frac{9 + 2\eta}{4 + \eta} \quad A_{R2} = -\frac{PL}{16} \frac{\eta(5 + 2\eta)}{(1 + \eta)(4 + \eta)}$$

$$A_{R3} = \frac{PL}{16} \frac{4\eta^2 + 23\eta + 22}{(1 + \eta)(4 + \eta)} \quad \eta = \frac{GJ}{EI}$$

$$2.9-33 \quad A_{M1} = \frac{P}{8} \frac{5 + 2\eta}{4 + \eta} \quad A_{M2} = -\frac{PL}{16} \frac{(2 + \eta)(5 + 2\eta)}{(1 + \eta)(4 + \eta)}$$

$$A_{M3} = \frac{3PL}{16} \frac{\eta}{(1 + \eta)(4 + \eta)}$$

$$2.9-34 \quad D = \frac{wL^3}{24EI(1 + \eta)} \begin{bmatrix} -L(3 + \eta) \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$2.9-35 \quad A_{R1} = \frac{P}{4} \frac{11 + 2\eta}{4 + \eta} \quad A_{R2} = 0 \quad A_{R3} = \frac{PL}{8} \frac{6 + \eta}{4 + \eta}$$

$$2.9-36 \quad S_{11} = S_{77} = \frac{4EI}{L} \quad S_{13} = S_{46} = S_{57} = \frac{2EI}{L}$$

$$S_{22} = -S_{24} = -S_{35} = -S_{68} = S_{88} = \frac{GJ}{L}$$

$$S_{33} = S_{44} = S_{55} = S_{66} = \frac{4EI}{L} + \frac{GJ}{L}$$

$$2.9-37 \quad S_{11} = -S_{14} = -S_{46} = S_{66} = \frac{GJ}{L} \quad S_{22} = S_{77} = \frac{4EI}{L}$$

$$S_{23} = -S_{34} = -S_{37} = -\frac{6EI}{L^2} \quad S_{25} = S_{57} = \frac{2EI}{L} \quad S_{33} = \frac{36EI}{L^3}$$

$$S_{44} = \frac{4EI}{L} + \frac{2GJ}{L} \quad S_{55} = \frac{8EI}{L} + \frac{GJ}{L}$$

$$2.10-1 \quad A_R = \frac{3\alpha EI(T_1 - T_2)}{7dL} \begin{bmatrix} 2 \\ 3L \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 2.10-2 \quad A_R = \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 11s_1 - 3s_2 \\ 6s_1L - s_2L \\ -16s_1 + 5s_2 \\ 5s_1 - 2s_2 \end{bmatrix}$$

$$2.10-3 \quad A_{M1} = \frac{EI\beta}{4L^2} \quad A_{M2} = \frac{EI\beta}{12L} \quad A_{M3} = \frac{4EI\beta}{9L^2} \quad A_{M4} = -\frac{EI\beta}{6L}$$

$$A_{R1} = \frac{7EI\beta}{36L^2} \quad A_{R2} = -\frac{61EI\beta}{36L^2}$$

$$2.10-4 \quad A_{M1} = 0 \quad A_{M2} = -\frac{\alpha EI(T_1 - T_2)}{d} \quad A_{R1} = A_{R3} = 0$$

$$A_{R2} = -A_{R4} = -A_{M2} \quad 2.10-5 \quad A_{R1} = 0 \quad A_{R2} = -A_{R3} = -\frac{EI\beta}{L}$$

$$2.10-6 \quad A_{DS1} = -\frac{PL}{8} - \frac{6EI\beta}{L^2} \quad A_{DS2} = \frac{PL}{12} + \frac{2EI\beta}{L} \quad A_{RS1} = \frac{P}{2} + \frac{12EI\beta}{L^3}$$

$$A_{RS2} = \frac{P}{2} + \frac{6EI\beta}{L^2}$$

$$2.10-7 \quad A_{M1} = A_{M4} = -0.1745EA\alpha T \quad A_{M2} = A_{M3} = 0.1277EA\alpha T$$

$$2.10-8 \quad A_{M1} = 2A_{M3} = \frac{\sqrt{3}EAe}{4L} \quad A_{M2} = -\frac{5EAe}{8L}$$

$$2.10-9 \quad A_{DS} = -EA \left(\frac{s}{L} + \sqrt{2} \alpha T \right) \quad A_{MS1} = A_{MS3} = -EA\alpha T$$

$$A_{MS2} = -\frac{EAs}{L}$$

$$2.10-10 \quad A_{DS1} = EA \left(\frac{s}{L} - 1.707\alpha T \right) \quad A_{DS2} = EA \left(\frac{e}{L} + 1.707\alpha T \right)$$

$$A_{DS3} = EA \left(0.354 \frac{s}{L} - 1.707\alpha T \right) \quad A_{DS4} = A_{DS3} - \frac{EAe}{L}$$

$$2.10-11 \quad A_{DS1} = A_{MS1} = -EA\alpha T \quad A_{DS2} = \frac{EA s_1}{L} + \frac{12EI s_2}{L^3}$$

$$A_{DS3} = \frac{\alpha EI(T_1 - T_2)}{d} - \frac{6EI s_2}{L^2} \quad A_{MS2} = \frac{12EI s_2}{L^3} \quad A_{MS3} = -\frac{6EI s_2}{L^2}$$

CAPITULO 3

$$3.3-1 \quad D_J = \frac{PL}{16EA} \{54, -9\} \quad 3.3-2 \quad D_J = \frac{L}{2EA} \begin{bmatrix} P_1 & 3.83P_2 \\ -5.83P_1 & -P_2 \end{bmatrix}$$

$$3.3-3 \quad D_J = -10^{-2} \{0.351, 10.61, 1.60\} \text{ pulgadas}$$

$$3.4-1 \quad D_J = \frac{1}{1152EI} \begin{bmatrix} -33wL^4 & 64PL^3 \\ 72wL^3 & -128PL^2 \end{bmatrix}$$

$$3.4-2 \quad D_J = -\frac{PL^2}{18EI} \{28L, 24, 58L, 33\}$$

$$3.4-3 \quad D_J = -\frac{PL^2}{18EI} \{4L(7 + 9\eta), 24, 2L(29 + 27\eta), 33\}$$

en donde $\eta = fEI/GAL^2$

$$3.5-1 \quad D_J = \frac{PL^3}{EI} \{-3.18, 4.18\}$$

$$3.5-2 \quad D_J = -\frac{PL^3}{48EI} (11 + 288\psi) \text{ en donde } \psi = I/AL^2$$

$$3.6-1 \quad D_J = \frac{L}{48EI} \{-3PL, 8M(2 + 3\rho), 3PL, -8M\} \text{ en donde } \rho = EI/GJ$$

$$3.9-1 \quad A_M = P \{0.396, 0.396, 0.396, -0.604, 0.854, -0.561\}$$

$$D_J = -\frac{PL}{EA} \{0.604, 2.311\}$$

$$3.9-2 \quad A_M = \{-14.14, -19.10, -28.28, 0.90, 12.86, -1.28, 20.90, 10, 10.90, 20\}$$

$$\text{kips} \quad 3.9-3 \quad A_M = P \{0.500, 0.433, 0.250\} \quad D_J = \frac{PL}{2EA}$$

$$3.9-4 \quad A_R = \frac{P}{264} \{228, 79L, 36, -19L\} \quad 3.9-5 \quad D_J = -\frac{5wL^3}{144EI}$$

$$3.9-6 \quad (A_M)_A = \{1.935 \text{ kips}, 15.56 \text{ plg-k}\} \quad D_J = 0.213 \text{ plg}$$

$$3.9-7 \quad A_R = \frac{5wL}{28} \{-9, 8, 3L\} \quad D_J = \frac{wL^3}{168EI} \{45, -19\}$$

$$3.9-8 \quad A_R = \frac{P}{16} \{1, 6, -1, 11\} \quad D_J = \frac{PL^2}{48EI}$$

$$3.9-9 \quad D_J = \frac{PL^2}{16EI(2 + 3\rho)} \{-1, 2 + 3\rho\} \text{ en donde } \rho = EI/GJ$$

CAPITULO 4

$$4.9-1 \quad D = \frac{PL^2}{384EI} \{7, -53\} \quad A_R = \frac{P}{576} \{351, 93L, 1049, 427, 765, -207L\}$$

$$A_{M1} = \frac{P}{192} \{117, 31L, 75, -10L\} \quad A_{M2} = \frac{P}{288} \{124, 15L, 308, -153L\}$$

$$A_{M3} = \frac{P}{192} \{-63, -90L, 255, -69L\}$$

$$4.9-2 \quad D = -\frac{PL^2}{240EI} \{6, 13L\} \quad A_R = \frac{P}{240} \{204, 48L, 516, 36L\}$$

$$A_{M1} = \frac{P}{240} \{204, 48L, 276, -84L\} \quad A_{M2} = \frac{P}{240} \{240, 84L, 0, 36L\}$$

$$4.9-3 \quad D = \frac{PL^2}{144EI} \{-8, 23\} \quad A_R = \frac{P}{144} \{24, 2L, 381, 237, -66, 34L\}$$

$$A_{M1} = \frac{P}{72} \{12, L, 60, -25L\} \quad A_{M2} = \frac{P}{144} \{117, 50L, 27, 40L\}$$

$$A_{M3} = \frac{P}{72} \{105, 52L, -33, 17L\}$$

$$4.9-4 \quad D = \frac{PL^2}{528EI} \{-7L, 2\} \quad A_R = \frac{P}{264} \{228, 79L, 36, -19L\}$$

$$A_{M1} = \frac{P}{264} \{228, 79L, 36, 17L\} \quad A_{M2} = \frac{P}{264} \{-36, -17L, 36, -19L\}$$

$$4.9-5 \quad D = -\frac{wL^3}{384EI} \{16, 15L, 36\} \quad A_R = \frac{wL}{4} \{1, 0, 6\}$$

$$A_{M1} = \frac{wL}{4} \{1, 0, 3, -L\} \quad A_{M2} = \frac{wL}{4} \{3, L, -1, 0\}$$

$$4.9-6 \quad D = \frac{PL^2}{416EI} \{109, -36, 9\} \quad A_R = \frac{P}{416} \{646, 24, 1464, 362, -86L\}$$

$$A_{M1} = \frac{P}{416} \{646, 416L, -230, 22L\}$$

$$A_{M2} = \frac{P}{416} \{254, -22L, 578, -140L\}$$

$$A_{M3} = \frac{P}{416} \{470, 140L, 362, -86L\}$$

$$4.9-7 \quad D = \frac{PL^2}{2448EI} \{387L, 279, -819\}$$

$$A_R = \frac{P}{1224} \{702, -1152L, -3159, 3681, -1125L\}$$

$$A_{M1} = \frac{P}{612} \{351, -576L, -351, -297L\}$$

$$A_{M2} = \frac{P}{612} \{-261, 297L, -963, 54L\}$$

$$A_{M3} = \frac{P}{1224} \{-1233, -1332L, 3681, -1125L\}$$

$$4.9-8 \quad \text{Elementos no cero de } S_j \text{ rearmada después de factorizar } \frac{EI}{2L^3}:$$

$$S_{J11} = 2S_{J12} = \frac{2}{3}S_{J22} = 4S_{J23} = \frac{2}{3}S_{J33} = 2S_{J34} = S_{J44} = 8L^2$$

$$S_{J15} = -S_{J16} = S_{J25} = -\frac{4}{3}S_{J26} = -4S_{J27} = 4S_{J36} = \frac{4}{3}S_{J37}$$

$$= -S_{J38} = S_{J47} = -S_{J48} = 12L$$

$$S_{J55} = -S_{J56} = \frac{8}{3}S_{J66} = -8S_{J67} = \frac{8}{3}S_{J77} = -S_{J78} = S_{J88} = 24$$

$$4.9-9 \quad \text{Elementos no cero de } S_j \text{ rearmada después de factorizar } \frac{EI}{L^3}:$$

$$S_{J11} = 4S_{J12} = 4S_{J16} = \frac{2}{3}S_{J22} = 2S_{J24} = S_{J44} = 2S_{J66} = 8L^2$$

$$S_{J15} = -S_{J18} = -\frac{1}{4}S_{J23} = S_{J27} = \frac{1}{4}S_{J28} = -\frac{1}{4}S_{J34} = \frac{1}{4}S_{J48}$$

$$= S_{J56} = -S_{J67} = 6L$$

$$\frac{1}{6}S_{J33} = -\frac{1}{6}S_{J38} = S_{J55} = -S_{J57} = \frac{1}{2}S_{J77} = -S_{J78} = \frac{1}{6}S_{J88} = 12$$

4.9-10 Elementos no cero de S_i rearmada después de factorizar $\frac{EI}{L^3}$:

$$\begin{aligned} S_{J11} &= -S_{J16} = S_{J44} = -S_{J47} = \frac{1}{3}S_{J68} = -\frac{1}{2}S_{J67} = \frac{1}{3}S_{J77} = 12 \\ S_{J12} &= S_{J15} = S_{J26} = -\frac{1}{2}S_{J27} = -S_{J34} = \frac{1}{2}S_{J38} \\ &= -S_{J37} = -S_{J48} = -S_{J56} = S_{J78} = 6L \\ S_{J22} &= 3S_{J23} = 6S_{J25} = S_{J33} = 6S_{J38} = 3S_{J55} = 3S_{J88} = 12L^2 \end{aligned}$$

4.9-11 Elementos no cero de S_i rearmada después de factorizar $\frac{EI}{L^3}$:

$$\begin{aligned} S_{J11} &= 2S_{J12} = \frac{1}{2}S_{J22} = 2S_{J23} = \frac{1}{2}S_{J33} = 2S_{J34} = \frac{1}{2}S_{J44} = 2S_{J45} = S_{J55} = 4L^2 \\ S_{J16} &= -S_{J17} = S_{J26} = -S_{J28} = S_{J37} = -S_{J39} = S_{J48} \\ &= -S_{J40} = S_{J59} = -S_{J510} = 6L \\ S_{J66} &= -S_{J67} = \frac{1}{2}S_{J77} = -S_{J78} = \frac{1}{2}S_{J88} = -S_{J89} = \frac{1}{2}S_{J99} \\ &= -S_{J910} = S_{J1010} = 12 \end{aligned}$$

4.9-12 Elementos no cero de S_i rearmada después de factorizar $\frac{2EI}{L^3}$:

$$\begin{aligned} S_{J11} &= 4S_{J13} = 4S_{J18} = \frac{4}{3}S_{J33} = 8S_{J34} = 2S_{J44} = 8S_{J46} \\ &= 4S_{J66} = 2S_{J88} = 8L^2 \\ -S_{J12} &= S_{J17} = -2S_{J23} = 2S_{J24} = S_{J39} = -2S_{J310} = -2S_{J45} \\ &= -2S_{J56} = 2S_{J610} = S_{J78} = -S_{J89} = 6L \\ S_{J22} &= -\frac{4}{3}S_{J29} = -3S_{J210} = 3S_{J55} = -3S_{J510} = \frac{4}{3}S_{J77} = -\frac{4}{3}S_{J79} \\ &= \frac{4}{3}S_{J99} = \frac{4}{3}S_{J1010} = 18 \end{aligned}$$

4.12-1 $D = \frac{\sqrt{2} PL}{(1 + \sqrt{2})EA_x} \{1 + \sqrt{2}, 1\}$

$$\begin{aligned} A_R &= \frac{P}{2(1 + \sqrt{2})} \\ &\quad \{- (2 + \sqrt{2}), -(2 + \sqrt{2}), -2(1 + \sqrt{2}), -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \\ A_{M1} &= P\{-1, 0, 1, 0\} \\ A_{M2} &= \frac{P}{1 + \sqrt{2}} \{-\sqrt{2}, -(1 + \sqrt{2}), \sqrt{2}, -(1 + \sqrt{2})\} \\ A_{M3} &= \frac{P}{1 + \sqrt{2}} \{1, 0, -1, 0\} \end{aligned}$$

4.12-2 $D = \frac{PL}{EA_x} \{1.30, 1.60\}$

$$\begin{aligned} A_R &= P\{-3.80, 1.50, -1.00, -0.600, -0.200, 1.10\} \\ A_{M1} &= P\{1.30, -2.00, -1.30, 2.00\} \quad A_{M2} = P\{0, 1.00, 0, 1.00\} \\ A_{M3} &= P\{-1.60, 1.00, 1.60, 1.00\} \\ A_{M4} &= P\{0.500, 0.500, 0.500, 0.500\} \quad A_{M5} = P\{-0.500, 0, 0.500, 0\} \\ A_{M6} &= P\{0, 0, 0, 0\} \end{aligned}$$

4.12-3 $D = \frac{wL^2}{EA_x} \{-1.26, 0\}$ $A_R = wL\{0, 1.71, -0.446, 0.446, 2.15, 2.97\}$

$$\begin{aligned} A_{M1} &= wL\{0, 0.500, 0, 0.500\} \quad A_{M2} = wL\{0, 0.500, 0, 0.500\} \\ A_{M3} &= wL\{0.500, 0, 0.500, 0\} \quad A_{M4} = wL\{1.76, 0, -0.762, 0\} \\ A_{M5} &= wL\{-0.500, 0.500, -0.500, 0.500\} \\ A_{M6} &= wL\{1.131, 0.500, 0.131, 0.500\} \end{aligned}$$

4.12-4 $D = \frac{wL^2}{EA_x} \{-0.288, -0.815, -0.731\}$

$$\begin{aligned} A_R &= wL\{-0.0630, 0.351, 2.48, -0.288, 2.32\} \\ A_{M1} &= wL\{-0.288, 0.300, 0.288, 0.300\} \\ A_{M2} &= wL\{0, 0.300, 0, 0.300\} \quad A_{M3} = wL\{1.22, 0, -0.416, 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{M4} &= wL\{1.13, 0, -0.332, 0\} \\ A_{M5} &= wL\{0.080, 0.300, -0.880, 0.300\} \\ A_{M6} &= wL\{0.985, 0.300, -0.185, 0.300\} \end{aligned}$$

4.12-5 $D = \frac{PL}{EA_x} \{0.667, -2.00, -4.00\}$

$$\begin{aligned} A_R &= P\{-2.40, 0.700, 0.21, 0.700, 4.79\} \\ A_{M1} &= P\{0.667, 1.00, -0.667, 2.00\} \quad A_{M2} = P\{0, -1.00, 0, -1.00\} \\ A_{M3} &= P\{1.40, 0, -1.40, 0\} \quad A_{M4} = P\{2.07, 0, -2.07, 0\} \\ A_{M5} &= P\{4.33, 0.500, -2.60, 0.500\} \end{aligned}$$

4.12-6 $D = \frac{wL^2}{EA_x} \{-2.92, -2.92\}$

$$\begin{aligned} A_R &= wL\{-1.40, 1.40, -1.40, 2.25, 1.40, 2.25\} \\ A_{M1} &= wL\{0, 0.400, 0, 0.400\} \quad A_{M2} = wL\{0, 0.400, 0, 0.400\} \\ A_{M3} &= wL\{0.300, 0, 0.300, 0\} \quad A_{M4} = wL\{0.150, 0, 0.150, 0\} \\ A_{M5} &= wL\{-2.05, 0.400, 1.45, 0.400\} \\ A_{M6} &= wL\{2.05, 0.400, -1.45, 0.400\} \end{aligned}$$

4.12-7 Elementos no cero de S_i después de factorizar $\frac{EA_x}{L}$:

$$\begin{aligned} S_{J11} &= -2S_{J15} = -2S_{J17} = -\frac{2}{3}S_{J26} = -\frac{2}{3}S_{J28} = -\frac{2}{3}S_{J36} = \frac{2}{3}S_{J38} \\ &= -\frac{2}{3}S_{J45} = \frac{2}{3}S_{J47} = 0.500 \\ S_{J16} &= -S_{J18} = S_{J25} = -S_{J27} = S_{J46} = S_{J48} = -0.433 \quad S_{J22} = 3.23 \\ S_{J24} &= -1.73 \quad S_{J33} = -2S_{J35} = -2S_{J37} = S_{J44} = 2.60 \\ S_{J55} &= S_{J77} = 2.55 \quad S_{J56} = S_{J66} = -S_{J78} = S_{J88} = 1.18 \\ S_{J57} &= -1.00 \end{aligned}$$

4.12-8 Elementos no cero de S_i después de factorizar $\frac{EA_x}{L}$:

$$\begin{aligned} S_{J11} &= S_{J33} = 1.38 \\ S_{J12} &= -\frac{1}{2}S_{J16} = S_{J18} = -\frac{1}{2}S_{J25} = S_{J27} = -S_{J34} = \frac{1}{2}S_{J36} = -S_{J310} \\ &= \frac{1}{2}S_{J45} = -S_{J49} = \frac{1}{2}S_{J57} = \frac{1}{2}S_{J59} = \frac{2}{3}S_{J68} = \frac{2}{3}S_{J610} = -0.217 \\ S_{J13} &= 4S_{J15} = 8S_{J17} = -\frac{8}{3}S_{J22} = \frac{4}{3}S_{J26} = \frac{8}{3}S_{J28} = 4S_{J35} = 8S_{J39} \\ &= -\frac{8}{3}S_{J44} = \frac{4}{3}S_{J46} = \frac{8}{3}S_{J410} = 4S_{J58} = -4S_{J510} = 4S_{J67} \\ &= -4S_{J69} = -1.00 \\ S_{J55} &= 1.368 \quad S_{J66} = 1.79 \quad S_{J77} = S_{J99} = 0.559 \\ S_{J78} &= -S_{J910} = 0.467 \quad S_{J88} = S_{J1010} = 0.520 \end{aligned}$$

4.12-9 Elementos no cero de S_i rearmada después de factorizar $\frac{EA_x}{L}$:

$$\begin{aligned} S_{J11} &= S_{J33} = S_{J77} = S_{J99} = 1.71 \\ S_{J12} &= S_{J27} = S_{J35} = S_{J49} = -1.00 \quad S_{J22} = 2.71 \\ S_{J14} &= S_{J15} = -S_{J16} = -S_{J23} = S_{J29} = S_{J210} = S_{J39} = S_{J310} = S_{J46} \\ &= S_{J47} = -S_{J48} = S_{J56} = -S_{J57} = S_{J58} = -S_{J66} = S_{J78} \\ &= -S_{J88} = -S_{J910} = -S_{J1010} = -0.707 \\ S_{J44} &= S_{J55} = 2.42 \end{aligned}$$

4.12-10 Elementos no cero de S_i después de factorizar $\frac{EA_x}{L}$:

$$\begin{aligned} S_{J11} &= S_{J33} = \frac{1}{2}S_{J55} = \frac{1}{2}S_{J77} = \frac{1}{2}S_{J99} = \frac{1}{2}S_{J1111} = 2.03 \\ S_{J12} &= \frac{1}{4}S_{J17} = -S_{J18} = -\frac{1}{4}S_{J28} = -S_{J34} = \frac{1}{4}S_{J35} = S_{J36} \\ &= S_{J45} = \frac{3}{4}S_{J46} = \frac{3}{4}S_{J511} = -\frac{1}{2}S_{J512} = -\frac{1}{2}S_{J611} = \frac{3}{4}S_{J612} \\ &= \frac{3}{4}S_{J79} = \frac{1}{2}S_{J10} = \frac{1}{2}S_{J89} = \frac{3}{4}S_{J810} = -\frac{1}{2}S_{J910} = -\frac{3}{4}S_{J1010} \\ &= \frac{1}{2}S_{J1112} = -\frac{3}{4}S_{J1212} = -0.480 \\ S_{J15} &= S_{J37} = \frac{1}{2}S_{J59} = \frac{1}{2}S_{J711} = -1.67 \quad S_{J22} = S_{J44} = 1.89 \\ S_{J24} &= \frac{1}{2}S_{J68} = -1.25 \quad S_{J58} = -\frac{1}{10}S_{J66} = -S_{J78} = -\frac{1}{10}S_{J88} = -0.440 \end{aligned}$$

Las respuestas a los problemas del Art. 4.18 están en unidades de kips, pulgadas y radianes.

- 4.18-1 $D = \{-0.000438, -0.00193, 0.000532\}$
 $A_R = \{0.913, 5.97, 227.7, -0.913, 4.03, 43.59\}$
 $A_{M1} = \{0.913, 5.97, 227.7, -0.913, 4.03, -87.94\}$
 $A_{M2} = \{4.03, 0.913, 87.94, -4.03, -0.913, 43.59\}$
- 4.18-2 $D = \{-0.000216, -0.00358, 0.000424\}$
 $A_R = \{0.360, 3.34, 249.6, 0.360, -0.303, 28.19, -0.720, 8.96, 46.00\}$
 $A_{M1} = \{0.360, 3.34, 249.6, -0.360, 2.66, -151.5\}$
 $A_{M2} = \{-0.360, 0.303, 59.09, 0.360, -0.303, 28.19\}$
 $A_{M3} = \{8.96, 0.721, 92.36, -8.96, -0.721, 46.0\}$
- 4.18-3 $D = \{0.00671, -0.00147, 0.000868\}$
 $A_R = \{-5.04, 7.79, -496.3, -4.96, 2.21, 349.5\}$
 $A_{M1} = \{5.04, 2.21, 357.9, -5.04, 7.79, -496.3\}$
 $A_{M2} = \{2.21, 4.96, 349.0, -2.21, 5.04, -117.9\}$
- 4.18-4 $D = \{0.00851, -0.0294, -0.000744\}$
 $A_R = \{-2.84, 2.42, 74.9, -2.36, 7.80, -245.6, -4.80, 9.79, 142.9\}$
 $A_{M1} = \{-2.84, 2.42, 74.9, 2.84, 2.58, -85.0\}$
 $A_{M2} = \{2.36, 7.20, 192.0, -2.36, 7.80, -245.6\}$
 $A_{M3} = \{9.79, 4.80, 142.9, -9.79, 5.20, -167.0\}$
- 4.18-5 $D = \{0, -0.000620, 0\}$
 $A_R = \{-0.323, 0, -8.55, 0, 0.434, 0, 0.323, 1.57, 8.77\}$
 $A_{M1} = \{-0.434, 0, 0, 0.434, 0, 0\}$
 $A_{M2} = \{1.52, 0.503, 8.77, 0.215, 0.497, -8.55\}$
- 4.18-6 $D = \{0.00599, -0.0130, 0.000409\}$
 $A_R = \{-6.59, -0.890, 55.1, 0.590, 2.89, 182.1\}$
 $A_{M1} = \{6.59, 0.890, 91.9, -6.59, -0.890, 55.1\}$
 $A_{M2} = \{2.46, 1.63, 182.0, -5.29, 1.20, -91.9\}$
- 4.18-7 $D = \{0.000507, -0.00187, -0.000159\}$
 $A_R = \{-0.677, 0.942, 17.8, -1.01, 0.342, -5.21, 1.69, 2.72, 6.47\}$
 $A_{M1} = \{-0.677, 0.942, 17.8, 0.677, 0.258, -4.95\}$
 $A_{M2} = \{1.01, 0.458, 8.70, -1.01, 0.342, -5.21\}$
 $A_{M3} = \{3.19, 0.276, 6.47, -2.23, 0.444, -3.75\}$
- 4.18-8 Elementos no cero de S_j :
 $S_{J11} = S_{J44} = 1541.7$
 $S_{J13} = S_{J19} = -S_{J37} = S_{J46} = S_{J412} = -S_{J610} = -S_{J79}$
 $= -S_{J1012} = 5000.0$
 $S_{J14} = \frac{1}{2}S_{J28} = \frac{1}{2}S_{J511} = -\frac{1}{2}S_{J88} = -\frac{1}{2}S_{J1111} = -1500.0$
 $S_{J17} = S_{J410} = -S_{J77} = -S_{J1010} = -41.7$ $S_{J22} = S_{J44} = 3005.2$
 $S_{J23} = S_{J26} = -S_{J35} = -S_{J56} = 1250.0$ $S_{J25} = -5.22$
 $\frac{1}{3}S_{J33} = 2S_{J36} = S_{J39} = \frac{1}{3}S_{J66} = S_{J612} = \frac{1}{2}S_{J99} = \frac{1}{2}S_{J1212} = 4.0 \times 10^5$
- 4.18-9 Elementos no cero de S_j :
 $S_{J11} = S_{J22} = 3041.7$
 $S_{J13} = S_{J19} = S_{J23} = S_{J26} = -S_{J35} = -S_{J37} = -S_{J79} = 5000.0$
 $S_{J14} = S_{J28} = -S_{J88} = -3000.0$ $S_{J17} = S_{J25} = -S_{J77} = -41.7$
 $\frac{1}{3}S_{J33} = S_{J36} = S_{J39} = \frac{1}{3}S_{J66} = \frac{1}{2}S_{J612} = \frac{1}{2}S_{J99} = \frac{1}{2}S_{J1212} = 4.0 \times 10^5$
 $S_{J44} = 3878.65$ $S_{J45} = -S_{J411} = -S_{J510} = S_{J1011} = -1143.0$
 $S_{J46} = S_{J412} = -S_{J610} = -S_{J1012} = 2560.0$ $S_{J410} = -S_{J1010} = -878.7$
 $S_{J55} = 1585.0$ $S_{J56} = 3080.0$ $S_{J511} = -S_{J1111} = -1543.7$
 $S_{J512} = -S_{J511} = -S_{J1112} = 1920.0$

INDICE

— A —

Acciones, correspondientes, 23
 definición de, 20
 entre nudos, 456
 internas, 21
 notación para, 24

Acciones de empotramiento, Apéndice B
 debidas a cambios de temperatura, 514
 debidas a cargas, 512
 debidas a desplazamientos de extremo, 515
 debidas a deformaciones previas, 513
 matrices de, 241, 259, 282, 308, 320, 329
 para miembros de armadura, 516

Acciones de extremo de miembro, 88, 110, 196
 para armaduras, 121, 168, 285, 298, 333
 para marcos en el espacio, 193, 344
 para marcos planos, 185, 309
 para parrillas, 189, 321
 para vigas, 176, 244, 263
 tablas de, 511
 (ver también Acciones de extremo de miembro)

Acciones resultantes, 21
 internas, 21

Acciones y desplazamientos correspondientes, 22

Apoyos elásticos, 470
 inclinados, 467
 tipos de, 13

Apoyos flexibles, 470

Apoyos inclinados, 467

Armaduras, deformaciones en, 19
 desplazamientos en, 167

en el espacio, definición de, 14
 planas, definición de, 14
 (ver también Armaduras planas; Armaduras en el espacio)

Armaduras en el espacio, análisis por el método de la flexibilidad, 167, 195
 análisis por el método de la rigidez, 322-333
 definición de, 14
 deformación en, 18
 desplazamientos de nudo en, 167
 flexibilidad de miembros de, 169
 miembros verticales en, 328
 programa de computación para, 411
 rigidez de miembros de, 322
 selección de ejes de miembro para, 325

Armaduras planas, análisis por el método de la flexibilidad, 73-74, 167, 195, 201
 análisis por el método de la rigidez, 119, 270-298
 definición de, 17
 deformaciones en, 18
 desplazamiento de nudo en, 167
 flexibilidades de miembros de, 169
 programa de computación para, 380
 rigideces de miembros de, 124, 270, 294

Articulaciones en miembros, 476

— C —

Cambios de temperatura, tabla de acciones de empotramiento debidas a, 514

Carga proporcional, 51

Cargas, de nudo combinadas, 164, 241
 acciones de empotramiento debidas a (tabla), 512

de nudo equivalentes, 165, 240
 de nudo (reales), 165, 240
 proporcionales, 51
 trabajo efectuado por las, 51
 (ver también Cargas de nudo)
 Cargas de nudo, para armaduras en el espacio, 330
 para armaduras planas, 278
 para marcos en el espacio, 342
 para marcos planos, 307
 para parrillas, 320
 para vigas, 165, 240, 259
 (ver también Cargas)
 Cargas de nudo equivalentes, 164, 240
 Cargas entre nudos, 452
 Coeficientes de flexibilidad, 43, 47, 65
 directos, 47
 en cruz, 48, 52
 teorema recíproco para los, 53
 Coeficientes de influencia, 43
 Coeficientes de rigidez, 44, 48, 102
 directos, 48
 en cruz, 48, 54
 teorema recíproco para, 53
 Comparación entre los métodos de la flexibilidad y de la rigidez, 144
 Compatibilidad, 28, 61
 Conexiones, elásticas, 480
 flexibles, 480
 no-rígidas, 480
 Constante de torsión, 495
 tabla, 519
 Cosenos directores, 271, 291, 298

— D —

Deflexiones (ver Desplazamientos)
 De nudo combinadas, cargas, 164, 241
 Deformaciones, por cortante, 17, 20, 184, 382, 496
 por flexión, 17, 491
 por temperatura, 498
 por torsión, 17, 217, 492
 unitarias, 492-500
 Deformaciones axiales, 17, 76, 128, 187, 489
 Deformaciones de barras, 17, 489
 Deformaciones previas, en el método de la flexibilidad, 82, 214
 en el método de la rigidez, 134, 451
 tabla de acciones de empotramiento debidas a, 513
 Desplazamiento generalizado, 22

Desplazamientos, Apéndice A, 15
 correspondientes, 23
 debidos al cortante, 184
 definición de, 23
 entre nudos, 456
 método de la carga unitaria para, 167-195, 499; (véase también Desplazamientos de nudo y Desplazamientos de apoyos)
 notación para, 24
 tabla de (para vigas), 508
 Desplazamientos de apoyos, 65, 82, 134, 214, 466
 Desplazamientos de nudo, 88, 198
 acciones de empotramiento debidas a (tabla), 515
 en armaduras, 167
 en marcos en el espacio, 193
 en marcos planos, 185
 en parrillas, 189
 en vigas, 176
 numeración de, 246, 276, 303, 319, 329, 342
 Desplazamientos de restricciones (ver Desplazamientos de apoyos)
 Diagramas de flujo, 354
 para armaduras en el espacio, 411
 para armaduras planas, 384
 para marcos en el espacio, 428
 para marcos planos, 392
 para parrillas, 407
 para vigas, 367
 símbolos para manifestaciones en los, 358
 Discontinuidades de miembro, 476

— E —

Ecuaciones de acción, 40
 de desplazamiento, 40
 Ejes, orientados con el miembro, 168, 228
 orientados con la estructura, 168, 229
 orientados con las restricciones, 468-469
 Elásticas, conexiones, 480
 Equilibrio, 26
 ecuaciones de, 103
 Equilibrio estático, 27
 Esfuerzos en barras, 489-500
 Estructura, desunida, 197
 fija, 100

libre, 61
 unida, 198
 Estructuras, linealmente elásticas, 17, 39, 489
 móviles, 35
 reticulares, tipos de, 13

— F —

Flexibilidades, definición de, 40
 de un miembro de armadura, 170
 de un miembro de marco en el espacio, 193
 de un miembro de marco plano, 185, 188
 de un miembro de parrilla, 190
 de un miembro de viga, 178
 efecto de corriente en las, 184
 Flexibilidades de miembro (ver Flexibilidades)
 Fuerza axial, 17, 489
 cortante, 17, 496

— G —

Geometría, ecuación de, 61
 Grados, de indeterminación cinemática, 31
 estática, 29
 de libertad, 32

— I —

Indeterminación cinemática, 28, 31
 Indeterminación estática, 28
 Interacción fuerza axial-flexión, 484

— L —

Ley de Hooke, 17, 489

— M —

Marcos, deformaciones en, 18, 20
 en el espacio, definición de, 15
 planos, definición de, 14
 (ver también Marcos planos; Marcos en el espacio)
 Marcos en el espacio, análisis por el método de la flexibilidad, 193, 194
 análisis por el método de la rigidez, 332-345
 definición de, 15
 deformaciones en, 20

desplazamientos de nudo en, 192
 ejes principales para miembros de, 334
 flexibilidades de miembros de, 193
 miembros verticales en, 339
 programa de computación para, 422
 rigideces de miembros de, 227, 333-345

Marcos planos, análisis por el método de la flexibilidad, 76, 185, 195
 análisis por el método de la rigidez, 126, 300-315
 definición de, 14
 deformaciones en, 18
 desplazamientos de nudo en, 185
 efecto de deformaciones axiales en, 78-79, 128, 187, 211
 flexibilidades de miembros de, 185
 programa de computación para, 388
 rigideces de miembros de, 300
 Matrices de cambio, para acciones de empotramiento, 455, 474, 477, 481
 para acciones internas, 458
 para desplazamientos intermedios, 461-462
 para el método de la flexibilidad, 171-199

Matriz, condensación de, 476
 Matriz de flexibilidad, 46, 47, 65, 197
 de una estructura desunida, 197
 de una estructura unida, 198
 inversa de la, 48, 95
 simetría de, 52
 Matriz de rigidez, 46, 48, 105
 acciones de extremo de miembro en, 110
 de miembro, 230
 efectos de deformación previa en, 134, 451
 inversa de la, 48, 138
 nudo total, 236
 programa de computación para, Cap. 5
 reacciones por, 110
 resumen, 140, 225
 simetría de la, 53
 Método de la carga unitaria, 167-195
 499-510
 para desplazamientos de armadura, 167, 504
 para desplazamientos de marco en el espacio, 193

para desplazamientos de marco plano, 185
 para desplazamientos de viga, 176, 506
 para desplazamientos de parrilla, 189
 para varios sistemas de carga, 174, 182
 Método de la carga virtual (ver Método de la carga unitaria)
 Método de la flexibilidad, 59-99, 163-217
 comparación con el método de la rigidez, 144
 desplazamientos de apoyo por el, 82, 214
 desplazamientos de nudo por el, 88, 166-195
 ecuaciones del, 195
 efectos de deformación previa en el, 82, 214
 efectos de temperatura en el, 82, 214
 reacciones por el, 88
 resumen del, 96, 97, 199
 tabla de matrices usadas en el, 101, 199
 Método de la rigidez, Caps., 4-6
 desplazamientos de apoyo en el, 134, 466
 efectos de temperatura en el, 134-451
 tabla de matrices usadas en el, 142
 Método de Maxwell-Mohr (ver Método de la carga unitaria)
 Miembros, asimétricos, 215
 de armadura, tabla de acciones de extremo para, 516
 en armaduras planas, 328
 no prismáticos, 472
 restringidos, acciones de extremo para, Apéndice B
 numeración de los, 250, 275, 319-323, 329, 341
 simétricos, 215
 verticales, en marcos en el espacio, 339

— N —

Notación, explicación de la, 63
 Nudos, tipos de, 13

numeración de, 251, 275, 303, 319, 329, 342

— P —

Par de flexión, 17, 491
 de torsión, 17, 493
 Parrillas, análisis por el método de la flexibilidad, 80, 189, 195
 análisis por el método de la rigidez, 131, 315-322
 definición de, 15
 deformaciones en, 18
 desplazamiento de nudo en, 189
 flexibilidades de miembros de, 189
 programa de computación para, 404
 rigideces de miembros de, 315
 Plano de flexión, 14
 Principio de superposición, 37
 Programa de computación, Cap. 5
 identificadores usados en (tabla), 364, 426
 para armaduras en el espacio, 411
 para marcos en el espacio, 422
 para marcos planos, 388
 para parrillas, 404
 para vigas, 363
 programas, computación (ver Programas de computación)
 Propiedades de sección, 519
 Propiedades de secciones (tabla), 519

— R —

Reacciones, 88, 110, 196, 244
 Redundancia (ver Indeterminación)
 Redundantes, cinemáticos, 32
 estáticos, 29
 Relaciones recíprocas, 51
 Resultantes de esfuerzo, 14, 17, 21
 Rigideces, para miembros con conexiones elásticas, 48
 para miembros con deformaciones con cortante, 482
 para miembros con discontinuidades, 476
 para miembros con fuerzas axiales, 483
 para miembros de armadura plana, 124, 270, 293, 300
 para miembros de parrilla, 315
 para miembros de viga, 108, 118, 236

de nudo, 109, 236
 para miembros de marcos en el espacio, 234, 333
 (ver también Rigideces de nudo)
 para miembros no prismáticos, 472
 Rigideces de nudo, para vigas, 255
 para armaduras en el espacio, 330
 para armaduras planas, 278
 para marcos en el espacio, 342
 para marcos planos, 306
 para parrillas, 320
 (ver también Rigideces)
 Rigideces para miembros de viga, para miembros de armaduras en el espacio, 322
 para miembros prismáticos, 227
 Rigidez, al cortante, 497
 a la flexión, 492
 a la torsión, 494
 axial, 490
 definición de, 40
 Rotación de ejes, para parrillas, 315
 en dos dimensiones, 290
 en tres dimensiones, 298
 para apoyos inclinados, 469
 para armaduras en el espacio, 322
 para armaduras planas, 293
 para marcos en el espacio, 333
 para marcos planos, 300

— S —

Sistemas de carga varios, 144, 174, 182, 200

Sistemas de numeración, arbitrarios, 246
 Superposición, condiciones para, 38
 ecuaciones de, 37, 61, 91, 103, 106, 111, 135
 principio de, 37

— T —

Teorema de Maxwell, 53
 Temperatura, efectos de, 82, 134, 214, 451
 Torsión, 17, 493
 Trabajo de las cargas, 52
 Trabajo virtual, método del, 500
 principio del, 501

— V —

Vigas, análisis por el método de la flexibilidad, 64, 68, 176, 195, 204
 análisis por el método de la rigidez, 105, 113, 251-270
 definición, 14
 deformaciones en, 18
 desplazamientos de nudo en, 176
 flexibilidades de miembro de, 178
 no prismáticas, 472
 programa de computación para, 363
 rigideces de miembros de, 108, 118, 227
 tabla de desplazamientos para, 508